

Д.В. КРЮТЧЕНКО, А.С. КОЛОДЯЖНИЙ

Інститут енергетичних машин та систем імені А.М. Підгорного НАН України

М.С. МІЩЕНКО

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут енергетичних машин та систем імені А.М. Підгорного НАН України;

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна;

Харківський національний університет радіоелектроніки

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРІ ЗАЛЕЖНО ВІД ПОЛОЖЕННЯ ПЕРЕГОРОДКИ

Метою дослідження є розроблення ефективного числового методу оцінки впливу перегородок, які демпфують коливання рідини в жорстких оболонках обертання під дією інтенсивних вертикальних і горизонтальних навантажень. Передбачається, що рідина, яка заповнює оболонку, є ідеальною, нестисливою та має безвихровий характер руху. За таких припущень її динаміка описується потенціалом швидкостей, який задовольняє рівняння Лапласа. Оболонка піддається дії зовнішнього гармонічного навантаження, частота якого може наближатися до власних частот коливань рідини, що призводить до виникнення резонансу і, відповідно, до необмеженого зростання амплітуди коливань вільної поверхні. Для запобігання цьому явищу в конструкцію вводяться горизонтальні перегородки, що зменшують інтенсивність плескання та забезпечують ефективне демпфування енергії хвиль. Установлення перегородок змінює спектр власних частот коливань рідини, що дає змогу здійснювати відстроювання від небажаних резонансних режимів. Це створює можливість оптимізації параметрів резервуарів і баків, що використовуються в аерокосмічній, енергетичній та транспортній техніці. Для числового аналізу застосовано метод підобластей, або метод граничних суперелементів, який передбачає поділ розрахункової області на декілька підобластей із власними граничними умовами. У кожній підобласті потенціал швидкостей задовольняє рівняння Лапласа, при цьому на жорстких межах області встановлюються умови непротікання, а на вільній поверхні реалізуються кінематична та динамічна умови. На межах поділу підобластей вводяться умови сумісності для потенціалу та його нормальної похідної. Для визначення невідомих потенціалів використано третю формулу Гріна, що дало змогу звести початкову крайову задачу до системи сингулярних інтегральних рівнянь, розв'язання яких здійснено методом граничних елементів. Отримані числові результати свідчать, що коливання рідини в резервуарі можна ефективно контролювати шляхом раціонального вибору кількості, форми та розташування перегородок. Демонстровано, що оптимальне конструювання демпфувальних елементів дає змогу істотно зменшити амплітуду коливань навіть у разі дії високочастотних навантажень, підвищуючи стійкість і надійність конструкції, що містять рідину.

Ключові слова: методи граничних елементів та суперелементів, плескання рідини, горизонтальні перегородки, демпфування.

D.V. KRIUTCHENKO, A.S. KOLODYAZHNYI

Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the Ukrainian Academy of Sciences

M.S. MISCHENKO

V.N. Karazin Kharkiv National University

O.O. STRELNIKOVA

Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the Ukrainian Academy of Sciences;

V.N. Karazin Kharkiv National University;

Kharkiv National University of Radio Electronics

SPECTRAL ANALYSIS OF LIQUID OSCILLATIONS IN A RESERVOIR DEPENDING ON THE PARTITION POSITION

The purpose of this study is to develop an effective numerical method for assessing the influence of baffles that damp liquid oscillations in rigid shells of revolution under the action of intensive vertical and horizontal loads. It is assumed that the liquid filling the shell is ideal, incompressible, and exhibits irrotational motion. Under these assumptions, its dynamics are described by the velocity potential, which satisfies Laplace's equation. The shell is subjected to external harmonic loading, the frequency of which may approach the natural frequencies of the liquid oscillations, leading to

resonance and, consequently, an unbounded increase in the amplitude of free-surface oscillations. To prevent this phenomenon, horizontal baffles are introduced into the structure to reduce sloshing intensity and provide effective damping of wave energy. The installation of baffles alters the spectrum of the liquid's natural frequencies, allowing the system to be tuned away from undesirable resonant modes. This makes it possible to optimize the parameters of tanks and reservoirs used in aerospace, energy, and transportation engineering. For numerical analysis, the subdomain method, also known as the boundary superelement method, is applied. The computational domain is divided into several subdomains, each with its own boundary conditions. Within each subdomain, the velocity potential satisfies Laplace's equation; at the rigid boundaries, non-penetration conditions are imposed, while on the free surface, both kinematic and dynamic conditions are applied. Compatibility conditions for the potential and its normal derivative are enforced at the interfaces between subdomains. To determine the unknown potentials, the third Green's formula is used, which makes it possible to reduce the original boundary-value problem to a system of singular integral equations, solved by the boundary element method. The numerical results demonstrate that the oscillations of the liquid inside the reservoir can be effectively controlled by a rational choice of the number, shape, and arrangement of the baffles. It is shown that optimal design of damping elements can significantly reduce the amplitude of oscillations even under high-frequency loading, thereby improving the stability and reliability of structures containing liquid.

Key words: boundary element and super-element method, liquid sloshing, horizontal baffles, damping.

Постановка проблеми

Зацікавленість у дослідженні методів гасіння коливань рідини в резервуарах і паливних баках, що піддаються дії змінних періодичних навантажень, виникла ще в минулому столітті та залишається актуальною й донині. Це пояснюється широким застосуванням оболонкових конструкцій із відсіками, що частково заповнені рідиною, у сучасному машинобудуванні, аерокосмічній галузі, хімічній та нафтогазовій промисловості. Неконтрольовані коливання рідини всередині таких конструкцій можуть спричинити значні деформації, що впливають на експлуатаційну надійність резервуарів. У випадку ракет-носіїв це може призводити до порушення розрахункової траєкторії польоту, а для резервуарів та сховищ – до їх руйнування або виток небезпечних речовин. Останнє, своєю чергою, створює ризики екологічних катастроф і загрожує безпеці експлуатації таких об'єктів. Саме тому розроблення методів гасіння коливань рідини, зокрема шляхом використання спеціальних конструктивних елементів, залишається важливим напрямом інженерних розробок і наукових досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дослідження динамічної поведінки рідини в оболонкових конструкціях є важливим напрямом сучасної науки, що має широке практичне застосування в аерокосмічній, енергетичній, хімічній та нафтогазовій промисловості. Вивчення стійкості рідини в рухомих резервуарах вимагає насамперед точного визначення власних частот і форм коливань рідини, оскільки форми коливань використовують як базисні функції під час вивчення вимушених коливань, дослідження нелінійних явищ. Цій темі присвячено значну кількість наукових публікацій, серед яких особливе місце займають ґрунтовні праці [1; 2]. Частоти і форми коливань як порожніх, так і заповнених резервуарів різної форми та призначення досліджено в роботах [3; 4]. Сьогодні розроблено ефективні методи комп'ютерного моделювання динамічних процесів в оболонкових конструкціях, що взаємодіють із рідиною, зокрема методи скінченних об'ємів [5], скінченних [6] і граничних [7] елементів, а також методи поглинання [8]. Для зниження рівня коливань рідини в резервуарах застосовують різні конструктивні рішення, серед яких відзначаємо встановлення плавучих мембранних кришок [9], горизонтальних [10] і вертикальних [11] перегородок, застосування інноваційних матеріалів [12]. Важливим аспектом проблеми є можливість налаштування системи на відстроювання від небажаних резонансних частот [13]. Це потребує детального аналізу всього частотного спектра власних коливань резервуара за різних рівнів заповнення паливом і навантаження, а також з урахуванням пружності стінок [14]. Особлива увага приділяється питанням гасіння коливань у резервуарах циліндричної та конічної форм, що розглянуто в роботі [15].

Мета дослідження

Мета дослідження – розроблення методики визначення впливу горизонтальних перегородок для демпфування плескань рідини в жорсткій оболонці обертання.

Виклад основного матеріалу дослідження

Розглядається жорстка оболонка обертання, частково заповнена ідеальною нестисливою рідиною. Рух рідини, індукований коливаннями оболонки внаслідок дії зовнішнього навантаження, уважається безвихровим. У цих умовах існує скалярний потенціал швидкостей рідини Φ такий, що $\mathbf{V} = \text{grad} \Phi$. Умова нестисливості приймає вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Нехай S_1 – змочена поверхня оболонки, S_0 – вільна поверхня рідини. Позначимо область, яку займає рідина як Ω . Цю область обмежує границя $S = S_0 S_1$. Припускаємо, що оболонкова конструкція може мати декілька внутрішніх перегородок досить довільної форми, які вставляються для гасіння коливань (рис. 1а). Їхні поверхні позначимо як S_{baf}^i , а поверхню дна оболонки – як S_{bot} . Припустимо, що декартова система координат $0xyz$ пов'язана з оболонкою, вільна поверхня рідини S_0 збігається з площиною xOy у стані спокою.

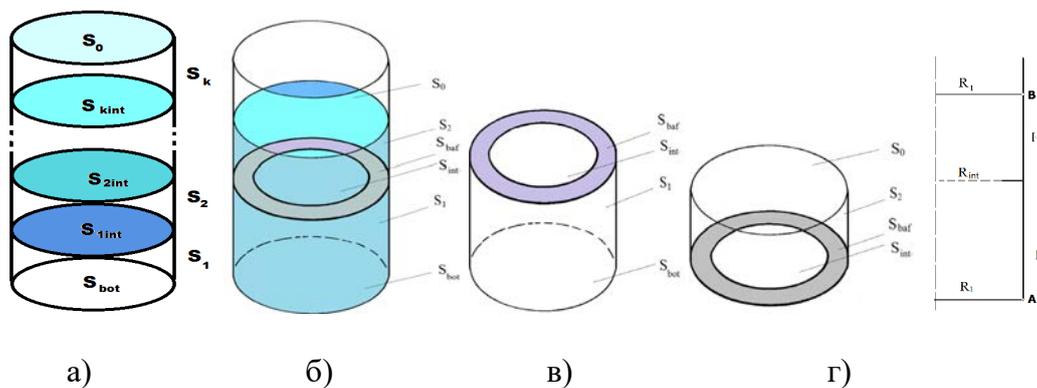


Рис. 1. Оболонка обертання з горизонтальними перегородками

Уважаємо, що резервуар із рідиною піддається динамічному впливу. Значення тиску p обчислюється згідно з інтегралом Бернуллі й дорівнює [15]

$$p - p_0 = -\rho_l \left(\frac{\partial}{\partial t} + gz + a_x(t)x + a_z(t)z \right), \quad (2)$$

де ρ_l – густина рідини, z – вертикальна координата точки, що розглядається, p_0 – атмосферний тиск, g – пришвидшення вільного падіння, $a_x(t), a_z(t)$ – компоненти пришвидшення сили, що збуджує.

Об'єм рідини за допомогою перегородок ділиться на декілька підобластей, (рис. 1в). Внутрішні з них мають як одну з границь поверхню інтерфейсу. На кожній із поверхонь інтерфейсу мають виконуватися умови спряження. На бічних поверхнях та на дніщі виконуються умови непротікання. На вільній поверхні виконуються кінематична та динамічна умови. Кінематична умова полягає у тому, що ті точки рідини, що знаходилися на вільній поверхні в початковий момент часу, залишаються на цій поверхні протягом усього наступного руху. Нехай функція $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ описує форму та положення вільної поверхні за часом. Математичне подання кінематичної умови в лінійному формулюванні має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi \Big|_{S_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3)$$

де \mathbf{n} – одинична зовнішня нормаль до поверхні.

Динамічна умова полягає у рівності тиску рідини на вільній поверхні S_0 атмосферному тиску. Згідно з рівнянням (2),

$$\frac{\partial}{\partial t} + gz + a_x(t)x + a_z(t)z = 0. \quad (4)$$

Окрім того, додаємо до умов (3)-(4) умови спряження на поверхнях інтерфейсу [10].

Для i -тої поверхні інтерфейсу ці умови мають вигляд

$$q_{i+1} = -q_i, \quad q = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}. \quad (5)$$

Як \mathbf{P} позначимо точки у межах області Ω . Для рівняння (1) сформульована така крайова задача:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \mathbf{P}, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \mathbf{P}S_1, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t}, p - p_0 = 0, \mathbf{P}S_0. \quad (3)$$

Тут невідома функція $\zeta = \zeta(t, x, y)$ описує положення вільної поверхні та її зміну з часом. Таким чином, необхідно визначити невідомі функції Φ та ζ , при цьому на вільній поверхні виконується співвідношення

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (4)$$

Невідомі функції ζ і Φ у циліндричних координатах (r, θ, z) зобразимо у вигляді рядів:

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^m \cos(l, \theta) \sum_{k=1}^n d_{kl}(t) \xi_{kl}(r), \quad (5)$$

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{l=0}^m \cos(l, \theta) \sum_{k=1}^{n_2} d_{kl}(t) \zeta_{kl}(r, z) \quad (6)$$

Тут $\zeta_{kl}(r, z)$, $\xi_{kl}(r)$ – базисні функції, між якими на вільній поверхні існує такий зв'язок [6]:

$$\frac{\zeta_{kl}(r, z)}{\mathbf{n}} \Big|_{z=H} = \xi_{kl}(r). \quad (7)$$

При цьому функції $\zeta_{kl} = \zeta_{kl}(r, z) \cos(l, \theta)$ мають задовольняти рівнянню Лапласа.

Припускаючи гармонічний характер зміни коефіцієнтів $d_{kl}(t)$ за часом, тобто $d_{kl}(t) = D_{kl} \exp(i_{kl}t)$, отримуємо із (7) співвідношення

$$\frac{\zeta_{kl}}{\mathbf{n}} = \frac{2}{g} \xi_{kl}, \quad (8)$$

яке приводить до спектральної крайової задачі відносно ζ_{kl} [6]. Після знаходження розв'язку спектральної задачі отримуємо базисні функції $\zeta_{kl}(r, z)$ та власні частоти i_{kl} .

Метод граничних інтегральних рівнянь для розв'язання спектральної проблеми

Для застосування методу граничних елементів використовуємо третю формулу Гріна [15]:

$$2\pi_{kl}(\mathbf{P}_0) = \iint_s \frac{\partial \zeta_{kl}}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS - \iint_s \zeta_{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS. \quad (9)$$

Тут $|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|$ – декартова відстань між точками \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 . Із використанням крайових умов спектральної задачі (3) отримуємо

$$2\pi_{kl} + \iint_{S_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} \right) dS_1 - \frac{2}{g} \iint_{S_0} \frac{\xi_{kl}}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS_0 + \iint_{S_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} \right) dS_0 = 0, \mathbf{P}_0 S_1, \quad (10)$$

$$2\pi_{kl} + \iint_{S_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} \right) dS_1 + \frac{2}{g} \iint_{S_0} \frac{\xi_{kl}}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS_0 = 0, \mathbf{P}_0 S_0.$$

Якщо досліджуються оболонки обертання, отримуємо одновимірну систему сингулярних інтегральних рівнянь [11]

$$2\pi\varphi_{kl}(r_0, z_0) + \int_{\Gamma} \varphi_{kl}(r(z), z)\Theta(z, z_0)r(z)d\Gamma - \frac{\omega_{kl}^2}{g} \int_0^R \varphi_{kl}(\rho, H)\Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0)\rho d\rho = 0,$$

$$\mathbf{P}_0 \in S_1, \tag{11}$$

$$2\pi\varphi_{kl}(r_0, H) + \int_{\Gamma} \varphi_{kl}(r(z), z)\Theta(z, z_0)r(z)d\Gamma - \frac{\omega_{kl}^2}{g} \int_0^R \varphi_{kl}(\rho, H)\Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0)\rho d\rho = 0,$$

$$\mathbf{P}_0 \in S_0.$$

$$\Theta(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_l(k) - F_l(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_l(k) n_z \right\},$$

$$\Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_l(k), \quad a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0$$

Узагальнені еліптичні інтеграли в (11) уведено так:

$$E_l(k) = (-1)^l (1 - 4l^2) \int_0^{\pi/2} \cos(2bl_s) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds, \tag{12}$$

$$F_l(k) = (-1)^l \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2bl_s) ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}}, \quad k^2 = 2b/(a+b). \tag{13}$$

Обчислення інтегралів (12) – (13) здійснено методом, запропонованим у [10], із використанням середнього арифметико-геометричного значення. Для числового розв’язання системи сингулярних рівнянь (11) застосовано метод граничних елементів зі сталою апроксимацією густини вздовж елемента [11].

Числові результати

Досліджено власні коливання рідини в циліндричній оболонці. Припускається, що у рівняннях (5)–(6) хвильові числа $l = 0, 1$, тобто розглядаються як аксіально-симетричні, так і не аксіально-симетричні форми коливань.

Розглянемо циліндричну оболонку з плоским дном, яка має такі параметри: радіус – $R = 1$ м, довжина – $L = 2$ м, оболонка частково заповнена рідиною з густиною $\rho_1 = 1000$ кг/м³. Рівень заповнення рідиною позначається через H . Перегородка розглядається у вигляді круглій плоскої пластини з центральним отвором (кільцева перегородка) (рис. 1б). Вертикальну координату положення перегородки (висоту перегородки) позначено як H_1 ($H_1 < H$). Радіус поверхні розділу позначено як R_2 (рис. 1г). Числове розв’язання проведено методом граничних елементів (МГЕ), як було описано раніше. У наведеному числовому моделюванні використано 60 граничних елементів уздовж днища, 120 елементів уздовж змочених ділянок циліндричної поверхні та 100 елементів уздовж радіуса вільної поверхні. На поверхнях розділу та перегородки застосовувано різну кількість елементів залежно від радіуса перегородки.

Досліджено форми та частоти коливань резервуара з перегородкою залежно від двох параметрів R_2 та H_1 . У числових розрахунках враховувалися різні значення як R_2 , так і H_1 . Спочатку було проведено тестові обчислення для частково заповненої жорсткої циліндричної оболонки без перегородки.

Обчислено власні частоти резервуара без перегородки при $H = 1.0$ м. У табл. 1 наведено числові значення власних частот коливань рідини для $l = 0$. Отримані за допомогою МГЕ числові результати порівнювалися з даними, отриманими у [15].

Таблиця 1

Порівняння аналітичних і числових результатів для оболонки без перегородок

Форма коливань		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
МГЕ		3.828	7.017	10.177	13.330	16.481
[15]		3.828	7.016	10.173	13.324	16.471

Також для підтвердження достовірності методу розраховано частоти та форми коливань рідини в резервуарі з горизонтальною перегородкою за $H_1=H_2=0.5\text{м}$, $R_2=0.7\text{м}$. Результати обчислень наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Порівняння аналітичних і числових результатів для оболонки з перегородок

		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$H_1=0.5$	МГЕ	3.756	7.012	10.176	13.328
	[15]	3.759	7.010	10.173	13.324
$H_1=0.9$	МГЕ	2.278	6.200	9.609	12.810
	[15]	2.286	6.197	9.608	12.808

Отримані результати продемонстрували хорошу узгодженість з даними роботи [15] і підтвердили ефективність запропонованого підходу. У всіх таблицях порівнювалися значення частотного параметру $\frac{\omega^2}{g}$.

На рис. 2 нижче показано монотонні залежності перших чотирьох власних значень, позначених як F_1, F_2, F_3, F_4 , від радіуса поверхні розділу R_2 за різних положень перегородки H_1 . Із цих результатів можна зробити висновок, що графіки F_i як функцій R_2 істотно відрізняються для різних i та H_1 . Наявність перегородки суттєво впливає лише на нижчі частоти. Також видно, що малі перегородки (коли $R_2 \in$ відносно великим) майже не впливають на нижчі частоти. Цей висновок узгоджується з результатами І. Гаврилюка та ін. [15].

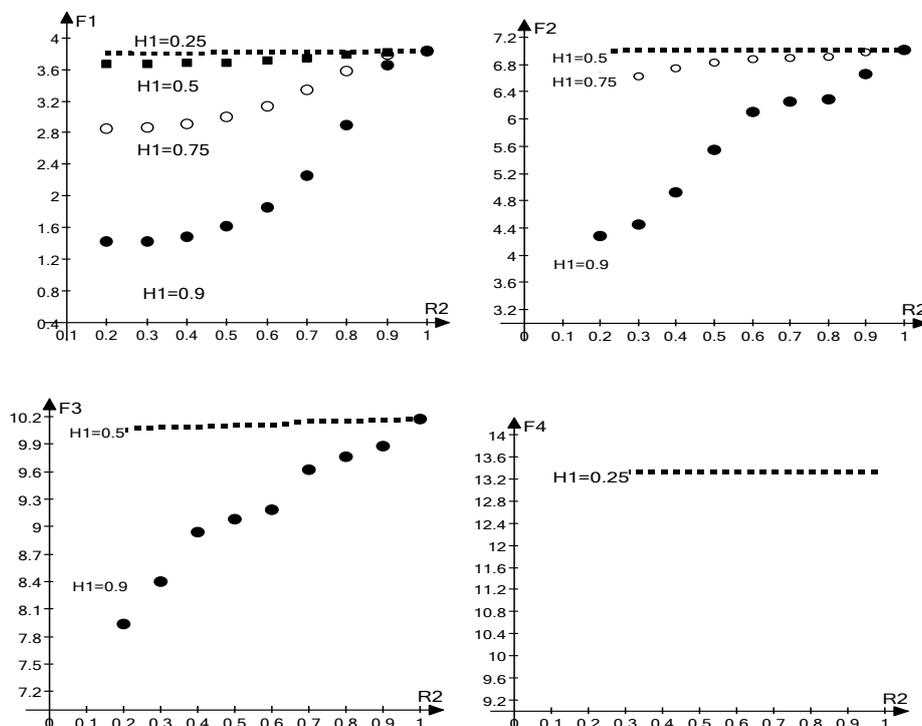


Рис. 2. Власні значення залежно від R_2 при $H = 1$ та різних H_1

Рис. 3 нижче демонструє монотонні залежності перших чотирьох власних значень для $l = 1$, позначених як F_1, F_2, F_3, F_4 , від радіуса поверхні розділу R_2 за різних положень перегородки H_1 . Із цих результатів можна зробити висновок, що графіки F_i ($i = 1, 2, 3, 4$) як функції R_2 істотно відрізняються для різних R_2 та H_1 . Наявність перегородки значно впливає лише на нижчі частоти. Також видно, що невеликі перегородки (коли R_2 є відносно великим) практично не впливають навіть на нижчі частоти.

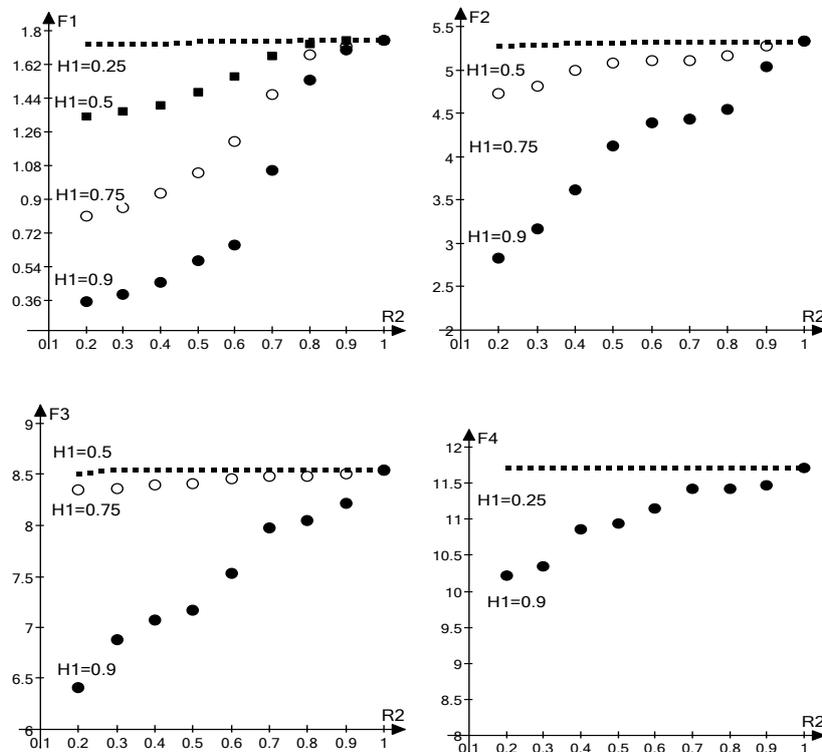


Рис. 3. Власні значення за $l = 1$ залежно від R_2 для $H = 1$ м та різних H_1

Слід зазначити, що значення частот як для $l = 0$, так і для $l = 1$ на лівій вертикальній межі цих графіків збігаються з теоретичними значеннями для резервуарів із суцільними перегородками за тих самих положень перегородки H_1 . У цьому разі маємо крайову задачу для двокамерного резервуара, де нижня камера повністю заповнена рідиною. Для цієї камери розглядається крайова задача з нульовою умовою Неймана, що призводить до неоднозначного розв'язку. Однак потенціал є відомою сталою величиною завдяки розв'язанню для верхньої камери, де маємо мішану крайову задачу, яка для циліндричних оболонок може бути розв'язана аналітично. Рідина над перегородкою поводить себе як така, що коливається (sloshing regime), тоді як рідина під перегородкою поводить себе як жорстке тіло. На правій межі графіків значення частот збігаються з тими, що отримані для резервуара без перегородки.

Висновки

Розроблено числовий метод оцінки впливу перегородок на коливання рідини в жорстких оболонках обертання. Сформульовано мішану крайову задачу відносно потенціалу швидкостей і зведено її до системи інтегральних рівнянь, що розв'язана методом граничних елементів. Показано, що перегородки змінюють спектр власних частот і забезпечують відстроювання від резонансів. Ефективність демпфування залежить від форми, розташування та кількості перегородок. Запропонований підхід придатний для інженерного аналізу резервуарів і паливних баків. У подальшому передбачається дослідити плескання рідини в резервуарах за наявності кількох перегородок.

Список використаної літератури

1. Zhang Z., Tao A.F., Wu Q.R., Xie Y.H. Review on the Progress and Issues in Liquid Tank Sloshing of Ships. *China Ocean Engineering*. 2023. Vol. 37, № (5). P. 709–724. DOI: 10.1007/s13344-023-0060-0
2. Pradeepkumar K., Selvan V., Satheeshkumar K. Review of Numerical Methods for Sloshing. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology*. 2020. Vol. 8, Issue XI. DOI :10.22214/ijraset.2020.32116
3. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. 2015. Vol. 1, № (1). P. 45–50. DOI: 10.13140/RG.2.1.3527.4961
4. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Misiura S., Misiura I. Modelling Thermal Stresses in Laminated Aircraft Elements of a Complex Form with Account of Heat Sources. In: Cioboată, D.D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2022. ICoRSE 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2023. Vol. 534. Springer, Cham, DOI: 10.1007/978-3-031-15944-2_22
5. Lampart P., Rusanov A., Yershov S., Marcinkowski S., Gardzilewicz A. Validation of a 3D BANS solver with a state equation of thermally perfect and calorically imperfect gas on a multi-stage low-pressure steam turbine flow. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*. 2003. Vol. 127, №1. P. 83–93. DOI: 10.1115/1.185249
6. Murawski K. Finite Element Method Postbuckling Analysis of stresses and strains in elastic states of very slender cylindrical shaped plywood compressed by ball-and-socket joints while the force line is getting out the critical cross section. *Annals of Warsaw University of Life Sciences – SGGW Forestry and Wood Technology*. 2015. Vol. 62. P. 62–66.
7. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., & Strelnikova, E. Numerical simulation of free liquid-induced vibrations in elastic shells. *International Journal of Modern Physics and Applications*. 2015. Vol. 1, № 4. P. 159–168. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209
8. Smetankina N., Pak A., Mandrazhy O., Usatova O., Vasiliev A. Modelling of Free Axisymmetric Vibrations of the Fluid-Filled Shells with Non-classical Boundary Interface Conditions. In *Int. Conference on Smart Technologies in Urban Engineering, Cham: Springer Nature Switzerland*. 2023. P. 185–196. DOI: 10.1007/978-3-031-46874-2_17
9. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariov K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*. 2021. Vol. 33, № 8. P. 101589. DOI: 10.1016/j.jksus.2021.101589
10. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Tonkonozhenko A. Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 25, № 3. P. 117–132. DOI: 10.2478/ijame-2020-0038
11. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations, *Journal of Mathematics and Statistical, Science Signpost Publishing*. 2019. Vol. 5. P. 31–41.
12. Крютченко Д.В. Метод інтегральних рівнянь в аналізі стійкості коливань рідини в оболонках обертання. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2024. Т. 7, № 1. С. 155–163. DOI: 10.32782/mathematical-modelling/2024-7-1-14
13. Liu J., Zang Q., Ye W., Lin G. High performance of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 114. P. 148–165. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.02.014
14. Balas O.-M., Doicin C.V. Cipu E.C. Analytical and Numerical Model of Sloshing in a Rectangular Tank Subjected to a Braking. *Mathematics*. 2023. Vol. 11. P. 949–955. DOI: 10.3390/math11040949
15. Gavriyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*. 2008. Vol 25, № 6. P. 518–540. DOI: 10.1108/02644400810891535

References

1. Zhang, Z., Tao, A.F., Wu, Q.R., & Xie, Y.H. (2023). Review on the progress and issues in liquid tank sloshing of ships. *China Ocean Engineering*, 37 (5), 709–724. <https://doi.org/10.1007/s13344-023-0060-0> [in English].
2. Pradeepkumar, K., Selvan, V., & Satheeshkumar, K. (2020). Review of numerical methods for sloshing. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology*, 8 (XI). <https://doi.org/10.22214/ijraset.2020.32116> [in English].
3. Medvedovskaya, T., Strelnikova, E., & Medvedyeva, K. (2015). Free hydroelastic vibrations of hydroturbine head covers. *International Journal of Engineering and Advanced Research Technology (IJEART)*, 1 (1), 45–50. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3527.4961> [in English].
4. Smetankina, N., Merkulova, A., Merkulov, D., Misiura, S., & Misiura, I. (2023). Modelling thermal stresses in laminated aircraft elements of a complex form with account of heat sources. In D.D. Ciobață (Ed.), *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2022 (Lecture Notes in Networks and Systems, 534)*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22 [in English].
5. Lampart, P., Rusanov, A., Yershov, S., Marcinkowski, S., & Gardzilewicz, A. (2005). Validation of a 3D BANS solver with a state equation of thermally perfect and calorically imperfect gas on a multi-stage low-pressure steam turbine flow. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 127 (1), 83–93. <https://doi.org/10.1115/1.185249> [in English].
6. Murawski, K. (2007). Finite element method postbuckling analysis of stresses and strains in elastic states of very slender cylindrical shaped plywood compressed by ball-and-socket joints while the force line is getting out the critical cross section. *Annals of Warsaw University of Life Sciences – SGGW, Forestry and Wood Technology*, 62, 62–66 [in English].
7. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., & Strelnikova, E. (2015). Numerical simulation of free liquid-induced vibrations in elastic shells. *International Journal of Modern Physics and Applications*, 1 (4), 159–168. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1857.5209> [in English].
8. Smetankina, N., Pak, A., Mandrazhy, O., Usatova, O., & Vasiliev, A. (2023). Modelling of free axisymmetric vibrations of the fluid-filled shells with non-classical boundary interface conditions. In *International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering*, 185–196. Cham: Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-46874-2_17 [in English].
9. Choudhary, N., Kumar, N., Strelnikova, E., Gnitko, V., Kriutchenko, D., & Degtyariov, K. (2021). Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*, 33 (8), 101589. <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2021.101589> [in English].
10. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Tonkonozhenko, A. (2020). Liquid vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 25 (3), 117–132. <https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038> [in English].
11. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., & Gnitko, V. (2019). Liquid vibrations in cylindrical quarter tank subjected to harmonic, impulse and seismic lateral excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science, Signpost Publishing*, 5, 31–41 [in English].
12. Kriutchenko, D. (2024) Metod integralnykh rivnian v analizi stiikosti kolyvan ridyny v obolonkakh obertannia [Method of integral equations in stability analysis of fluid vibrations in shells of revolution]. *Applied questions of mathematical modelling*, 7(1), 155–163. <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-1-14> [in Ukrainian].
13. Liu, J., Zang, Q., Ye, W., & Lin, G. (2020). High performance of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 114, 148–165. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.02.014> [in English].
14. Balas, O.-M., Doicin, C.V., & Cipu, E.C. (2023). Analytical and numerical model of sloshing in a rectangular tank subjected to a braking. *Mathematics*, 11, 949–955. <https://doi.org/10.3390/math11040949> [in English].
15. Gavriyuk, I., Hermann, M., Lukovsky, I., Solodun, O., & Timokha, A. (2008). Natural sloshing frequencies in truncated conical tanks. *Engineering Computations*, 25 (6), 518–540. <https://doi.org/10.1108/02644400810891535> [in English].

Крютченко Денис Володимирович – доктор філософії зі спеціальності «Прикладна математика», науковий співробітник відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту енергетичних машин і систем імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Колодяжний Андрій Сергійович – аспірант відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту енергетичних машин і систем імені А.М. Підгорного НАН України. E-mail: 7ask7@ukr.net, ORCID: 0000-0008-4026-6715.

Мищенко Максим Сергійович – аспірант кафедри прикладної фізики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. E-mail: maxkava@i.ua, ORCID:0009-0002-2593-2050.

Стрельнікова Олена Олександрівна – д.т.н., професор, провідний науковий співробітник відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту енергетичних машин і систем імені А.М. Підгорного НАН України; професор кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки. E-mail: elena15@gmx.com, ORCID: 0000-0003-0707-7214.

Kriutchenko Denys Volodymyrovych – PhD «Applied mathematics», Researcher at the Department of Thermoaerodynamics of Power Machines at the Anatolii Pidhornyy Institute of Mechanical Engineering of the National Academy of Science s of Ukraine. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Kolodyazhny Andriy Serhiyovych – Postgraduate Student at the Department of Thermo-Aerodynamics of Power Machines of the Anatolii Pidhornyy Institute of Power Machines and Systems of the NAS of Ukraine. E-mail: 7ask7@ukr.net, ORCID: 0000-0008-4026-6715.

Mischenko Maxim Serhiyovych – Postgraduate Student at the Department of Applied Physics of the V.N. Karazin Kharkiv National University. E-mail: maxkava@i.ua, ORCID:0009-0002-2593-2050.

Strelnikova Olena Oleksandrivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Researcher at the Department of Thermo-Aerodynamics of Power Machines at the Anatolii Pidhornyy Institute of Power Machines and Systems of the NAS of Ukraine; Professor at the Applied Mathematics Chair of the Kharkiv National University of Radio Electronics. E-mail: elena15@gmx.com, ORCID: 0000-0003-0707-7214.



Отримано: 07.10.2025
Рекомендовано: 21.11.2025
Опубліковано: 30.12.2025