

РУЙНУВАННЯ «БІЛИМ» ШУМОМ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ У ПАРАБОЛІЧНОМУ ПОТЕНЦІАЛІ ЗА РЕЗОНАНСНОГО РАЗГОЙДУВАННЯ

Розглядається квантово-механічна задача про рух частинки в квадратичному потенціалі, який піддається дипольному впливу, що періодично змінюється з плином часу, а також стохастичному обуренню типу «білого» шуму. Подібна ситуація реалізується, зокрема, під час руху електрона вздовж кристалічної осі. У цьому разі роль часу в задачі грає глибина проникнення частки, а функція обурення описує вимушені коливання кристалічних ґрат. Інший важливий приклад пов'язаний з обчисленням швидкості хімічної реакції поблизу локалізованих ангармонічних вібрацій атомів, викликаних термічними флуктуаціями або зовнішнім впливом. У цьому разі внаслідок великої амплітуди локалізованих ангармонічних вібрацій положення потенційної ями, у якій знаходиться частка, уже не може вважатися нерухомим, що вимагає перегляду задачі про обчислення хвильової функції з урахуванням динаміки потенційної ями.

У роботі розглянуто параболічний потенціал, який як ціле схильний до дипольного впливу, що періодично змінюється з плином часу, а також впливу стохастичного «білого» шуму. Вивчено динаміку хвильової функції частки в такому потенціалі. На основі знайдених рішень нестационарного рівняння Шредінґера побудовано алгоритми розрахунку динаміки хвильової функції. Проаналізовано еволюцію хвильової функції частки. Наведено асимптотичні рішення рівняння руху, за допомогою яких отримано основні характеристики хвильового пакета. Для вибраного виду обурення потенціалу наведено приклади еволюції хвильової функції. Виявлено ефект руйнування (колапсу) хвильової функції, що відбувається внаслідок дії шуму. Вивчено вплив амплітуди «білого» шуму на характеристики колапсу. Запропоновано гіпотезу про те, що час до колапсу обернено пропорційний інтенсивності шуму.

Ключові слова: рівняння Шредінґера, параболічний потенціал, дипольне розгойдування, «білий» шум, еволюція хвильового пакета, колапс хвильової функції.

DESTRUCTION OF THE WAVE FUNCTION BY «WHITE» NOISE IN PARABOLIC POTENTIAL AT RESONANT DRIVE

The quantum-mechanical problem of particle motion in a quadratic potential subject to dipole action periodically changing with time, and stochastic perturbation of the «white» noise type is considered. A similar situation is realized, in particular, when an electron moves along the crystal axis. A situation of this type is realized, in particular, when an electron moves along the crystal axis. In this case, the role of time in the problem is played by the depth of particle penetration, and the perturbation function describes forced oscillations of the crystal lattice. Another important example is associated with the calculation of the rate of a chemical reaction near localized anharmonic vibrations of atoms caused by thermal fluctuations or external influences. In this case, due to the large amplitude of localized anharmonic vibrations, the position of the potential well in which the particle is located can no longer be considered motionless, which requires a revision of the problem of calculating the wave function taking into account the dynamics of the potential well.

The paper considers a parabolic potential, which as a whole is subject to a dipole effect periodically changing over time, as well as to the effect of stochastic «white» noise. Based on the found solutions to the non-stationary Schrödinger equation, algorithms for calculating the dynamics of the wave function are constructed. The evolution of the wave function of a particle is analyzed. Asymptotic solutions of the equation of motion are given, with the help of which the main characteristics of the wave packet are obtained. Examples of the evolution of the wave function are given for the selected type of perturbation of the potential. An example of the destruction (collapse) of the wave function due to the effect of noise is given. The effect of destruction (collapse) of the wave function, which occurs due to the impact of noise, is discovered. The influence of the amplitude of white noise on the characteristics of the collapse is studied. A hypothesis is proposed that the time before collapse is inversely proportional to the intensity of the noise.

Key words: Schrödinger equation, parabolic potential, dipole buildup, «white» noise, evolution of the wave packet, collapse of the wave function.

Постановка проблеми

У Національному науковому центрі «Харківський фізико-технічний інститут» (ННЦ ХФТІ) проводяться роботи з дослідження впливу різних типів опромінення на властивості конденсованих середовищ. Механізм зміни властивостей матеріалів пов'язується зі збудженням нелінійних локалізованих коливань у ґратах [1; 2]. Ці коливання, своєю чергою, впливають на динаміку частинок у ній. Структура та розташування атомів у монокристалі істотно впливають на характер руху частинок у ґратах [3]. У цій роботі викладено результати дослідження резонансної розгойдування енергії разом із «білим» шумом, які розкривають фізичну сутність виникаючих процесів.

Розглянуто квантово-механічну задачу для руху частки в квадратичному потенціалі, коли хвильовий пакет разом піддається як дипольному розгойдуванню, періодично змінюється з часом, так випадковим шумом. Подібна постановка виникає у задачах, коли обурення є траєкторією процесу, що моделює зміну потенціалу під час руху частинки, зокрема під час руху електрона вздовж кристалічної осі [3]. У такому разі роль часу в задачі грає функція обурення, яка описує вимушені коливання кристалічної решітки. Інший приклад пов'язаний з обчисленням швидкості хімічної реакції поблизу локалізованих ангармонічних вібрацій атомів, зумовлених термічними флуктуаціями або зовнішнім впливом [4]. Тут унаслідок великої амплітуди вібрацій положення потенційної ями, у якій знаходиться частка, уже не може вважатися нерухомою, що вимагає перегляду завдання для обчислення хвильової функції з урахуванням динаміки потенційної ями.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Вивченню еволюції хвильової функції частки в параболічному потенціалі традиційно приділяється велика увага [2; 4]. Є велика кількість робіт, присвячених каналюванню, випромінюванню та реакціям у кристалах за високих енергій [4; 5], квантовій динаміці пакетів у нестационарних параболічних потенціалах [1; 5; 6]. Під час аналізу використовуються теорія випадкових процесів і континуального інтегрування [3; 5].

Мета дослідження

У цій роботі буде розглянутий випадок, коли хвильовий пакет збуджується дипольним накачуванням разом із розгляданням поведінки хвильової функції за стохастичного обурення «білим» шумом та колапсом хвильового пакету. Після цього буде вивчений випадок, коли хвильовий пакет спільно піддається як дипольному розгойдуванню, так випадковому шуму, при цьому увагу буде приділено залежності часу до руйнування хвильового пакета від інтенсивності стохастичного обурення.

Виклад основного матеріалу дослідження

У роботі розглянуто випадок, коли хвильовий пакет спільно піддається як дипольному розгойдуванню, так випадковому шуму, при цьому увагу буде приділено залежності часу до руйнування хвильового пакета від інтенсивності стохастичного обурення.

Буде розглянуто тимчасову еволюцію частки з вихідною хвильовою функцією [7]

$$\psi(x_0, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x_0^2\right). \quad (1)$$

За відсутності обурення тимчасова еволюція щільності розподілу ймовірностей $p(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ на інтервалі часу $0 \leq t \leq 60$ стаціонарна.

1. Рівняння Шредінгера в обуреному параболічному потенціалі

Аналіз розпочнемо з розгляду тимчасової еволюції частки з вихідною хвильовою функцією у потенціалі [7]

$$V(x, t) = \frac{1}{2} m \omega^2 [x - U(t)]^2, \quad (2)$$

де $U(t)$ – деяка квадратично-інтегрована функція. Такого виду потенціал є узагальненням параболічного потенціалу з $U(t) = 0$ і $V(x, t) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, використуваного, зокрема, під час аналізу руху каналюючих заряджених частинок [5]. У цьому разі для хвильової функції $\Psi = \Psi(x, t; x_0, t_0)$ (функції Гріна) рівняння Шредінгера має вигляд [3]

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 [x - U(t)]^2 \Psi. \quad (3)$$

Фізичний зміст функції Ψ у тому, що вона описує амплітуду ймовірності переходу зі стану в момент $t_0 = 0$, що характеризується координатою x_0 , у стан у момент t , що характеризується координатою x .

На підставі параболічності потенціалу (2) шукатимемо рішення рівняння (3) у вигляді $\Psi(x, t; x_0, t_0) = \exp(C_0(t) + C_1(t)x + C_2(t)x^2)$ з деякими функціями $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$. Для них можна скласти систему з трьох звичайних диференціальних рівнянь із початковими умовами. У результаті знайдемо, що рішення рівняння Шредінгера (3) таке [5]:

$$\Psi(x, t; x_0, t_0) = \left(\frac{m e^{i\omega t}}{\pi \hbar (e^{2i\omega t} - 1)} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m\omega}{2\hbar} (x^2 - x_0^2) - i \frac{m\omega^2}{2\hbar} \int_0^t U^2(\tau) d\tau \right) \times \exp \left(i \frac{\hbar}{2m} \int_0^t Y^2(\tau) d\tau + xY(t) - \frac{m\omega}{\hbar (e^{2i\omega t} - 1)} [x - e^{i\omega t} x_0 - R(t)]^2 \right), \quad (4)$$

де

$$Y(\tau) = i \frac{m\omega^2}{\hbar} \int_0^\tau U(\tau') \exp(-i\omega\tau + i\omega\tau') d\tau', \quad R(t) = \frac{\hbar e^{i\omega t}}{m} \int_0^t Y(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau.$$

Гауссов вигляд виразу (4) для отриманої функції $\Psi(x, t; x_0, t_0)$ (функції Гріна) є наслідком параболічної потенціалу (2). Функція $\Psi(x, t; x_0, t_0)$ (4) задовольняє тому ж рівнянню, що й хвильова функція $\psi(x_0, 0)$, але з початковою умовою $\Psi(x, t; x_0, 0) = \delta(x - x_0)$.

Вид хвильової функції $\psi(x, t)$ у даний момент $t > t_0$ може бути визначений за заданим її значенням $\psi(x_0, 0)$ в момент $t_0 = 0$:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, 0) \Psi(x, t; x_0, 0) dx_0. \quad (5)$$

Після обчислення інтеграла (5) з ядром $\Psi(x, t; x_0, 0)$ (4) та початковою хвильовою функцією $\psi(x_0, 0)$ (1) отримаємо

$$\psi(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left(-i \frac{m\omega^2}{2\hbar} J - \frac{m\omega}{2\hbar} [x - X(t)]^2 \right), \quad X(t) = \omega \int_0^t U(\tau) \sin(\omega t - \omega\tau) d\tau, \quad (6)$$

де J – набіг фази результуючої хвильової функції.

$$J = \int_0^t U^2(\tau) d\tau + \frac{i\hbar}{m\omega} + 2x \int_0^t U(\tau) \cos(\omega(t - \tau)) d\tau + \int_0^t \int_0^t d\tau' U(\tau) U(\tau') \sin(\omega(\tau - t)) \cos(\omega(\tau' - t)). \quad (7)$$

Якщо за $t = 0$ частинка знаходилася в основному стані з хвильовою функцією (1), то до моменту часу t для щільності ймовірностей $p(x, t)$ знайдемо

$$p(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m\omega}{\hbar} [x - X(t)]^2 \right). \quad (8)$$

Таким чином, якщо частинка відчуває тимчасову еволюцію у потенціалі (2) з $U(\tau) = 0$, то на момент часу t тип розподілу ймовірностей $p(x, t)$ залишається тим самим, що і в момент $t_0 = 0$. Поведінка хвильового пакета істотно змінюється, якщо $U(\tau) \neq 0$, що можна побачити з характеристик хвильового пакета.

Із виразу (8) отримаємо, що квантово-механічні середні – перший та другий моменти щільності розподілу ймовірностей – такі:

$$\langle x(t) \rangle = \omega \int_0^t U(\tau) \sin(\omega t - \omega \tau) d\tau, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} + \omega^2 \int_0^t \int_0^t U(\tau) U(\tau') \sin(\omega t - \omega \tau) \sin(\omega t - \omega \tau') d\tau d\tau' \quad (9)$$

і відчувають розмах. Якщо модуляційна функція $U(t)$ містить стохастичну компоненту, то $\langle x(t) \rangle$ і $\langle x^2(t) \rangle$ також є залежними від часу випадковими величинами.

2. Форма обуреного хвильового пакета за дипольного впливу у присутності стохастичного шуму

Розглянемо загальний випадок, коли процес $U(t)$ адитивно складається з дипольного збурення $g \sin(\omega t)$ з амплітудою g та стохастичного процесу «білого» шуму $n(t)$ із нульовим математичним очікуванням та дисперсією σ_w^2 :

$$U(t) = g \sin(\omega t) + \sigma_w n(t). \quad (10)$$

Відповідно до (6), хвильовий пакет як функція координати за довільного збурення зберігає свою гауссову форму, тому для опису достатньо навести вирази для його перших двох моментів. Далі приймемо, що з часів можна знехтувати внеском основного стану.

Квантово-механічне середнє – перший момент розподілу ймовірностей – становить:

$$\langle x(t) \rangle_w = \left\langle \omega \int_0^t U(\tau) \sin(\omega t - \omega \tau) d\tau \right\rangle = 0. \quad (11)$$

Для другого моменту запишемо

$$\langle x^2(t) \rangle_w = \frac{\hbar}{2m\omega} + \omega^2 \left\langle \int_0^t \int_0^t U(\tau) U(\tau') \sin(\omega t - \omega \tau) \sin(\omega t - \omega \tau') d\tau d\tau' \right\rangle. \quad (12)$$

У силу властивостей «білого» шуму $\langle U(\tau) U(\tau') \rangle = \sigma_w^2 \delta(\tau - \tau')$, тому

$$\langle x^2(t) \rangle_w = \frac{\hbar}{2m\omega} + \omega^2 \sigma_w^2 \int_0^t \sin^2(\omega t - \omega \tau) d\tau. \quad (13)$$

Для чималого часу, $t \gg \omega^{-1}$, маємо для дисперсії

$$\langle x^2(t) \rangle_w = \frac{1}{2} \omega^2 \sigma_w^2 t. \quad (14)$$

Оскільки середнє для першого моменту, пов'язане з шумом $\langle x(t) \rangle_w = 0$, для першого моменту пакета μ_1 згідно з (8) маємо

$$\mu_1 = \langle x(t) \rangle_G = \frac{1}{2} g \omega t \left(\cos(\omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \right), \quad (15)$$

Дисперсія μ_2 хвильового пакета дорівнюватиме сумі дисперсій, зумовлених обуреннями, а саме:

$$\mu_2 = \langle x^2(t) \rangle_G + \langle x^2(t) \rangle_w = \frac{1}{4} g^2 \omega^2 t^2 \left(\cos(\omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \right)^2 + \omega^2 \sigma_w^2 \int_0^t \sin^2(\omega t - \omega \tau) d\tau. \quad (16)$$

У разі параметричного резонансу, коли $\omega = 1$, отримаємо для середньої енергії

$$E = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle + \frac{m}{2} \omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{g^2 \hbar\omega}{2} (\omega^2 t^2 + \omega t \sin(2\omega t) + \sin^2(\omega t)). \quad (17)$$

Далі, перший доданок у (16) із часом зростає як t^2 , тодіяк через швидко осцилюючу залежність інтеграл у другому доданку можна замінити на $t/2$. Так само за великого другого відповідного доданку в (17) можна знехтувати. Перший же доданок через швидко осцилюючу залежність можна замінити на $1/2$. Тому

$$\mu_2 = \frac{1}{8} g^2 \omega^2 t^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sigma_w^2 t. \quad (18)$$

Тоді густину розподілу можна записати у вигляді

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\mu_2}\right). \quad (19)$$

На рис. 1–4, на яких показано число періодів N , наведено залежності еволюції щільності хвильового пакета, збудженого дипольним розгойдуванням і обуреного стохастичним процесом «білого» шуму. На рис. 1 можна бачити осциляції пакета як ціле за $\sigma_w = 0.8$, що відповідає виразам (15) і (16), однак вони, починаючи з $N=5$, поступово виходять зі стаціонарного режиму. Завеликих N на периферії $|x| \approx 10$ можна побачити флуктуаційні сплески хвильового пакета.

Рис. 2 ілюструє процес переходу хвильового пакета від зростання його розмірів μ_2 до зменшення $N=4$, що має місце зі збільшенням інтенсивності шуму $\sigma_w = 1.0$.

На рис. 3 можна бачити поряд із розширенням хвильового пакету його руйнування (колапс) за зростання його розмірів μ_2 за $N = 30$, що має місце зі збільшенням інтенсивності шуму $\sigma_w = 1.4$.

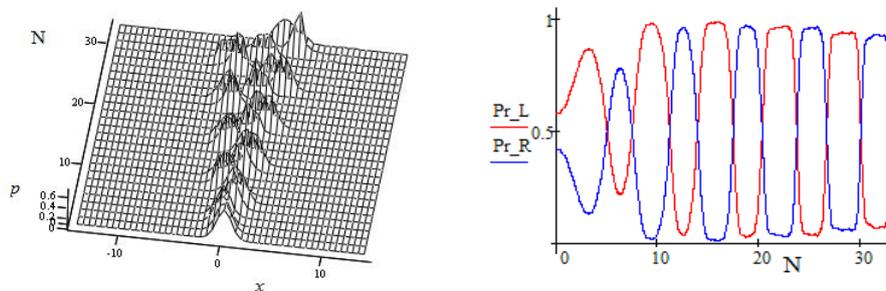


Рис. 1. Еволюція щільності $p(x,t)$ пакета та частки Pr_L, Pr_R щільності розподілу ймовірностей $p(x,t)$ на інтервалі $x \geq 0$ (червоне), $x \leq 0$ (синє); $g = 0.2, \sigma_w = 0.8$; показано кількість періодів N

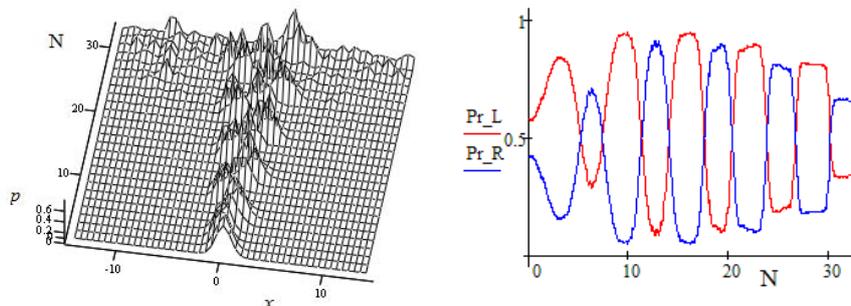


Рис. 2. Еволюція густини пакета $p(x,t)$ і частки Pr_L, Pr_R густини $p(x,t)$ на інтервалі $x \geq 0$ (червоне), $x \leq 0$ (синє); $g = 0.2, \sigma_w = 1.0$

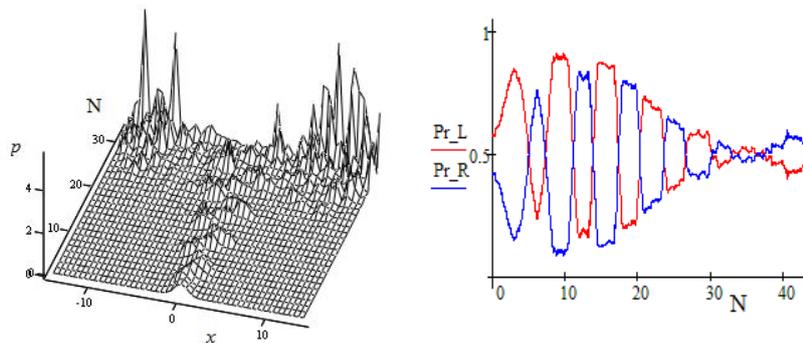


Рис. 3. Еволюція щільності пакета $p(x,t)$ та частки Pr_L та Pr_R щільності ймовірностей $p(x,t)$ на інтервалі $x \geq 0$ (червоне), $x \leq 0$ (синє); $g = 0.2$, $\sigma_w = 1.4$

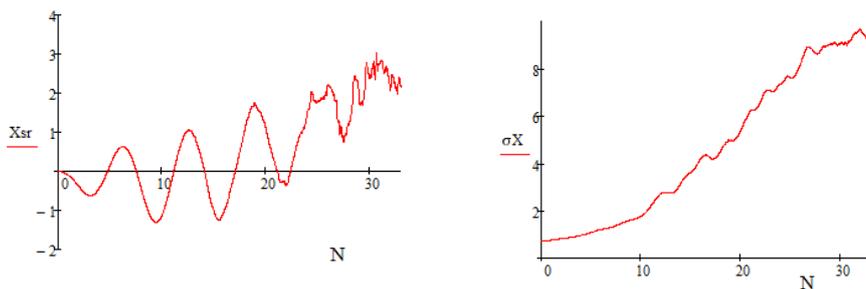


Рис. 4. Залежності центру пакету X_{sr} та середньоквадратичного розміру пакету σ_X ; $g = 0.2$, $\sigma_w = 1.4$

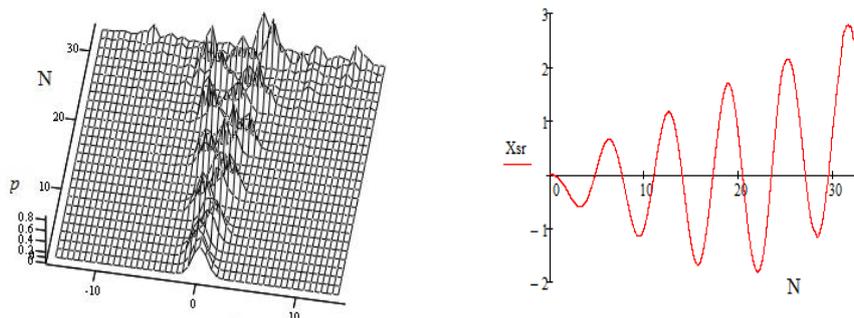


Рис. 5. Еволюція щільності пакета і центру пакету X_{sr} розподілу ймовірностей $p(x,t)$; $g = 0.2$, $\sigma_w = 1.2$

На рис. 4 показано, що в середньому пакет концентрується в районі $X_{sr} = \langle x(t) \rangle = 0$, що відбувається починаючи з $N=30$. Момент $N=30$ переходу від регулярного стану до некогерентного можна назвати *часом колапсу* $N_{collapse} = 30$. Із рис. 4 видно, що за $\sigma_w = 1.4$ коливання у цілому пучка стають менш когерентними і регулярними. У цьому частки Pr_L (для $x \geq 0$) і Pr_R (для $x \leq 0$) щільності розподілу ймовірностей $p(x,t)$ з часом дедалі більше вирівнюються. Це вказує на повне руйнування коливань у пакеті. Середньоквадратичний розмір пучка σ_X при цьому продовжує збільшуватися. Спостережуваний процес можна назвати *колапсом хвильового пакету*.

Для побудови гіпотези про зв'язок між σ_w і $T_{collapse}$ було проведено розрахунок за інтенсивності $\sigma_w = 1.2$ (рис. 5).

Із рис. 5 видно, що тривалість переходу від регулярного стану до некогерентного становить приблизно $N \approx 35$. Зіставлення даних рис. 2 та рис. 4 дає змогу назвати його *моментом колапсу* $T_{collapse}$ і дає можливість припустити, що момент колапсу обернено пропорційний інтенсивності шуму σ_w :

$$T_{collapse} \approx C\sigma_w^{-1}, \tag{20}$$

де C – величина, яка не залежить від σ_w .

Висновки

У роботі розглянуто параболічний потенціал, який як ціле схильний до дипольного впливу (параметричного резонансу), що періодично змінюється з плином часу, спільно із впливом «білого» шуму і динамікою хвильової функції частинки в ньому. На основі нестационарного рівняння Шредінгера побудовано аналітичні вирази та алгоритми розрахунку динаміки хвильової функції. Проаналізовано еволюцію хвильової функції частинки. Наведено асимптотичні рівняння руху, за допомогою яких отримано основні характеристики хвильового пакета. Для вибраного виду обурення потенціалу наведено приклади еволюції хвильової функції. Наведено приклад руйнування (колапсу) хвильової функції унаслідок дії шумом. Запропоновано гіпотезу про те, що час до колапсу обернено пропорційний інтенсивності шуму. Зазначимо, що механізм виникнення та розвитку колапсу хвильової функції, а також його фізична інтерпретація вимагають подальшого дослідження.

Список використаної літератури

1. Dubinko V.I., Laptev D.V., Mazmanishvili A.S., Archilla J.F.R. Quantum dynamics of wave packets in a nonstationary parabolic potential and the Kramers escape rate theory. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*. 2016. Vol. 01. №. 02. 1650010.
2. Mazmanishvili A.S., Knyaz I.A. Dynamics of quantum particles in perturbed parabolic 2d potential. *Journal of Nano- and Electronic Physics*. 2016. Vol. 8. № 4. 04014.
3. Dirac P.A.M. *The Principles of Quantum mechanics*. Oxford: Clarendon Press, 1967. 324 p.
4. Ахієзер О.І., Рекало М.П., Фомін П.І. *Фізика елементарних частинок*. Київ : Наукова думка, 1978. 224 с.
5. Мазманішвілі О.С. *Континуальне інтегрування як метод розв'язання фізичних задач*. Київ : Наукова думка, 1987. 224 с.
6. Dubinko V.I., Selyshchev P.A., Archilla J.F.R. Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity. *Physical Review Journals*. 2011. E83 (4). P. 041124–13.
7. Мазманішвілі О.С. Розкачування дробовим шумом хвильової функції у параболічному потенціалі і статистичний розподіл часу життя хвильового пакету частинки. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2024. Т. 7, № 1. С. 175–183.

References

1. Dubinko, V.I., Laptev, D.V., Mazmanishvili, A.S., & Archilla, J.F.R. (2016). Quantum dynamics of wave packets in a nonstationary parabolic potential and the Kramers escape rate theory. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*, 1 (2), 165001. <https://doi.org/10.1142/S2424913016500107> [in English].
2. Mazmanishvili, A.S., & Knyaz, I.A. (2016). Dynamics of quantum particles in perturbed parabolic 2d potential. *Journal of Nano- and Electronic Physics*, 8 (4), 04014 [in English].
3. Dirac, P.A.M. (1967). *The Principles of Quantum mechanics*. Oxford: Clarendon Press [in English].
4. Akhiezer, O.I., Rekalov, M.P., & Fomin, P.I. (1978). *Fizyka elementarnykh chastynok*. [Particle physics]. Kyiv : Naukova dumka [in Ukrainian].
5. Mazmanishvili, A.S. (1987). *Kontynualne intehruvannia yak metod rozv'iazannia fizychnykh zadach* [Path integration as a method for solving physical problems]. K.: Naukova dumka [in Ukrainian].
6. Dubinko, V.I., Selyshchev, P.A., & Archilla, J.F.R. (2011). Reaction-rate theory with account of the crystal anharmonicity. *Physical Review Journals*, E 83(4), 041124–13. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.041124> [in English].
7. Mazmanishvili, O.S. (2024). Rozkachuvannia drobovym shumom khvylovoi funksii u parabolichnomu potentsiali i statystychnyi rozpodil chasu zhyttia khvyloвого paketu

chastynky [Structure of the wave function by shot noise in the Parabolic potential and Statistical distribution of the lifetime of a particle wave packet]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia – Applied questions of mathematical modelling*, 7 (1), 175–183. <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-1-16> [in Ukrainian].

Мазманішвілі Олександр Сергійович – д.ф.-м.н., професор, старший науковий співробітник Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут». E-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Дубінко Володимир Іванович – д.ф.-м.н., провідний науковий співробітник Національного наукового центру «Харківський фізико-технічний інститут». E-mail: vdubinko@hotmail.com, ORCID: 0000-0002-6786-7069.

Mazmanishvili Oleksandr Serhiiovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Senior Researcher of the National Science Center Kharkov Institute of Physics and Technology. E-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Dubinko Volodymyr Ivanovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher of the National Science Center Kharkov Institute of Physics and Technology. E-mail: vdubinko@hotmail.com, ORCID: 0000-0002-6786-7069.

Дата надходження статті: 31.10.2025

Дата прийняття статті: 24.11.2025

Опубліковано: 30.12.2025

