УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
О.В. БІЛОВА
Український державний університет науки і технологій
І.В. ЩЕРБИНА, О.Д. ОНОПРІЄНКО
Дніпровський державний аграрно-економічний університет

АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ОТВОРАМИ

Вивчення напружено-деформованого стану пластин, що містять отвори різної форми, залишається фундаментальною та практично значущою проблемою у сучасній механіці твердого тіла. Отвори та вирізи незамінні в реальних інженерних конструкціях для зменшення ваги, складання або обслуговування. Однак вони неминуче порушують однорідне поле напружень, створюючи зони концентрації напружень, які часто служать відправними точками тріщин та втомного руйнування. Розуміння та прогнозування цих ефектів має велике значення для підвищення надійності, довговічності та ефективності сучасних конструкцій в аерокосмічній, машинобудівній, цивільній та енергетичній галузях.

Нещодавній прогрес у цій галузі був зумовлений комбінованим застосуванням аналітичних методів та числових методів, зокрема методу скінченних елементів. Дослідники досягли значних результатів у моделюванні впливу форми отвору, орієнтації та граничних умов на загальний розподіл напружень. Особливу увагу приділено анізотропним матеріалам, які все частіше використовуються в композитних та шаруватих конструкціях завдяки їх високому співвідношенню міцності до ваги.

Анізотропія пружного середовища зазвичай створює значні додаткові труднощі під час розв'язання крайових задач. У разі прямолінійної анізотропії доводиться мати справу з парою зв'язаних аналітичних функцій, що залежать від різних комплексних змінних. Для середовищ із криволінійною анізотропією пряме застосування класичних методів, заснованих на теорії комплексних функцій, стає неможливим. Ці труднощі можна подолати лише в певних особливих випадках, таких як мала анізотропія або специфічні закони, що регулюють зміну пружних властивостей, тоді як відповідна ізотропна задача зазвичай уважається найпростішим еталоном.

У цьому контексті ця робота пропонує точні розв'язки замкнутої форми для двох задач, що стосуються напружено-деформованого стану ортотропної пластини з циліндричною анізотропією. Результати сприяють глибшому розумінню механічної поведінки анізотропних пластин з отворами і можуть служити опорними моделями для перевірки чисельного моделювання та оптимізації інженерних конструкцій.

Ключові слова: *асимптотичний метод, малий параметр, пружний стрижень, напружено-деформований стан ортотропної пластини з циліндричною анізотропією, пластина з отвором.*

T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA
Dnipro University of Technology
O.V. BILOVA
Ukrainian State University of Science and Technology
I.V. SHCHERBYNA, O.D. ONOPRIIENKO
Dnipro State Agrarian and Economic University

PRECISION OF ACTIV TASKS FOR A PLATE WHITH OPENING

The study of the stress–strain state of plates containing holes of various shapes remains a fundamental and practically significant problem in modern solid mechanics. Holes and cutouts are indispensable in real engineering structures for weight reduction, assembly, or maintenance purposes. However, they inevitably disturb the uniform stress field, producing zones of stress concentration that often serve as the starting points of cracks and fatigue failure. Understanding and predicting these effects is essential for improving the reliability, durability, and efficiency of modern structures in aerospace, mechanical, civil, and energy engineering.

Recent progress in this field has been driven by the combined application of analytical methods and numerical techniques, particularly the finite element method. Researchers have achieved significant results in modeling the influence of hole shape, orientation, and boundary conditions on the overall stress distribution. A special focus has been placed on anisotropic materials, which are increasingly used in composite and layered structures due to their high strength-to-weight ratio. Anisotropy of the elastic medium usually introduces considerable additional difficulties in solving boundary-value problems. In the case of rectilinear anisotropy, one must deal with a pair of cou-

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-2-12 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

pled analytic functions depending on different complex variables. For media with curvilinear anisotropy, the direct application of classical methods based on complex function theory becomes impossible. These difficulties can be overcome only in certain special cases, such as small anisotropy or specific laws governing the variation of elastic properties, while the corresponding isotropic problem is generally considered the simplest benchmark. In this context, the present work provides exact closed-form solutions for two problems concerning the stress–strain state of an orthotropic plate with cylindrical anisotropy. The results contribute to a deeper understanding of the mechanical behavior of anisotropic plates with holes and can serve as reference models for verifying numerical simulations and optimizing engineering designs.

Key words: *asymptotic method, small parameter, elastic rod, stress–strain state of an orthotropic plate with cylindrical anisotropy, plate whith opening.*

Постановка проблеми

Анізотропія пружного середовища зазвичай призводить до істотних додаткових труднощів під час розв'язання крайових задач, оскільки розподіл напружень та деформацій у матеріалах із напрямною залежністю властивостей значно ускладнюється. У разі прямолінійної анізотропії доводиться розглядати пару зв'язаних аналітичних функцій, що залежать від різних комплексних змінних [1].

Для середовищ із криволінійною або змінною анізотропією безпосереднє застосування методів теорії аналітичних функцій виявляється неможливим. Ці труднощі частково подолано завдяки розвитку комбінованих аналітично-чисельних підходів, що поєднують класичну теорію з методом скінченних елементів або методами комплексних потенціалів у модифікованій формі [2–4].

Значний внесок у цей напрям зробили дослідження авторів [2], які запропонували повне поле аналітичного розв'язку для нескінченної анізотропної пластини з отвором, форма якого відхиляється від еліпса. Отримані ними результати показали, що навіть незначна зміна геометрії отвору може суттєво впливати на розподіл локальних напружень.

Оглядові праці авторів [3] узагальнили сучасні аналітичні рішення для ортотропних тіл із вирізами, підкреслюючи важливість побудови закритих формул для оцінки коефіцієнтів концентрації напружень.

Тривимірні ефекти, що стають суттєвими у товстих ортотропних пластинах із різко вигнутими вирізами, досліджено в роботі А. Понтефіссо та ін. (2023), де представлено точні 3D-поля напружень за дії внутрішнього зсуву [4].

Поряд з аналітичними підходами активно розвиваються числові методи. Наприклад, Д. Піркл та П.К. Маллік (2025) проаналізували вплив зміщення квадратного отвору в композитній пластині на концентрацію напружень методом скінченних елементів [5]. Такі результати підтверджують складність задач навіть для квазіізотропних матеріалів, де прояв анізотропії залишається суттєвим.

Особливої уваги заслуговують сучасні методики, що поєднують ефективність аналітичних розв'язків із практичністю інженерних розрахунків. Зокрема, розроблено методику закритих формул для композитних пластин із вирізами та неоднорідною орієнтацією шарів, яка в [6] була вдосконалена для армованих панелей із нерівномірним шаруванням.

Таким чином, незважаючи на істотний прогрес у галузі, проблема побудови точних аналітичних розв'язків замкненої форми для ортотропних пластин із циліндричною анізотропією та складною геометрією отворів залишається актуальною. Такі рішення необхідні як для глибшого розуміння механічної поведінки анізотропних матеріалів, так і для перевірки чисельних моделей, застосовуваних у практичних розрахунках.

Мета дослідження

Метою дослідження є знаходження аналітичних розв'язків задач для пластини з отворами різної форми. За допомогою розробленого авторами метода збурень розв'язано й отримані розв'язки у замкнутій формі трьох задач про напружено-деформований стан ортотропної пластини з циліндричною анізотропією та отворами трьох типів: круговим, еліптичним та гіпотрохоїдним.

Виклад основного матеріалу дослідження

Постановка задачі. Пластина з круговим отвором. Пластина ослаблена круговим отвором радіуса R з вільною границею або з жорстким підкріпленням і піддається осьовому розтягуванню на нескінченності зусиллями інтенсивності p_1 и p_2. Рівняння рівноваги в полярних координатах задовольняються, якщо запровадити функцію напружень $F(r,\theta)$:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\ ;\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\ ;\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{F}{r}\right).$$

Диференціальне рівняння, якому задовольняє функція напружень, для пластини з циліндричною ортотропією записується у вигляді [7–9]:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} - 4\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + 5\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial F}{\partial \xi} + a\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 2a\frac{\partial^3 F}{\partial \xi \partial \eta^2} + q\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} -$$

$$-q\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2q\frac{\partial F}{\partial \xi} + a\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2q\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0\ ,\ \ a = q\varepsilon^{-1}\left(1 - \nu_{1_1}^2 q - 2\nu_1 \varepsilon\right);$$

$$\sigma_{11} = e^{-2\xi}\frac{\partial F}{\partial \xi} + e^{-2\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\ ,\ \sigma_{22} = e^{-2\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + e^{-2\xi}\frac{\partial F}{\partial \xi}\ ,$$

$$\tau = -\left(e^{-2\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + e^{-2\xi}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right),\ \left(\sigma_{11} = \sigma_r\ , \sigma_{22} = \sigma_\theta\ , \tau_{r\theta} = \tau\right)\ , \tag{1}$$

де $q = \dfrac{E_\theta}{E_r}$, $\varepsilon = \dfrac{G_{r\theta}}{E_r/\left(1-\nu_1\nu_2\right)}$, $\nu_1 = \nu_r$, $\nu_2 = \nu_1 q$, $r = R \cdot e^{\xi}$,

У суцільній пластині без отвору:

$$\sigma_{11}^0 = \frac{p_1+p_2}{2} + \frac{p_1-p_2}{2}\cos 2\eta\ ;\ \sigma_{22}^0 = \frac{p_1+p_2}{2} - \frac{p_1-p_2}{2}\cos 2\eta\ ;$$

$$\tau^0 = -\frac{p_1-p_2}{2}\sin 2\eta\ . \tag{2}$$

Утворення отвору в пластині рівносильно прикладанню до точок уявного контуру напружень $\sigma_{11} = -\sigma_{11}^0$, $\tau = -\tau_0$. Дія нормальних та дотичних напружень веде до виникнення другого поля напружень. Повний розв'язок задачі з отвором складається із суми розв'язку (2) та вказаного другого поля напружень. Для визначення другого поля напружень необхідно розглянути задачу, коли контур отвору ($\xi = 0$) навантажений нормальними та дотичними напруженнями, на нескінченності напруження дорівнюють нулю, тобто крайові умови мають вигляд:

якщо $\xi = 0$ $\sigma_{11} = -\dfrac{p_1+p_2}{2} - \dfrac{p_1-p_2}{2}\cos 2\eta$, $\tau = \dfrac{p_1-p_2}{2}\sin 2\eta$,

якщо $\xi \to \infty$ $\sigma_{11} \to 0$, $\tau \to 0$. (3)

Граничні умови (3) можуть бути розбити на дві частини:

1) $\sigma_{11}^{(1)} = -\dfrac{p_1+p_2}{2}$, $\tau = 0$ (частина, що не залежить від координати η),

2) $\sigma_{11}^{(2)} = -\dfrac{p_1-p_2}{2}\cos 2\eta$, $\tau = \dfrac{p_1-p_2}{2}\sin 2\eta$ (залежить від координати η).

Повний розв'язок поставленої задачі є суперпозицією розв'язків для першої та другої частин граничних умов і має вигляд:

$$\sigma_{11} = \frac{p_1+p_2}{2}\left(1 - e^{-\left(1+\sqrt{q}\right)\xi}\right) + \frac{p_1-p_2}{2}\left[1 - \frac{\left(3+\sqrt{t_1}\right)\left(1+\sqrt{t_2}\right)}{2\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_1}\right)\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(3+\sqrt{t_2}\right)\left(1+\sqrt{t_1}\right)}{2\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_2}\right)\xi}\right]\cos 2\eta\ ; \tag{4}$$

$$\sigma_{22}=\frac{p_1+p_2}{2}\left(1+\sqrt{q}e^{-\left(1+\sqrt{q}\right)\xi}\right)-\frac{p_1-p_2}{2}\left[1+\frac{\sqrt{t_1}\left(1-\sqrt{t_1}\right)\left(1+\sqrt{t_2}\right)}{2\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_1}\right)\xi}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{t_2}\left(\sqrt{t_2}-1\right)\left(1+\sqrt{t_1}\right)}{2\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_2}\right)\xi}\right]\cos 2\eta\,;$$

$$\tau=-\frac{p_1-p_2}{2}\left[1+\frac{\sqrt{t_1}\left(1+\sqrt{t_2}\right)}{\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_1}\right)\xi}-\frac{\sqrt{t_2}\left(1+\sqrt{t_1}\right)}{\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_2}\right)\xi}\right]\sin 2\eta\,,$$

де $t_1=(1+2a)-\sqrt{(1+2a)^2-9}$, $t_2=(1+2a)+\sqrt{(1+2a)^2-9}$.

У випадку ізотропної пластини ($q=1$, $\varepsilon=\frac{1-\nu}{2}$, $a=2$, $t_1=1$, $t_2=9$) розв'язок (4) переходить у відомий розв'язок аналогічної задачі.

Розглянемо випадок, коли контур отвору в пластині підкріплений жорстким кільцем. У суцільній пластині крім співвідношень (2) ще виконуються співвідношення:

$$U_1^0=\frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2}+\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta\right],$$

$$U_2^0=\frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta+\frac{p_1-p_2}{2}\,\frac{1+q^{-1}+2\nu_1}{2}\sin 2\eta\right] \tag{5}$$

У (5) відкинуті функції, що з'являються за інтегрування.

У пластині з жорстким кільцем на контурі отвору R ($\xi=0$) відсутні зсуви U_1 та U_2 тобто утворення отвору, підкріпленого жорстким кільцем у пластині, рівносильно наявності у точок уявного контуру переміщень $U_1=-U_1^0$ та $U_2=-U_2^0$. Присутність U_1 та U_2 призводить до появи іншого поля зміщень. Повний розв'язок задачі з отвором складається із суми розв'язку (5) та вказаного нового поля зміщень. Для визначення другого поля зміщень необхідно розглянути задачу, коли на контурі отвору ($\xi=0$) задані переміщення U_1 та U_2 на нескінченності зміщення дорівнюють нулю, тобто крайові умови мають вигляд:

якщо $\xi=0$ $\quad U_1=-\frac{R}{E_1}\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2}-\frac{R}{E_1}\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta$,

$$U_2=-\frac{R}{E_1}\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta+\frac{R}{E_1}\frac{(p_1-p_2)\left(1+q^{-1}+2\nu_1\right)}{4}\sin 2\eta\,, \tag{6}$$

якщо $\xi\to\infty$ $\quad U_1\to 0$, $U_2\to 0$.

Крайові умови (6) можуть бути розбиті на дві частини:

1) $U_1=-\frac{R}{E_1}\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2}$, $U_2=-\frac{R}{E_1}\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta$;

2) $U_1=-\frac{R}{E_1}\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta$, $U_2=\frac{R}{E_1}\frac{(p_1-p_2)\left(1+q^{-1}+2\nu_1\right)}{4}\sin 2\eta$.

Повний розв'язок поставленої задачі має вигляд:

$$U_1=\frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2}+\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta\right]+$$

$$+\frac{Rq^{-1}\left(m\varepsilon+\varepsilon+\nu_1 q\right)}{E_1}\,\frac{p_1+p_2}{2}e^{-\sqrt{q}\xi}-$$

$$-\frac{Rq^{-1}\left(m\varepsilon+\varepsilon+q\right)}{E_1}\,\frac{p_1+p_2}{2}e^{-\xi}+\frac{1}{E_1}\left[\frac{4-\left(1-\sqrt{t_1}\right)\left(1-2\nu_1+\nu_1\sqrt{t_1}\right)}{\sqrt{t_1}}C_1e^{-\sqrt{t_1}\xi}+\right.$$

$$\left. +\frac{4-\left(1-\sqrt{t_2}\right)\left(1-2\nu_1+\nu_1\sqrt{t_2}\right)}{\sqrt{t_2}} C_3 e^{-\sqrt{t_2}\xi} \right] \cos 2\eta ;$$

$$U_2 = \frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{\left(q^{-1}-1\right)\left(p_1+p_2\right)}{2}\eta - \frac{p_1-p_2}{2}\frac{1+q^{-1}+2\nu_1}{2}\sin 2\eta\right] -$$

$$-\frac{R\left(q^{-1}-1\right)}{E_1}\frac{\left(p_1+p_2\right)}{2}e^{-\xi}\eta + \frac{1}{E}\left[\frac{4\left(\nu_1\sqrt{t_2}-1\right)-\left(1-\sqrt{t_2}\right)\left(q^{-1}t_2-1+2\nu_1\right)}{2\sqrt{t_2}} C_3 e^{-\sqrt{t_2}\xi} -\right.$$

$$\left. -\frac{4\left(1-\nu_1\sqrt{t_1}\right)+\left(1-\sqrt{t_1}\right)\left(q^{-1}t_1-1+2\nu_1\right)}{2\sqrt{t_1}} C_1 e^{-\sqrt{t_1}\xi}\right]\sin 2\eta ;$$

$$\sigma_{11} = E_*\left(e_{11}+\nu_1 q e_{22}\right);\ \sigma_{22} = E_* q\left(e_{22}+\nu_1 e_{11}\right);\ \tau = G e_{12};$$

$$e_{11} = \frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi}\right);\ e_{22} = \frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \eta}+U_1\right);\ e_{12} = \frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \xi}+\frac{\partial U_1}{\partial \eta}-U_2\right)$$

Проведені порівняння результатів із відомими точними розв'язками, зокрема для ізотропного матеріалу.

Задачі для пластин з еліптичними та гіпотрохоїдними отворами

За допомогою метода збурень [1; 8–10] отримано аналітичні розв'язки в замкненій формі ще двох задач про напружено-деформований стан ортотропної пластини з циліндричною анізотропією. У першому випадку пластина послаблена еліптичним отвором із вільною границею, у другому – пластина послаблена гіпотрохоїдним отвором. В обох випадках пластина піддається осьовому розтягуванню на нескінченності зусиллями інтенсивності p_1 та p_2.

Розглянемо анізотропну пластину, послаблену еліптичним отвором. Функція $\omega(\zeta) = R\left(\zeta + c\zeta^{-1}\right)$. Тоді $x = R\left(e^{\xi}+ce^{-\xi}\right)\cos\eta$, $y = R\left(e^{\xi}-ce^{-\xi}\right)\sin\eta$, $H = R\left(e^{2\xi}-2c\cdot\cos 2\eta + c^2 e^{-2\xi}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Тут $R = \frac{1}{2}a\left(1+\frac{b}{a}\right)$, $c = \left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-1}$, a, b – піввісі еліптичного отвору.

У пластині без отвору

$$\sigma_{11}^{0} = \left(e^{4\xi}-2ce^{2\xi}\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(p_1+p_2\right)\left(e^{4\xi}+c^2\right) - c\left(p_1-p_2\right)e^{2\xi} + \right.$$

$$\left. +\left(\frac{1}{2}\left(p_1-p_2\right)\left(e^{4\xi}+c^2\right) - c\left(p_1+p_2\right)e^{2\xi}\right)\cos\eta\right],$$

$$\sigma_{22}^{0} = \left(e^{4\xi}-2ce^{2\xi}\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(p_1+p_2\right)\left(e^{4\xi}+c^2\right) + c\left(p_1-p_2\right)e^{2\xi} - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{2}\left(p_1-p_2\right)\left(e^{4\xi}+c^2\right) + c\left(p_1+p_2\right)e^{2\xi}\right)\cos\eta\right],$$

$$\sigma_{12}^{0} = -\frac{1}{2}\left(p_1-p_2\right)\left(e^{4\xi}-2ce^{2\xi}\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\cdot\left(e^{4\xi}-c^2\right)\sin 2\eta .$$

Квазіосісиметричний розв'язок має вигляд:

$$\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\frac{1}{2}\left(e^{4\xi}-2ce^{2\xi}\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left[p_1\left(1-c\right)^2 + p_2\left(1+c\right)^2\right]e^{2\xi},\ \sigma_{12} = 0 .$$

Розв'язок задачі з крайовими умовами

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{2}\left(1-2c\cdot\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left[p_1\left(1-c\right)^2 - p_2\left(1+c\right)^2\right]\cos 2\eta ,$$

$$\sigma_{12}=\frac{1}{2}\left(p_1-p_2\right)\left(1-2c\cdot\cos 2\eta+c^2\right)^{-1}\cdot\left(1-c\right)^2\sin 2\eta,\quad \left(\xi=0\right),$$

$$\sigma_{11}\to 0,\ \sigma_{12}\to 0,\ \left(\xi\to\infty\right)$$

відшукуються методом збурень [1; 8; 9]. При цьому передбачається, що

$$\frac{b}{a}=1-\chi\varepsilon\quad\left(\chi\sim 1\right),\ R=a\left(1-\frac{1}{2}\chi\varepsilon\right),\ c=x\varepsilon\left(2-x\varepsilon\right)^{-1}.$$

Тоді ряди, у які розкладаються шукані функції, згідно із запропонованим методом, набувають вигляду:

$$H=ae^{\xi}-\frac{1}{2}a\chi e^{\xi}\left(1+e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon+0\left[\left(\chi\varepsilon\right)^2\right],$$

$$f_1=1+\left(\chi e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon+0\left[\left(\chi\varepsilon\right)^2\right],\ f_2=\left(\chi e^{-2\xi}\sin 2\eta\right)\varepsilon+0\left[\left(\chi\varepsilon\right)^2\right],$$

$$f_3=\left(-2\chi e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon+0\left[\left(\chi\varepsilon\right)^2\right],\ f_4=\left(-2\chi e^{-2\xi}\sin 2\eta\right)\varepsilon+0\left[\left(\chi\varepsilon\right)^2\right];$$

$$\psi_1\left(\eta\right)=-\frac{1}{2}\left(p_1-p_2\right)\cos 2\eta+\frac{1}{2}\chi\left[\left(p_1+p_2\right)\cos 2\eta-\left(p_1-p_2\right)\cos^2 2\eta\right]\varepsilon+0\left[\left(\chi\varepsilon\right)^2\right],$$

$$\psi_2\left(\eta\right)=\frac{1}{2}\left(p_1-p_2\right)\left(\sin 2\eta+\left(\chi\sin 2\eta\cos 2\eta\right)\varepsilon+0\left[\left(\chi\varepsilon\right)^2\right]\right),\ \eta_1=\eta_2=2\eta.$$

Наведемо остаточну формулу для визначення напружень σ_{22}, що діють на площадках, нормальних до контуру еліптичного отвору $(\xi=0)$, що являють собою найбільший інтерес. Напруження σ_{11}, σ_{12} на контурі дорівнюють нулю.

$$\sigma_{22}=\frac{1}{2}\left(1-2c\cdot\cos 2\eta+c^2\right)^{-1}\left(2\left(1+c^2\right)\left(p_1+p_2\right)-\left[p_1\left(1+c\right)^2-\right.\right. \tag{7}$$

$$\left.\left.-p_2\left(1-c\right)^2\right]\cos 2\eta\right)-\frac{1}{2}\left(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\left(p_1-p_2\right)\cos 2\eta-\varepsilon\left\{\frac{1}{2}\left(p_1-p_2\right)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cos 2\eta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\chi\left[\left(p_1+p_2\right)\cos 2\eta-\frac{1}{4}\left(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\left(p_1-p_2\right)\left(1+2\cos 4\eta\right)\right]\right\}+0\left(\varepsilon^2\right),\ \sigma_{11}=\sigma_{12}=0.$$

Якщо $c=0$ $(\chi=0)$, то (7) переходить у розв’язок відповідної задачі для пластини з круговим отвором.

Порівняння $(\sigma_{22})_{\max}$, що знайдено за формулою (7) для ізотропної пластини з урахуванням перших двох наближень, із точним розв’язком [10] показує, що, наприклад, за $\frac{b}{a}=0{,}65$ похибка для різних випадків навантаження не перевищує 5–10%.

Розглянемо анізотропну пластину, що послаблена гіпотрохоїдним отвором. Тут

$$\omega(\zeta)=R\left(\zeta+ck^{-1}\zeta^{-k}\right)\qquad\left(0<c<1\right),$$

$$x=R\left(e^{\xi}\cos\eta+ck^{-1}e^{-k\xi}\cos k\eta\right),$$

$$y=R\left(e^{\xi}\sin\eta-ck^{-1}e^{-k\xi}\sin k\eta\right),$$

$$H=R\left(e^{2\xi}-2ce^{-(k-1)\xi}\cos\left(k+1\right)\eta+c^2e^{-2k\xi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

За $k=1$ повертаємося до випадку еліпса, за цілих $k>1$ отримаємо криві, що являють собою правильні криволінійні багатокутники зі скругленими кутами: трикутник за $k=2$, квадрат – за $k=3$ і т. л.

На контурі отвору

$$\sigma_{22}=\frac{1}{2}\left(1-2c\cdot\cos\left(k+1\right)\eta+c^2\right)^{-1}\left(2\left(1+c^2\right)\left(p_1+p_2\right)-\left(p_1-p_2\right)\cos 2\eta+\right.$$

$$+2c(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta-2c(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta-c^2(p_1-p_2)\cos 2k\eta\Big]- \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1-p_2)\cos 2\eta-\varepsilon\left\{\frac{1}{2}(p_1-p_2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cos 2\eta+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\chi\left[\left(2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}-1\right)(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta-2(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta+\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1-p_2)\cos(k+3)\eta\right]\right\}+0\left(\varepsilon^2\right), \quad (k=2,3,...).$$

Під час розв’язання задачі запропонованим методом передбачалося, що $c=\chi\varepsilon\ (\chi\sim 1)$.

Для ізотропної пластинки є можливість провести порівняння отриманого розв’язку з точним. Похибка під час обчислення $(\sigma_{22})_{\max}$ (зокрема, за $k=3$, $c=\frac{1}{3}$) за формулою (8) з урахуванням перших двох наближень не перебільшує 5–10% за різних видів навантаження.

Висновки

Запропонований метод може бути з успіхом застосований у дослідженні крайових задач теорії пружності для ізотропних та анізотропних пластин.

Список використаної літератури

1. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Математичне моделювання в задачах геометрично нелінійної теорії пружності. *Прикладні питання математичного моделювання.* 2021. Т. 4, № 1. С. 103–110. https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11
2. Hsieh S.-H., Hwu C. A full field solution for an anisotropic elastic plate with a hole perturbed from an ellipse. *European Journal of Mechanics – A/Solids.* 2023. Vol. 98. P. 104–118. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104886
3. Pontefisso A., Pastrello M., Zappalorto M. Recent Advances in the Analytical Stress Field Solutions for Radiused Notches in Orthotropic Solids. *Materials.* 2023. Vol. 16, no. 11. https://doi.org/10.3390/ma16113915
4. Pontefisso A., Pastrello M., Zappalorto M. Three-Dimensional Stress Fields in Thick Orthotropic Plates with Sharply Curved Notches under In-Plane and Out-of-Plane Shear. *Polymers.* 2023. Vol. 15, no. 9. https://doi.org/10.3390/polym15092013
5. Pirkle D., Mallick P.K. A Numerical Study of the Effect of Hole Offset on Stress Concentrations Due to a Square Hole in a Quasi-Isotropic Composite Laminate. *Journal of Composites Science.* 2025. Vol. 9, no. 6. https://doi.org/10.3390/jcs9060286
6. Blázquez A., Pastorino D., López-Romano B., París F. Closed-form methodology for the structural analysis of stiffened composite plates with cutouts and non-uniform lay-up / *Composite Structures.* 2024. Vol. 343. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2024.118284
7. Shporta A.G., Kagadiy T.S., Govorukha V.B., Onopriienko O.D., Zhao Shuo. Analysis of numeric results for analogue of galin's problem in curvilinear coordinates. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu.* 2023. Vol. 1. P. 142–148. https://doi.org/10.33271/nvngu/2023-1/142
8. Kagadiy T.S., Shporta A.G. Mathematical modeling in the calculation of reinforcing elements. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu.* 2019. Vol. 5, no. 10. https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/10
9. Kagadiy T.S., Scherbina I.V. Current aspects of the development of physical and mathematical sciences in the era of digitalization. In*novative Solutions in Physical and Mathematical Sciences.* 2022. https://doi.org/10.30525/978-9934-26-271-3-5

References

1. Kagadiy, T.S., Shporta, A.G., Bilova, O.V., & Scherbina, I.V. (2021). Matematychne modeliuvannia v zadachakh heometrychno neliniinoi teorii pruzhnosti [Mathematical modeling in problems of geometrically nonlinear elasticity theory]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*, 4 (1), 103–110. https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11 [in Ukrainian].
2. Hsieh, S.-H., & Hwu, C. (2023). A full field solution for an anisotropic elastic plate with a hole perturbed from an ellipse. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 98, 104–118. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104886 [in English].
3. Pontefisso, A., Pastrello, C., & Zappalorto, M. (2023). Recent advances in the analytical stress field solutions for radiused notches in orthotropic solids. *Materials*, 16 (11). https://doi.org/10.3390/ma16113915 [in English].
4. Pontefisso, A., Pastrello, C., & Zappalorto, M. (2023). Three-Dimensional stress fields in thick orthotropic plates with sharply curved notches under in-plane and out-of-plane shear. *Polymers,* 15 (9). https://doi.org/10.3390/polym15092013 [in English].
5. Pirkle, D., & Mallick, P.K. (2025). A numerical study of the effect of hole offset on stress concentrations due to a square hole in a quasi-isotropic composite laminate. *Journal of Composites Science*, 9 (6). https://doi.org/10.3390/jcs9060286 [in English].
6. Blázquez, A., Pastorino, D., López-Romano, B., & París, F. (2024). Closed-form methodology for the structural analysis of stiffened composite plates with cutouts and non-uniform lay-up. *Composite Structures*, 343. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2024.118284 [in English].
7. Shporta, A.H., Kagadii, T.S., Govorukha, V.B., Onopriienko, O.D., & Zhao, S. (2023). Analysis of numeric results for analogue of galin's problem in curvilinear coordinates. Naukovyi *Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 1, 142–148. https://doi.org/10.33271/nvngu/2023-1/142 [in English].
8. Kagadiy, T.S., & Shporta, A.G. (2019). Mathematical modeling in the calculation of reinforcing elements. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 5 (10). https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/10 [in English].
9. Kagadiy, T.S., & Scherbina, I.V. (2022). Current aspects of the development of physical and mathematical sciences in the era of digitalization. *Innovative solutions in physical and mathematical sciences.* https://doi.org/10.30525/978-9934-26-271-5-3 [in English]

Кагадій Тетяна Станіславівна – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Шпорта Анна Григорівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358.

Білова Оксана Вікторівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри економічної кібернетики Українського державного університету науки і технологій. E-mail: okbelova00@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Щербина Ірина Володимирівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри віщої математики, фізики та загально інженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Онопрієнко Олег Дмитрович – доктор філософії з галузі «Математика та статистика», доцент, доцент кафедри віщої математики, фізики та загальноінженерних дисциплін Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: onopriienko.oleg@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3127-4616.

Kagadiy Tetyana Stanislavivna – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor at the Department of Applied Mathematics of the Dnipro University of Technology. E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Shporta Anna Hryhorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Applied Mathematics of the Dnipro University of Technology. E-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358.

Bilova Oksana Viktorivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Economic Cybernetics of the Ukrainian State University of Science and Technology. E-mail: okbelova00@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Shcherbyna Iryna Volodymyrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher mathematics, Physics and General engineering disciplines, Dnipro State Agrarian and Economic University. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Onopriienko Oleg Dmytrovych – PhD, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher mathematics, Physics and General engineering disciplines of the Dnipro State Agrarian and Economic University. E-mail: onopriienko.oleg@gmail.com, ORCID: 0000-0002 -3127-4616.

Отримано: 28.10.2025
Рекомендовано: 04.12.2025
Опубліковано: 30.12.2025