УДК 519.65

А.Н. ХОМЧЕНКО
Чорноморський національний університет імені Петра Могили
О.І. ЛИТВИНЕНКО
Херсонський навчально-науковий інститут
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
О.М. ДУДЧЕНКО
Херсонський навчально-науковий інститут
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
П.Й. ГУЧЕК
Херсонський навчально-науковий інститут
Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова,
Економіко-гуманітарна академія, Варшава (Польща)
І.О. АСТІОНЕНКО
Херсонський національний технічний університет

СЕРЕНДИПОВІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ: ГЕОМЕТРИЧНІ ПІДХОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ АПРОКСИМАЦІЇ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Датою народження серендипових апроксимацій уважається 1968 р., коли І. Ергатудіс, Б. Айронс і О. Зенкевич показали, як випрямити криволінійний скінченний елемент за допомогою перетворення координат. Сьогодні в техніці метода скінченних елементів таке перетворення являє собою центральний засіб. Як відомо, найкращими границями елементарних областей є кусочно-поліноміальні функції з тих же причин, по яких вони найкращим чином наближають переміщення: з ними зручно працювати на комп'ютері. Виявилося, що вибір координат можливо описати тим самим класом поліномів, із якого беруться пробні функції. Такі перетворення називають ізопараметричними. Саме вони стимулювали появу серендипових моделей у теорії наближення функцій двох и трьох аргументів. На жаль, творці серендипового сімейства скінченних елементів обмежилися лише стандартними моделями, які не вільні від відомих недоліків. За своїми інтерполяційними й обчислювальними якостями серендипові елементи, безумовно, переважають лагранжеві. Задачі побудови нестандартних моделей, позбавлених конкретних недоліків, виявилися занадто складними для їх розв'язання традиційними методами матричної алгебри.

Застосовуючи геометричне моделювання в комбінації з матричним аналізом, автори на прикладі бікубичного серендипового елемента розвивають теорію багатопараметричних серендипових апроксимацій. Залучення нових ідей і нових методів у теорію серендипових апроксимацій здатне змінити (іноді радикально) деякі уявлення. Метод інтерпретацій у математичному моделюванні містить особливу процедуру перекладання початкової задачі на іншу мову і розв'язування вже «іншої» задачі замість початкової, що дає змогу пояснити «парадокси» стандартної моделі.

Ключові слова: *метод скінченних елементів (МСЕ), елементи бікубічної інтерполяції – Q16 (елемент Лагранжа), серендипів елемент Q12, інтерполяційна гіпотеза, функції форми (базис СЕ), інтерпретації базисних функцій (фізико-технічна, геометрична, ймовірнісна, інтегральні та локальні числові характеристики стандартних базисів Q12), фізична неадекватність серендипових СЕ (парадокс Зенкевича), когнітивно-графічний аналіз портретів нульового рівня.*

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-2-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

A.N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LYTVYNENKO
Kherson Educational and Scientific Institute
of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding
O.M. DUDCHENKO
Kherson Educational and Scientific Institute
of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding
P.Y. GUCHEK
Kherson Educational and Scientific Institute
of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding;
VIZJA University, Warsaw, Poland
I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

SERENDIPITY FINITE ELEMENTS: GEOMETRIC APPROACHES TO SOLVING THE APPROXIMATION PROBLEM IN THE FINITE ELEMENT METHOD

The year 1968 is considered the birth date of serendipity approximations, when I. Ergatoudis, B. Irons, and O. Zienkiewicz demonstrated how a curvilinear finite element can be straightened by means of a coordinate transformation. Today, such a transformation represents a central tool in the finite element method. As is well known, the best boundaries of elemental domains are piecewise polynomial functions, for the same reasons that make them optimal for approximating displacements: they are convenient for computer implementation. It was found that the choice of coordinates can be described by the same class of polynomials from which the trial functions are taken. Such transformations are called isoparametric. It was precisely these transformations that stimulated the emergence of serendipity models in the theory of approximation of functions of two and three variables.

Unfortunately, the creators of the serendipity family of finite elements limited themselves to standard models only, which are not free from well-known deficiencies. In terms of their interpolation and computational properties, serendipity elements undoubtedly surpass Lagrange elements. However, the construction of non-standard models free of specific shortcomings proved to be too complex to be solved by traditional methods of matrix algebra.

By applying geometric modeling in combination with matrix analysis, the authors develop the theory of multiparametric serendipity approximations using the bicubic serendipity element as an example. The introduction of new ideas and new methods into the theory of serendipity approximations is capable of changing – sometimes radically – certain established notions. The method of interpretations in mathematical modeling involves a special procedure of translating the original problem into another «language» and solving this «different» problem instead of the original one, which makes it possible to explain the «paradoxes» of the standard model.

Key words: *finite element method (FEM), bicubic interpolation elements Q16 (Lagrange element), serendipity element Q12, interpolation hypothesis, shape functions (finite element basis), interpretations of basis functions: physical-engineering, geometric, probabilistic, integral and local numerical characteristics of standard Q12 bases, physical inadequacy of serendipity finite elements (Zienkiewicz paradox), cognitive-graphical analysis of zero-level portraits.*

Постановка проблеми

Багато важливих і цікавих подій у наукових дослідженнях пов’язано з появою нових термінів і понять. Саме в таких умовах народжувався метод скінченних елементів (МСЕ). Так було з теорією електромагнетизму, теорією ймовірностей, теорією катастроф, теорією серендипових апроксимацій у МСЕ. Серендипові СЕ цікаві й привабливі як невичерпне джерело оригінальних ідей та нових результатів. Співробітництво інженерів і математиків, безумовно, збагачує теорію серендипових апроксимацій, але проблема спільної мови лишається актуальною. На прикладі серендипового елемента $Q12$ (бікубічна інтерполяція, 12 вузлів) ми спробуємо показати причини виникнення нечітких гіпотез, неадекватних моделей, парадоксальних результатів та відвертих помилок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У реальних двовимірних і тривимірних задачах границі розрахункової області, границі між елементами, а також границі поділу (у неоднорідному середовищі) часто криволінійні

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-2-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

[1–6]. Саме такий СЕ досліджували І. Ергатудіс, Б. Айронс і О. Зенкевич у 1968 р. [7]. Це був яскравий приклад успішного застосування ізопараметричної техніки. Ізопараметрична техніка полягає [2; 3] у виборі кусково-поліноміальних функцій для визначення перетворення координат. Термін «ізопараметричні» означає, що для перетворення координат вибирають ті самі поліноми, що інтерполюють фізичне поле. Тобто базисні функції виконують подвійну роль. Автори [7] не врахували, що роль базисних функцій – потрійна. Вони використовуються в задачах локалізації навантажень на СЕ. Перетворення координат суттєво спрощується, якщо в СЕ немає внутрішніх вузлів. Якщо внутрішні вузли є, перетворення може бути дуже чутливим до переміщення цих вузлів. Можливо, автори [7] спостерігали цю особливість і саме тому відмовилися від внутрішніх вузлів лагранжевих моделей. Так були відкриті цікаві й дуже корисні елементи, які О. Зенкевич запропонував назвати серендиповими. Шукайте асоціацію з казкою про трьох принців із Серендипу (Серендип – стародавня назва Цейлону). Після цього в англомовних публікаціях з'явилася абревіатура EIZ – із перших букв прізвища авторів відкриття. Таким чином, у МСЕ потрійну роль виконують саме серендипові (ізопараметричні) моделі. Наша увага зосереджена на задачах локалізації вузлових навантажень на СЕ. О. Зенкевич [3] залишив непохитну думку, що навантаження на кутові вузли серендипових елементів може бути від'ємним, що робить моделі протиприродними. Спробуємо позбутися протиприродних властивостей серендипових моделей. Виявляється, що таких моделей – безліч. Роботу [8] та монографію [9] цілком присвячено серендиповим моделям, включаючи альтернативи та нові оригінальні методи моделювання.

Мета дослідження – на конкретному прикладі елемента $Q12$ показати, що залучення нових ідей і нових методів у теорії серендипових апроксимацій здатне змінити (іноді радикально) деякі звичні уявлення.

Виклад основного матеріалу дослідження

Розглянемо СЕ 3-го порядку (бікубічна інтерполяція). Цей елемент має 12 вузлів, що рівномірно (включаючи вершини) розташовані на границі (рис. 1).

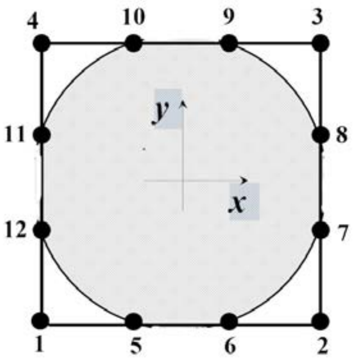

Рис. 1. Портрет ліній нульового рівня функції $N_1(x, y)$. Область від'ємних значень $N_1(x, y)$ заштрихована

$$
\begin{array}{c}
1 \\
x \quad y \\
x^2 \quad xy \quad y^2 \\
x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \\
x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \\
x^3y^2 \quad x^2y^3 \\
x^3y^3
\end{array}
$$

Рис. 2. Схема Паскаля. Бікубічний елемент Лагранжа

Схема Паскаля (рис. 2) нагадує про походження серендипових елементів. Спочатку в МСЕ були елементи Лагранжа. Будь-який метод інтерполяції спирається на певне припущення про зв'язок значень поля, що інтерполюється в різних точках-вузлах. На бікубічному елементі задано 12 вузлів, і в кожному з них уважається відомим відповідне значення функції (гіпотеза Лагранжа). Інтерполяційний поліном (інтерполянт) залежить від 12-ти мономів зі схеми Паскаля і має вигляд:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{12} N_i(x,y)\cdot f_i\,, \tag{1}$$

де $N_i(x,y)$ – базисна функція, що асоціюється з вузлом і, f_i – вузлове значення функції, що інтерполюється.

Базисні функції мають важливі властивості:

$$N_i(x_k,y_k)=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{12} N_i(x,y)=1, \tag{2}$$

де k – номер вузла.

Чотири вузла на боці квадрата реалізують кубічний закон зміни функції і забезпечують міжелементну неперервність поля. Важлива ознака стандартної (*standard*) моделі: кількість параметрів (мономів) інтерполянта (1) співпадає з кількістю вузлів. Сьогодні відомо, що задача перетворення лагранжевої моделі на серендипову має безліч розв'язків, а стандартні моделі не завжди найкращі. Нагадаємо, що для стандартних моделей $Q8$ і $Q12$ базисні функції $N_1(x, y)$ були знайдені підбором. Базис елемента $Q12$ – це чотири кутові функції форми і вісім проміжних. Кутова функція форми має вигляд (рис. 3):

$$N_1(x,y)=\frac{1}{32}(1-x)(1-y)\left(9\left(x^2+y^2\right)-10\right), \tag{3}$$

аналогічно $N_i(x,y)$ для і =2, 3, 4.

Проміжна функція $N_5(x,y)$ має вигляд (рис. 4):

$$N_5(x,y)=\frac{9}{32}\left(1-x^2\right)(1-y)(1-3x)\,, \tag{4}$$

аналогічно $N_i(x,y)$ для і = 6, 7, …, 12.

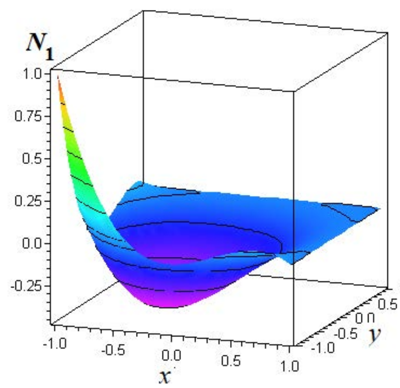

Рис. 3. Графік базисної функції $N_1(x, y)$

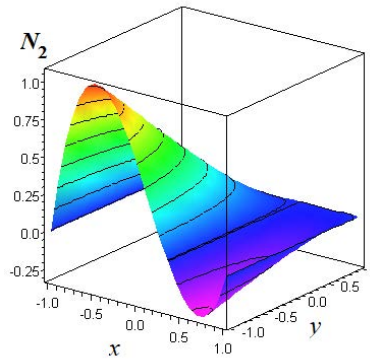

Рис. 4. Графік базисної функції $N_2(x, y)$

Не дивно, що коло (рис. 1) привернуло увагу І. Ергатудіса, Б. Айронса і О. Зенкевича. Можливо, це сталося під впливом авторитету Піфагора, який уважав коло найбільш досконалою кривою. На нульовому рівні (рис. 1) коло проходить через усі проміжні вузли. Інженери І. Ергатудіс, Б. Айронс і О. Зенкевич продемонстрували не простий підбір, а справжній метод геометричного моделювання фінітних функцій. Портрет ліній нульового рівня кутової поверхні $N_i(x,y)$ (рис. 1) допомагає зробити крок із $2D$ у $3D$ і побачити параболоїд обертання. Проміжні поверхні (4) – це коноїди. Схема Паскаля (рис. 2) показує, що існує ще два теоретично можливих варіанта використання симетричних пар мономів. Відповідні приклади субститут базисів можна знайти в [10].

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-2-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

Локалізація навантаження на вузли елемента здійснюється шляхом інтегрального усереднення базисних функцій. Ця традиція започаткована ще Ньютоном і Котесом під час побудови квадратурних формул для функцій одного аргументу. Для функції двох аргументів вузлове навантаження визначається за правилом:

$$\gamma_i = \frac{1}{S}\iint_D N_i(x, y)\,dxdy, \tag{5}$$

де S – площа області D, i – номер вузла.

Для стандартних моделей $Q8$ і $Q12$ формула (5) дає

$\gamma_i = -\frac{1}{12}$ у кутових вузлах $Q8$;

$\gamma_i = \frac{1}{3}$ у проміжних вузлах $Q8$;

$\gamma_i = -\frac{1}{8}$ у кутових вузлах $Q12$;

$\gamma_i = \frac{3}{16}$ у проміжних вузлах $Q12$.

Зауваження. Від'ємні характеристики кутових «навантажень» – ознака всіх стандартних серендипових СЕ. В інтегральних характеристиках стандартних моделей автор [3] категорично розкритикував моделі як протиприродні. Далі ми покажемо, що здоровий глузд є, а емоційна критика від'ємних характеристик помилкова. Від'ємний результат подвійного інтегрування правильний, але несподіваний для інтуїції інженера, який фактично розв'язує задачу про масу неоднорідної пластини (носія фінітної функції). Сміливі фахівці назвали цей парадокс «гравітаційним відштовхуванням», але це не зовсім переконливо.

Корисно згадати історію виникнення подвійного інтегралу. Подвійні інтеграли вперше були оприлюднені Ейлером у 1769 р. і мали геометричний зміст (об'єм тіла). Згодом з'явилося фізичне тлумачення подвійного інтегралу, наприклад маса неоднорідної пластини. Стереометричний аналіз кутових базисних функцій *a priori* показує, що фізичний підхід до подвійного інтегрування призведе до абсурду. МСЕ вигадали інженери, тому переважна більшість термінів має технічний (фізичний) характер. Непорозуміння зі стандартними $Q8$ і $Q12$ може ліквідувати метод інтерпретацій, конкретно – геометричний підхід.

Із геометричного погляду подвійний інтеграл формули (5) визначає об'єм циліндричного бруса (циліндроїда), а процедура інтегрального усереднення – середню аплікату кутової поверхні $N_i(x, y)$. Читач уже помітив, що з'явився здоровий глузд. А знак «мінус» $(\gamma_i < 0)$ означає, що горизонтальна площина носія перерізає тіло на дві частини: об'єм частини під носієм перевищує об'єм над носієм. Тепер усе зрозуміло і цілком природно. Виникає цікава можливість експериментально визначити математичне сподівання γ_i функції випадкового радіус-вектора. Тут працює метод Монте-Карло, який звільняє інженера від інтегрування складних функцій.

Метод інтерпретацій у математичному моделюванні містить особливу процедуру перекладання початкової задачі на іншу мову і розв'язування вже «іншої» задачі замість початкової. Литовський математик Р. Кашуба дуже точно сказав, що метод інтерпретацій сприяє розповсюдженню демократії, яка допомагає людині змінити точку зору.

Висновки

Несподівані результати локалізації рівномірної одиничної масової сили у кутових вузлах стандартних СЕ дивують фахівців уже понад 50 років. Залучення нових ідей і нових методів

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-2-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

у теорію серендипових апроксимацій здатне змінити (іноді радикально) деякі уявлення. Метод інтерпретацій, а конкретно – геометричний підхід, може ліквідувати непорозуміння зі стандартними серендиповими елементами *Q8* і *Q*12.

Список використаної літератури

1. Akin I.E. Finite Element Analysis with Error Estimators. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. 477 p.
2. Onate E. Structural Analysis with the Finite Element Method. Springer Nether-lands, 2009. 495 p.
3. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
4. Mitchell A.R., Wait R. The Finite Element Method in Partial Differential Equations. London : John Wiley & Sons, 1977. 198 p.
5. Strang G., Fix G.J. An Analysis of the Finite Element Method. New Jersey: Prentice-Hall. Inc, 1973. 306 p.
6. Norrie D.H., de Vries G. An Introduction to Finite Element Analysis. Academic Prees. N.Y., 1978. 304 p.
7. Ergatoudis I., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved isoperimetric quadrilateral elements for finite element analysis, *Int. J. Solids Struct*. 1968. № 4. P. 31–42.
8. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Формоутворення серендипових поверхонь із «прихованими» параметрами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2010. Вип. 4. Т. 48. С. 55–62.
9. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Когнітивно-графічний аналіз ієрархічних базисів скінченних елементів : монографія. Херсон : ОЛДІ-Плюс, 2019. 260 с.
10. Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Згладжені апроксимації біквадратичного скінченного елемента. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2011. Вип. 4, Т. 50. С. 65–71.

References

1. Akin, I.E. (2005). *Finite Element Analysis with Error Estimators*. Elsevier, Butterworth-Heinemann. [in English].
2. Onate, E. (2009). Structural Analysis with the Finite Element Method. Springer Nether-lands. [in English].
3. Zienkiewicz, O.C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill. [in English].
4. Mitchell, A.R., & Wait, R. (1977). The Finite Element Method in Partial Differential Equations, London : John Wiley & Sons. [in English].
5. Strang, G., & Fix, G.J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. [in English].
6. Norrie, D.H., & de Vries, G. (1978). *An Introduction to Finite Element Analysis*. Academic Prees. N.Y. [in English].
7. Ergatoudis, J., Irons, B.M., & Zienkiewicz, O.C. (1968). Curved isoperimetric quadrilateral elements for finite element analysis, *Int. J. Solids Struct*., 4, 31–42. [in English].
8. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., & Astionenko, I.O. (2010). Formoutvorennia serendypovykh poverkhon z «prykhovanymy» parametramy. [Shaping of serendipity surfaces with «hidden» parameters]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Pratsi*. Tavriiskyi derzhavnyi ahrotekhnolohichnyi universytet. Melitopol: TDATU, 48 (4), 55–62. [in Ukrainian].
9. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., Astionenko, I.O. (2019). *Kohnityvno-hrafichnyi analiz iierarkhichnykh bazysiv skinchennykh elementiv*. [Cognitively Graphical Analysis of Hierarchical Bases of Finite Elements]. Monohrafiia. Kherson : OLDI-plius. [in Ukrainian].

10. Khomchenko, A.N., Lytvynenko, O.I., & Astionenko, I.O. (2011). Zghladzheni aproksymatsii bikvadratychnoho skinchennoho elementa [Smoothed approximations of biquadratic finite element]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Pratsi*. Tavriiskyi derzhavnyi ahrotekhnolohichnyi universytet. Melitopol: TDATU, 50 (4), 65–71. [in Ukrainian].

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили. E-mail: khan@chmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Дудченко Олег Миколайович – к.т.н., професор кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін, заступник директора з навчальної роботи Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. E-mail: kbnuos@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7724-0892.

Гучек Петро Йосипович – д.т.н., завідувач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова; професор Університету VIZJA, Варшава, Польща. E-mail: phuchek@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6110-6816.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри інформатики і комп’ютерних наук Херсонського національного технічного університету. E-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.

Khomchenko Anatolij Nykyforovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Intelligent Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Lytvynenko Olena Ivanivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Dudchenko Oleg Mykolaiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding. E-mail: kbnuos@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7724-0892.

Guchek Petro Yosypovych – Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Information Technologies and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding; Professor at VIZJA University, Warsaw, Poland. E-mail: phuchek@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6110-6816.

Astionenko Ihor Oleksandrovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Informatics and Computer Science of the Kherson National Technical University. E-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.

Дата надходження статті: 28.10.2025
Дата прийняття статті: 09.12.2025
Опубліковано: 30.12.2025