

Г.А. ВІРЧЕНКО

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

М.О. ТЕРЕЩУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

## ДО ПИТАННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ ІЗ НАТУРАЛЬНОЮ ПАРАМЕТРИЗАЦІЄЮ

Сьогодні комп'ютерні інформаційні технології доволі поширені в різноманітних сферах життєдіяльності людей. При цьому створення складних технічних об'єктів зазвичай здійснюється у середовищі CAD/CAM/CAE/PLM (Computer-Aided Design/Computer-Aided Manufacturing/Computer-Aided Engineering/Product Lifecycle Management) систем. Наведені факти визначають важливість подальшого розвитку вказаних засобів та вдосконалення належних методик їх практичного використання, зокрема щодо автоматизованого формоутворення. Основою відповідного геометричного моделювання нині слугують параметричні криві, які знаходять своє застосування під час проєктування багатьох промислових виробів. Це стосується, наприклад, літаків, суден, автомобілів, побутової техніки тощо, а також унікальних будівель і споруд. В останньому випадку маються на увазі культурні, освітні, спортивні, медичні, інженерні та інші об'єкти.

Теперішній історичний етап розвитку нашої держави доволі важкий через воєнні дії на її території. Знищується інфраструктура міст і сіл, гинуть та отримують каліцтва люди. У зазначених критичних умовах велика кількість наших громадян, серед яких більшість є християнами, звертаються за допомогою до всевишніх сил. Тому актуальною постає проблема збереження існуючих, відновлення пошкоджених і зруйнованих сакральних будівель, зведення нових після закінчення війни. На підставі окреслених вище обставин запропонований у даній публікації підхід до практичного застосування кривих ліній із натуральною параметризацією проілюстровано на формоутворенні куполів православних храмів. Подані у статті відомості певним чином спираються на попередні виконані авторами належні наукові дослідження.

Основними отриманими результатами можна вважати розроблену методичку одержання потрібних математичних обчислювальних процедур для апроксимації з необхідною точністю натуральної параметризації опрацьованих кривих. Це дає змогу більш досконало здійснювати автоматизоване проєктування технічних об'єктів, що підтверджено проаналізованими відповідними конкретними прикладами. Визначено також перспективи проведення подальших наукових розвідок із розглянутої тематики.

**Ключові слова:** автоматизоване проєктування, геометричне моделювання, криві лінії, натуральна параметризація, православні храми.

G.A. VIRCHENKO

National Technical University of Ukraine  
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

M.O. TERESCHUK

Kyiv National University of Construction and Architecture

## ON THE ISSUE OF PRACTICAL APPLICATION OF CURVES WITH NATURAL PARAMETERISATION

Nowadays, computer information technologies are quite widespread in various spheres of people's lives. At the same time, the creation of complex technical objects is usually carried out in the environment of CAD/CAM/CAE/PLM (Computer-Aided Design/Computer-Aided Manufacturing/Computer-Aided Engineering/Product Lifecycle Management) systems. The above facts determine the importance of further development of these tools and improvement of appropriate methods of their practical use, in particular regarding automated shaping. The basis of corresponding geometric modelling is parametric curves, which are used in the design of many industrial products. This applies, for example, to airplanes, ships, cars, household appliances, etc., as well as unique buildings and structures. The latter case refers to cultural, educational, sports, medical, engineering and other facilities.

The current historical stage of our state's existence is quite difficult due to military operations on its territory. The infrastructure of cities and villages is being destroyed, people are dying and being maimed. In these critical conditions, a significant number of our citizens, most of whom are Christians, are turning to the Almighty for help. Therefore, the problem of preserving existing, restoring damaged and destroyed sacred buildings, and constructing new ones after the

*end of the war is becoming urgent. Based on the above circumstances, the approach proposed in this publication to the practical application of curved lines with natural parameterization is illustrated by the formation of domes of Orthodox temples. The information presented in the article is based to a certain extent on preliminary proper scientific research carried out by the authors.*

*The main results can be considered the developed methodology for obtaining the necessary mathematical computational procedures for approximation with the required accuracy of the natural parameterisation of the processed curves. This allows for more advanced automated design of technical objects, which is confirmed by the analysed relevant specific examples. Prospects for further scientific research on the topic under consideration were also identified.*

**Key words:** *automated design, geometric modelling, curved lines, natural parameterisation, Orthodox temples.*

### Постановка проблеми

Наш час характеризується широким упровадженням комп'ютерних інформаційних технологій у різні сфери життя людей. Особливо це стосується автоматизованого проєктування засобами CAD/CAM/CAE/PLM-систем. Зазначене зумовлює важливість подальшого розвитку вказаних засобів, удосконалення наявних методик їх практичного застосування, зокрема щодо автоматизованого формоутворення. Основою відповідного геометричного моделювання нині є параметричні криві, які інтенсивно використовуються під час проєктування багатьох промислових виробів, наприклад літаків, суден, автомобілів, побутової техніки тощо, а також унікальних будівель і споруд. В останньому випадку маються на увазі культурні, освітні, спортивні, медичні, інженерні та інші об'єкти.

Теперішній етап існування України доволі важкий через воєнні дії на її території, знищення інфраструктури міст і сіл, загибель та каліцтва людей. У таких трагічних умовах велика кількість наших громадян, серед яких більшість – християни, звертаються за допомогою до всевишніх сил, тому актуальною є проблема збереження існуючих, відновлення пошкоджених і зруйнованих сакральних будівель, зведення нових після закінчення війни. На певне вирішення окреслених питань спрямовані наукові дослідження авторів цієї статті. Спираючись на описані обставини, у даній праці викладено запропонований підхід до практичного застосування кривих ліній з апроксимованою натуральною параметризацією для формоутворення куполів православних храмів.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Видання [1] – це фундаментальна праця з комп'ютерного геометричного проєктування (Computer Aided Geometric Design), де висвітлено базові математичні основи сучасного автоматизованого формоутворення з використанням параметричних ліній. Питання їх параметризації розглядаються також у публікаціях [2; 3]. Першу присвячено натуральній (arc length) параметризації, коли параметр являє собою відстань уздовж досліджуваної кривої, а другу – параметризації за хордами (chord length), тобто коли параметр лінії визначається довжинами хорд уздовж неї. Кожен із наведених випадків має свої переваги й недоліки. Розв'язання окресленої задачі запропонованими обчислювальними процедурами пропонується в даній статті. Остання, як указувалося вище, спрямована на розв'язання конкретних практичних завдань стосовно збереження, відновлення зруйнованих у результаті війни на території України православних храмів, зведення нових таких архітектурних об'єктів після настання миру. Зазначені відомості містяться в дослідженнях [4–7]. У статті [4] представлено розроблений структурно-параметричний підхід до геометричного моделювання куполів храмів. Ці будівельні конструкції увінчують сакральні християнські споруди, уособлюють святі небесні образи, мають великий вплив на парафіян. Було проаналізовано такі форми куполів, як конусна, яйцеподібна, маківка, цибульчаста, грушоподібна, відповідні їхні гранчасті варіанти. Розглянуто питання ярусності куполів. Наведено математичні залежності для розрахунку площ поверхонь й обмежуваних ними об'ємів із використанням комп'ютерних засобів. Для забезпечення інтеграції стадій проєктування та виготовлення вказаних об'єктів у праці [5] подано прийоми побудови розгортки поверхонь гранчастих куполів, обчислення їхніх метричних характеристик у вигляді потрібних

довжин і площ. Видання [6] спрямоване на систематизацію певних аспектів методології геометричного моделювання щодо збереження та відновлення архітектурних об'єктів культурної спадщини нашої держави. У публікації [7] викладено способи й алгоритми комп'ютерного варіантного структурно-параметричного паркетування поверхонь куполів православних храмів, які сприяють підвищенню естетичної індивідуальності сакральних будівель. У роботах [4–7] для формоутворення широко застосовувалися векторні раціональні параметричні криві другого степеня, у тому числі з апроксимованою натуральною параметризацією. Однак останній зазначений математичний апарат не було описано. Тому акцентоване завдання становить предмет даної наукової статті.

### Мета дослідження

Ціллю публікації є викладення напрацьованого підходу до здійснення обчислювальної апроксимації натуральної параметризації ліній. Його проілюстровано на прикладі векторних раціональних параметричних кривих другого степеня, які використовуються під час комп'ютерного формоутворення куполів православних храмів. Зауважимо, що запропонований спосіб може застосовуватися за аналогією й до інших параметричних ліній.

### Виклад основного матеріалу дослідження

Належні матеріали подамо на основі представленого у виданнях [4–7] (рис. 1) структурно-параметричного формоутворення двоярусного банного завершення православного храму.

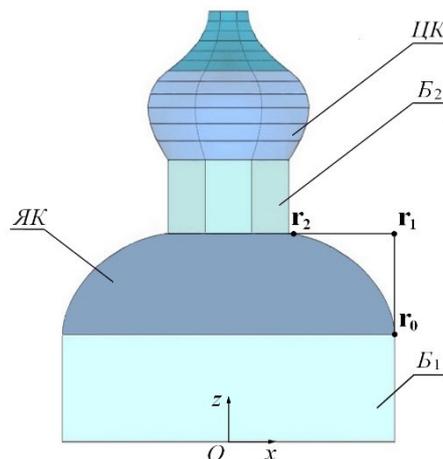


Рис. 1. Проектний різновид куполів храму:  
 $B_1$  – циліндричний барабан;  $YK$  – яйцеподібний купол;  $B_2$  – гранчастий барабан;  
 $CK$  – гранчастий цибульчастий купол

Математичний апарат дефініції показаних вище геометричних фігур наведено у зазначених дослідженнях. Будівельний об'єкт, що аналізується, на першому ярусі містить циліндричний барабан  $B_1$  та яйцеподібний купол  $YK$ , а на другому – восьмигранний барабан  $B_2$  і восьмигранний цибульчастий купол  $CK$ . Барабан  $B_1$  має радіус  $R=3000$  мм основи, висоту  $H=2000$  мм. Купол  $YK$  – це поверхня з вертикальною віссю обертання  $z$  прямокутної системи координат  $Oxyz$  (див. рис. 1), початок якої знаходиться у центрі основи барабана  $B_1$ , горизонтальна вісь  $x$  спрямована праворуч, а вісь  $y$  перпендикулярна площині вказаного рисунка. Твірною є крива другого степеня у векторній раціональній параметричній формі

$$\mathbf{r}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + w_1 2u(1-u) \mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2}{(1-u)^2 + w_1 2u(1-u) + u^2}, \quad (1)$$

де  $\mathbf{r}(u)$  – радіус-вектор точок кривої;

$\mathbf{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{r}_1=(x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2=(x_2, y_2, z_2)$  – радіус-вектори вершин характеристичного трикутника, розташованого у площині  $Oxz$ ;

$w_1 \geq 0$  – ваговий коефіцієнт вершини  $\mathbf{r}_1$ ;

$u \in [0, 1]$  – параметр.

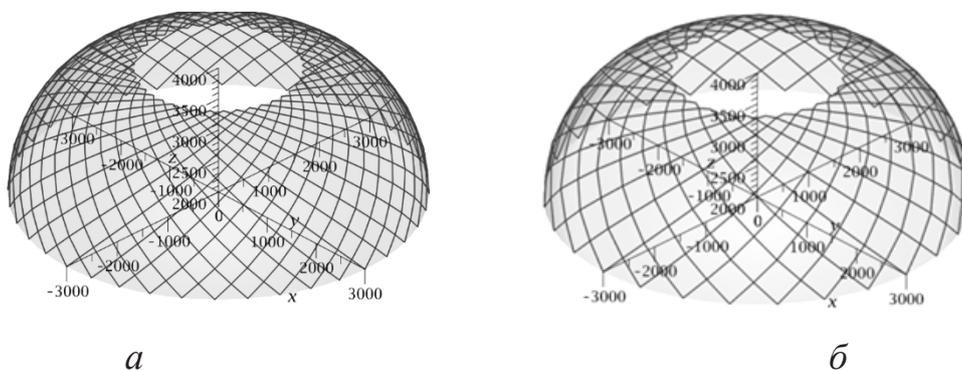
Для купола  $JK$

$$\mathbf{r}_0=(3000, 0, 2000), \mathbf{r}_1=(3000, 0, 4000), \mathbf{r}_2=(1200, 0, 4000), \quad (2)$$

де координати в мм;

$w_1=0,7071$ .

На рис. 2 показано два проектні різновиди паркетування його поверхні просторовими чотирикутниками квадратоподібної форми. Це здійснюється так. Для найнижчого кола для бажаного в горизонтальному ряду числа елементів обчислюються однакові хорди. Далі на кривій (1) визначається довжина, яка дорівнює половині розрахованої величини. Цим реалізується дефініція наступного горизонтального рівня. Отримані на ньому за описаною процедурою кінці хорд з'єднуються відрізками прямих із належними точками попереднього рівня. Розглянуті операції виконуються до досягнення повної висоти купола. У результаті маємо потрібне паркетування поверхні просторовими чотирикутниками квадратоподібної форми, які на практиці вирізаються з плоских заготовок та під час монтажу дещо згинаються.



**Рис. 2. Комп'ютерні варіанти паркетування купола  $JK$ :**  
 **$a, b$  – відповідно з 40 та 28 елементами в кожному горизонтальному ряду**

Як уже зазначалося, для автоматизованого проектування різноманітних технічних об'єктів, зокрема поверхонь автомобілів, суден, літаків, унікальних будівель і т. д., широко використовуються векторні раціональні параметричні криві (1). Це зумовлено зручним керуванням їхньою геометрією, наприклад простою дефініцією необхідних положень кінцевих точок, дотичних у них, потрібної величини вагового коефіцієнта середньої вершини характеристичного трикутника, яка суттєво впливає на форму даної лінії, забезпеченням гладкості першого порядку обводів із кількох елементів тощо.

Зауважимо, що натуральна параметризація доволі зручна не лише під час проведення теоретичних досліджень, а й під час застосування на практиці. Проте загалом головний її недолік полягає у проблемі знаходження точного аналітичного виразу, тобто без інтегралів та границь, для довжини  $L$  ліній. Щодо визначеної радіус-вектором  $\mathbf{r}$  у прямокутній системі координат  $Oxyz$  кривої

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(x(u), y(u), z(u)), \quad (3)$$

де  $u \in [u_b, u_e]$  – параметр,

це стосується обчислення інтеграла

$$L(u) = \int_{u_b}^{u_e} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du. \quad (4)$$

Похідні співвідношення (4) для ліній (3) у формі (1) мають вигляд:

$$\begin{aligned} x'(u) &= 2 \left( \frac{(1-w_1)(1-2u)((1-u)^2 x_0 + 2w_1 u(1-u)x_1 + u^2 x_2)}{p^2} + \frac{(u-1)x_0 + w_1(1-2u)x_1 + ux_2}{p} \right), \\ y'(u) &= 2 \left( \frac{(1-w_1)(1-2u)((1-u)^2 y_0 + 2w_1 u(1-u)y_1 + u^2 y_2)}{p^2} + \frac{(u-1)y_0 + w_1(1-2u)y_1 + uy_2}{p} \right), \\ z'(u) &= 2 \left( \frac{(1-w_1)(1-2u)((1-u)^2 z_0 + 2w_1 u(1-u)z_1 + u^2 z_2)}{p^2} + \frac{(u-1)z_0 + w_1(1-2u)z_1 + uz_2}{p} \right), \\ p &= (1-u)^2 + 2w_1 u(1-u) + u^2. \end{aligned} \tag{5}$$

З урахуванням виразів (5) розрахунок величини (4) здійснюється чисельним інтегруванням. Довжину  $L(u)$  параметричної кривої  $\mathbf{r}(u)$  можна наближено розглядати як довжину  $L$  ламаної з вершинами  $\mathbf{r}_i(u_i)$  та  $n$  ланками, тобто

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}(u_i) - \mathbf{r}(u_{i-1})|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_i = u_{i-1} + \Delta u, \quad \Delta u > 0, \\ u_0 &= u_b, \quad u_n = u_e. \end{aligned} \tag{6}$$

Зі зростанням  $n$ , тобто зменшенням  $\Delta u$ , точність наведеної апроксимації збільшується. Із залежностей (6) маємо множину впорядкованих пар

$$(l_i, u_i), \quad l_0 = 0, \quad l_i = \sum_{k=1}^i |\mathbf{r}(u_k) - \mathbf{r}(u_{k-1})|. \tag{7}$$

Довжина ланки  $|\mathbf{r}(u_k) - \mathbf{r}(u_{k-1})|$  у формулі (7) для ліній (1) і (3) розраховується за виразом

$$|\mathbf{r}(u_k) - \mathbf{r}(u_{k-1})| = \sqrt{(x(u_k) - x(u_{k-1}))^2 + (y(u_k) - y(u_{k-1}))^2 + (z(u_k) - z(u_{k-1}))^2}. \tag{8}$$

На основі співвідношень (1) ... (8) апроксимуємо впорядковані пари (7) лінії (1) у вигляді потрібної ламаної з вершинами

$$\mathbf{r}_i(u_i(l_i)), \quad i = 0 \dots n. \tag{9}$$

Для  $l \in [0, L]$  величини  $\mathbf{r}(u(l))$  обчислюватимемо за формулою

$$\mathbf{r}(u(l)) = \mathbf{r} \left( \frac{l_i - l}{l_i - l_{i-1}} u_{i-1} + \frac{l - l_{i-1}}{l_i - l_{i-1}} u_i \right), \tag{10}$$

де  $l_{i-1} \leq l \leq l_i, i=1 \dots n$ .

Далі перейдемо безпосередньо до належних прикладів. Для даних (2), беручи до уваги, що опрацьовувана крива знаходиться всередині її характеристичного трикутника та максимальна відстань між його вершинами

$$\begin{aligned} L_{\max_{\text{стор.мр}}} &= |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - z_2)^2} = \\ &= \sqrt{(3000 \text{ мм} - 1200 \text{ мм})^2 + (0 \text{ мм} - 0 \text{ мм})^2 + (2000 \text{ мм} - 4000 \text{ мм})^2} \approx 2690,725 \text{ мм}, \end{aligned} \tag{11}$$

маємо проміжок змінювання довжини  $L$  цієї лінії

$$L_{\max_{\text{стор.мр}}} \leq L < |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| + |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \tag{12}$$

З урахуванням залежностей (11) і (12)

$$2690,725 \text{ мм} \leq L < 2000 \text{ мм} + 1800 \text{ мм} = 3800 \text{ мм},$$

$$L_{\min} \leq L < L_{\max}. \tag{13}$$

Нехай у даному разі для практики орієнтовно достатньої точності апроксимації з довжиною максимальної ланки

$$\Delta l \approx 0,5 \text{ мм}. \tag{14}$$

На основі величини (14)

$$n = \frac{L_{\max}}{\Delta l} = \frac{3800 \text{ мм}}{0,5 \text{ мм}} = 7600. \quad (15)$$

Із використанням виразів (1) і (15) крок параметра  $u$

$$du = \frac{1}{n} = \frac{1}{7600} \approx 1,316 \cdot 10^{-4}. \quad (16)$$

Обчислена на засадах формул (6) ... (16) довжина  $L$  всієї кривої (1) та найбільша ланка  $c_{\max}$  апроксимуючої ламаної

$$L \approx 2986,578 \text{ мм}, \quad c_{\max} \approx 0,419 \text{ мм}. \quad (17)$$

Із метою оцінювання досягнутої точності виконано наведені вище розрахунки для збільшеного, зокрема в  $m=1,5$  рази, числа ланок  $n$ . Тоді

$$n = 7600 \cdot m = 7600 \cdot 1,5 = 11400. \quad (18)$$

Акцентуємо, що конкретне значення  $m$  вибирається згідно з наявними умовами моделювання. Для величини (18) отримано

$$L \approx 2986,578 \text{ мм}, \quad c_{\max} \approx 0,279 \text{ мм}. \quad (19)$$

Порівняння довжин  $L$  у виразах (17) і (19) свідчить про виконання цих обчислень з орієнтовною абсолютною точністю  $a \approx 0,001 \text{ мм}$ . Тоді відносна точність

$$aL = \frac{a}{L} \cdot 100 \% = \frac{0,001 \text{ мм}}{2986,578 \text{ мм}} \cdot 100 \% \approx 3,35 \cdot 10^{-5} \%. \quad (20)$$

Проілюструємо запропонований підхід (1) ... (20) до апроксимації натуральної параметризації ще для трьох варіантів проєктованої конструкції купола  $JK$ . Абсциса вершини  $r_2$  (див. рис. 1) визначає радіус  $r$  описаного кола основи восьмигранного барабана  $B_2$ , а  $w_1$  – форму та розміри опрацьовуваного купола. У табл. 1 та 2 наведено вказані змінні та результати виконаної апроксимації.

Таблиця 1

**Вихідні дані та результати апроксимації для  $\Delta l \approx 0,5 \text{ мм}, m=1$**

Вар.	$r, \text{ мм}$	$w_1$	$n$	$du$	$c_{\max}, \text{ мм}$	$L, \text{ мм}$	$a, \text{ мм}$	$aL, \%$
1	1200	0,7071	7600	$1,316 \cdot 10^{-4}$	0,419	2986,578	0,001	$3,45 \cdot 10^{-5}$
2	1200	0,5	7600	$1,316 \cdot 10^{-4}$	0,473	2901,721	0,001	$3,45 \cdot 10^{-5}$
3	2000	1	6000	$1,667 \cdot 10^{-4}$	0,667	2488,654	0,001	$4,02 \cdot 10^{-5}$
4	1000	1,5	8000	$1,250 \cdot 10^{-4}$	0,750	3379,470	0,001	$2,96 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 2

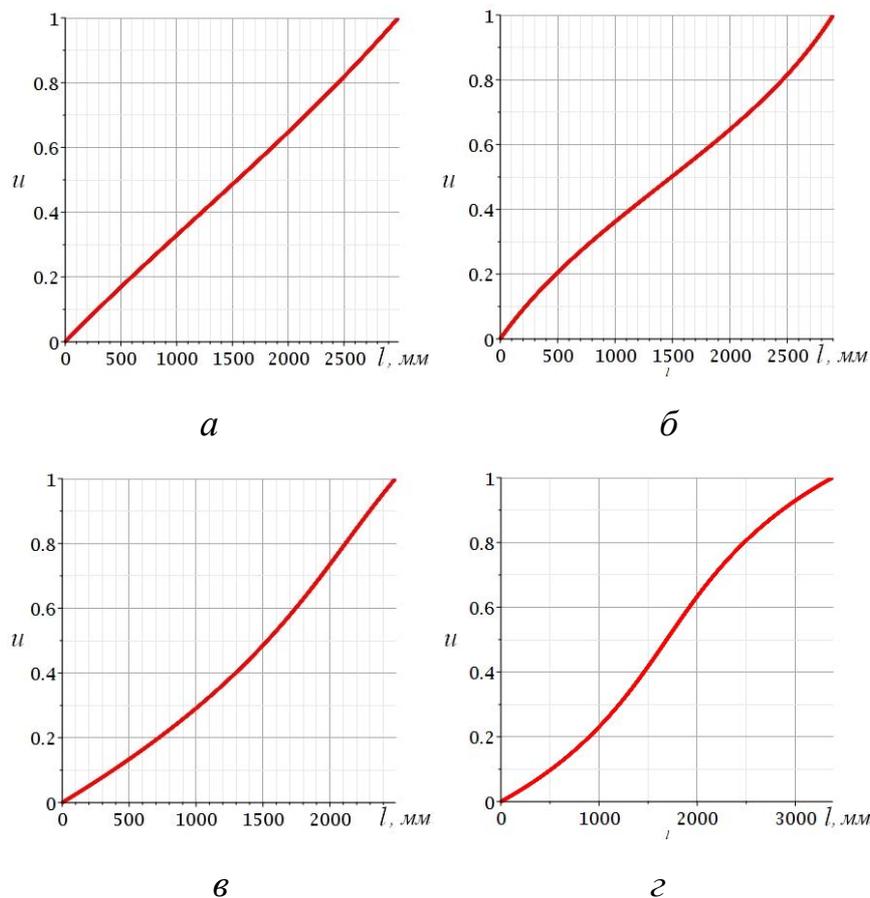
**Вихідні дані та результати апроксимації для  $\Delta l \approx 0,5 \text{ мм}, m=1,5$**

Вар.	$r, \text{ мм}$	$w_1$	$n$	$du$	$c_{\max}, \text{ мм}$	$L, \text{ мм}$	$a, \text{ мм}$	$aL, \%$
1	1200	0,7071	11400	$0,877 \cdot 10^{-4}$	0,279	2986,578	0,001	$3,45 \cdot 10^{-5}$
2	1200	0,5	11400	$0,877 \cdot 10^{-4}$	0,315	2901,721	0,001	$3,45 \cdot 10^{-5}$
3	2000	1	9000	$1,111 \cdot 10^{-4}$	0,444	2488,654	0,001	$4,02 \cdot 10^{-5}$
4	1000	1,5	12000	$0,833 \cdot 10^{-4}$	0,500	3379,470	0,001	$2,96 \cdot 10^{-5}$

Графіки залежностей  $u(l)$  розглянутих різновидів представлено на рис. 4, а форму, розміри та паркетування відповідних куполів – на рис. 5. Як видно, головна перевага геометричних моделей полягає у їх наочності. Дана властивість доволі часто полегшує сприйняття наявних відомостей про технічні об'єкти, сприяє проведенню потрібної систематизації. Наприклад, у нашому випадку прогнозована (спеціально з певною похибкою) приблизна довжина  $\Delta l \approx 0,5 \text{ мм}$  максимальної ланки апроксимуючої ламаної для варіантів 3 та 4 (див. табл. 1) була суттєво

перевищена. Останнє зумовлено змінною величиною похідної  $du/dl$  протягом довжини  $L$  опрацьовуваної кривої лінії, іншими словами, неоднаковою швидкістю змінювання  $u$  вздовж  $l$ . Рис. 4 ілюструє цей факт. Перше його зображення з практичного погляду майже задовольняє сталості зазначеної похідної, що з позицій геометрії являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до точок графіка функції, яка аналізується. Акцентоване деяким чином теж стосується і другого зображення, показаного на рис. 4 б. Зроблені висновки підтверджуються належними даними (див. табл. 1) про максимальну ланку відповідно варіантів 1 і 2 та 3 і 4.

Описані вище неточності виправлено шляхом використання контрольного корегуючого коефіцієнта  $m$ , див. у табл. 2 інформацію про максимальні ланки варіантів 3 та 4. Зауважимо, що окреслені проблемні питання потребують свого подальшого вивчення й узагальнення.



**Рис. 4. Графіки  $u(l)$ :  
 а, б, в, г – відповідно варіантів 1, 2, 3, 4**

Перспективами розвитку викладеного підходу можна вважати опрацювання за аналогією кривих ліній вищого, ніж другий, степеня, а також поширення запропонованих прийомів геометричного моделювання на іншу промислову продукцію та сфери життєдіяльності людей.

### Висновки

Дану публікацію присвячено деяким питанням практичного застосування кривих ліній із натуральною параметризацією для геометричного моделювання промислової продукції. Із метою демонстрації запропонованого підходу об'єктом автоматизованого проектування було вибрано належні процеси варіантного формоутворення куполів православних храмів. Останнє зумовлено тим, що нині наша держава переживає важкі часи свого існування, пов'язані

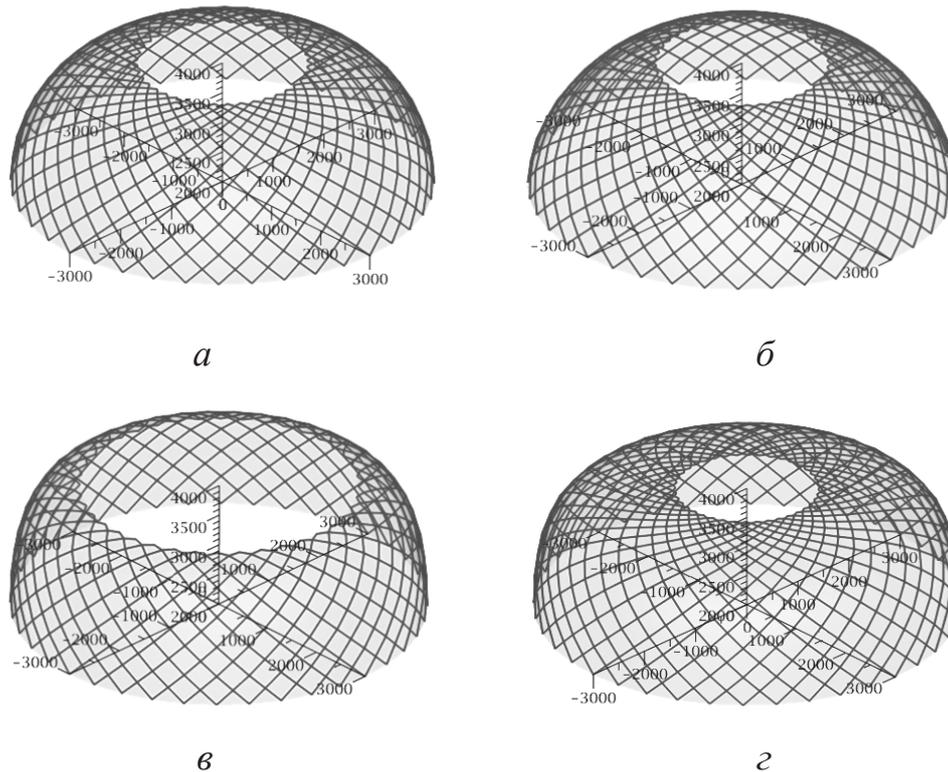


Рис. 5. Геометрія проєктних різновидів купола ЯК:  
а, б, в, г – варіанти 1, 2, 3, 4

з воєнними діями на її території. Унаслідок цього гинуть та отримують каліцтва не лише чоловіки, а й жінки та діти, руйнується інфраструктура міст і сіл. Окреслена критична ситуація сприяє зверненню великого числа людей, серед яких в Україні більшість є християнами, за допомогою до всевишніх сил. Тому актуальною постає проблема збереження існуючих та відновлення пошкоджених сакральних будівель, зведення нових після закінчення війни.

Сьогодні комп'ютерні інформаційні технології поширені в різноманітних сферах життєдіяльності людей. Проектування складної сучасної техніки зазвичай здійснюється в середовищі CAD/CAM/CAE/PLM-систем. Наведені факти визначають важливість розвитку вказаних засобів і вдосконалення методик їх конкретного практичного застосування, зокрема стосовно автоматизованого формоутворення. Основою геометричного моделювання зараз слугують параметричні криві, які доволі популярні під час опрацювання багатьох виробів, наприклад літаків, суден, автомобілів, а також унікальних архітектурних об'єктів, будівель, інженерних споруд і т. д.

На підставі окреслених вище відомостей запропонований у даній публікації підхід до практичного використання кривих ліній із натуральною параметризацією проілюстровано на варіантному комп'ютерному геометричному моделюванні куполів православних християнських храмів. Подані відомості спираються на попередні виконані авторами належні дослідження. Основними отриманими результатами можна вважати розроблену методику одержання потрібних математичних обчислювальних процедур та алгоритмів для апроксимації з необхідною точністю натуральної параметризації кривих ліній. Це дає змогу більш досконало здійснювати автоматизоване проектування технічних об'єктів, що підтверджено проаналізованими прикладами. У статті визначено перспективи проведення подальших наукових розвідок із розглянутої тематики.

### Список використаної літератури

1. Farin G. *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*. San Francisco: Academic Press, 2002. 499 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-1-55860-737-8.X5000-5>
2. Gil J. On the arc length parametrization problem. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2006. Vol. 31. № 3. P. 401–419.
3. Sanchez-Reyes J., Fernandez-Jambrina L. Curves with rational chord-length parametrization. *Computer Aided Geometric Design*. 2008. Vol. 25. № 4–5. P. 205–213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.11.003>
4. Терешук М.О. Структурно-параметричні геометричні моделі поверхонь куполів православних храмів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2022. Вип. 5.1. С. 95–100. DOI: <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-12>
5. Вірченко Г.А., Терешук М.О. Деякі аспекти застосування геометричних моделей для проектування куполів православних храмів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2024. Вип. 106. С. 57–66. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106.57-66>
6. Терешук М.О. Деякі аспекти застосування геометричного моделювання для збереження та відновлення архітектурної спадщини України. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2024. Вип. 107. С. 162–171. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2024.107.162-171>
7. Вірченко Г.А., Плоский В.О., Терешук М.О. До питання проектування та відновлення культових архітектурних об'єктів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2025. Вип. 108. С. 43–52. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2025.108.43-52>

### References

1. Farin, G. (2002). *Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide*. San Francisco: Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-1-55860-737-8.X5000-5> [in English].
2. Gil, J. (2006). On the arc length parametrization problem. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31(3), 401–419 [in English].
3. Sanchez-Reyes, J., & Fernandez-Jambrina, L. (2008). Curves with rational chord-length parametrization. *Computer Aided Geometric Design*, 25(4–5), 205–213. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.11.003> [in English].
4. Tereshchuk, M.O. (2022). Strukturno-parametrychni heometrychni modeli poverkhon kupoliv pravoslavnykh khramiv [Structural-parametric geometric models of domes surfaces of Orthodox temples]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*, 5.1, 95–100. <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-12> [in Ukrainian].
5. Virchenko, G.A., & Tereshchuk, M.O. (2024). Deiaki aspekty zastosuvannya heometrychnykh modelei dlia proiektuvannya kupoliv pravoslavnykh khramiv [Some aspects of the application of geometric models for designing of domes of Orthodox temples]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 106, 57–66. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106.57-66> [in Ukrainian].
6. Tereshchuk, M.O. (2024). Deiaki aspekty zastosuvannya heometrychnoho modeliuвання dlia zberezhennta ta vidnovlennia arkhitekturnoi spadshchyny Ukrainy [Some aspects of application of geometric modelling for preservation and restoration of architectural heritage of Ukraine]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 107, 162–171. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2024.107.162-171> [in Ukrainian].
7. Virchenko, G.A., Ploskyi, V.O., & Tereshchuk, M.O. (2025). Do pytannia proiektuvannya ta vidnovlennia kultovykh arkhitekturnykh obiektiv [On the issue of design and restoration of cultural architectural objects]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 108, 43–52. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2025.108.43-52> [in Ukrainian].

Вірченко Геннадій Анатолійович – д.т.н., професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп’ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: kpivir@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9586-4538.

Терещук Микола Олександрович – к.т.н., докторант кафедри архітектурних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури. E-mail: nikolatereschuk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4444-3677.

Virchenko Gennadii Anatoliyovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Descriptive Geometry, Engineering and Computer Graphics of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute». E-mail: kpivir@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9586-4538.

Tereschuk Mykola Oleksandrovych – Ph.D in Technical Sciences, Doctoral Student of the Department of Architectural Structures of the Kyiv National University of Construction and Architecture. E-mail: nikolatereschuk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4444-3677.



Отримано: 28.10.2025  
Рекомендовано: 02.12.2025  
Опубліковано: 30.12.2025