

УДК 517.9

О.П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО

Азовський морський інститут національного університету "Одеська морська академія"

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ВАЛКА ПРОКАТНОГО СТАНУ З РІЗНИМИ УМОВАМИ ТЕПЛООБМІНУ НА ПОВЕРХНІ

У роботі розглядається математична модель радіаційно-конвективного теплообміну, що виникає під час термічної обробки або пластичної деформації між валком прокатного стану та металом, що розігрівається. Розглядається температурне поле порожнистого валка циліндричної форми, що обертається навколо своєї осі із сталою кутовою швидкістю та розігрівається від металу, який має сталу температуру у зоні контакту. За межами зони контакту з металом валок віддає тепло в оточуюче їх середовище. Побудована фізична модель процесу теплообміну у якій розглянуто термічно тонкий порожнистий циліндр, температурне поле якого слабо залежить від радіуса циліндра. Джерелом тепла, що розігріває тіло валка, є рухома стрічка, яка передає тепло зовнішній поверхні валка.

Математична модель розглядається у вигляді крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності з нелінійними граничними умовами у циліндричній системі координат. У початковий момент часу на бічній поверхні та на основах валки мають сталу початкову температуру. На поверхні у зоні контакту температура валка дорівнює температурі металу, що обробляється, а на іншій частині поверхні валка відбувається теплообмін з оточуючим середовищем за законом Стефана-Больцмана. Показано, що при великій кількості обертів валка функція температури поверхні стає періодичною з періодом обертання валка навколо своєї осі, температурне поле стабілізується.

Розглядається спрощена математична модель температурного поля радіального перерізу валка. При такому спрощенні у рівнянні теплопровідності похідна за осьовою координатою зникає. Запропоновано метод та алгоритм розв'язання задачі. Вони включають у себе розгляд усередненої за радіусом температури валка прокатного стану. Для знаходження температурного розподілу розв'язання крайової задачі зведено до розв'язання еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна. Функція Гріна побудована у вигляді тригонометричного ряду з коефіцієнтами – функціями Бесселя першого роду  $n$ -го порядку, що є розв'язком власної спектральної задачі з параметром.

В якості спрощення розглянуто тонкий у термічному відношенні порожнистий циліндр, температурне поле якого слабо залежить від радіуса, та здійснено перехід до розгляду усередненої температури по радіусу.

Розглянуто термодинамічний стан, що встановлюється через деякий час після початку процесу, в результаті чого функція Гріна стає періодичною за кутовою координатою та за часом.

Ключові слова: математична модель, валок прокатного стану, періодична задача теплопровідності, метод інтегральних рівнянь, функція Гріна.

О.П. ДЕМ'ЯНЧЕНКО

Азовский морской институт национального университета "Одесская морская академия"

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПОЛОГО ВАЛКА ПРОКАТНОГО СТАНА С РАЗНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТЕПЛООБМЕНА НА ПОВЕРХНОСТИ

В работе рассматривается математическая модель радиационно-конвективного теплообмена, которая возникает во время термической обработки между валком прокатного стана и разогретым металлом. Рассматривается температурное поле полого валка цилиндрической формы, вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью и разогревающегося от металла, который имеет постоянную температуру в зоне контакта. За пределами зоны контакта с металлом валок отдает тепло в окружающую его среду. Построена физическая модель процесса теплообмена, в которой рассмотрен термически тонкий полый цилиндр, температурное поле которого слабо зависит от радиуса цилиндра. За пределами взаимодействия с металлом валок отдает тепло в окружающую их среду.

Математическая модель рассматривается в виде краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями в цилиндрической системе координат.

<https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.8>

*Источником тепла, который разогревает тело валка, является движущаяся лента, передающая тепло на внешнюю поверхность валка. В начальный момент времени на поверхности и на торцах валка имеют постоянную начальную температуру. На поверхности в зоне контакта температура валка равна температуре обрабатываемого металла, а на другой части поверхности валка происходит теплообмен с окружающей средой по закону Стефана-Больцмана. При значительном количестве оборотов функция температуры поверхности становится периодической с периодом вращения валка вокруг своей оси.*

*Рассматривается упрощенная математическая модель температурного поля сечения, перпендикулярного к оси вращения полого валка в условиях вышеприведенной задачи. При таком упрощении в уравнении теплопроводности производная по осевой координате исчезает. Предложен метод и алгоритм решения задачи. Алгоритм включает в себя рассмотрение усредненной по радиусу температуры валка прокатного стана. Для нахождения температурного распределения решение краевой задачи сведено к решению эквивалентного ей нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна с ядром в виде функции Грина. Функция Грина построена в виде тригонометрического ряда с коэффициентами – функциями Бесселя первого рода  $n$ -го порядка, являющегося решением собственной спектральной задачи с параметром.*

*В качестве упрощения рассмотрен тонкий в термическом отношении полый цилиндр, температурное поле которого слабо зависит от радиуса, и осуществлен переход к рассмотрению усредненной температуры по радиусу.*

*Рассмотрено термодинамическое состояние, которое устанавливается через некоторое время после начала процесса, в результате чего функция Грина оказывается периодической по угловой координате, и по времени.*

*Ключевые слова: валок прокатного стана, математическая модель, периодическая задача теплопроводности, метод интегральных уравнений, функция Грина.*

O. DEMYANCHENKO

Mariupol, Azov Maritime Institute of National University “Odessa Maritime Academy”, Ukraine

## MATHEMATICAL MODEL OF THE TEMPERATURE FIELD OF A HOLLOW ROLL OF ROLLING MILL WITH DIFFERENT CONDITIONS HEAT EXCHANGE ON THE SURFACE

*The paper considers a mathematical model of radiation-convective heat transfer, which occurs during heat treatment between the roll of a roller mill and the heated metal. We consider the temperature field of a hollow cylindrical roll rotating around its axis at a constant angular velocity and heating up from a metal that has a constant temperature in the contact zone. Outside the contact zone with the metal, the roll gives off heat to its environment. A physical model of the heat transfer process is constructed, in which a thermally thin hollow cylinder is considered, the temperature field of which weakly depends on the radius of the cylinder. Outside of interaction with the metal, the roll gives off heat to the surrounding medium.*

*The mathematical model is considered in the form of a boundary value problem for a homogeneous heat equation with nonlinear boundary conditions in a cylindrical coordinate system. The heat source that heats up the roll body is the moving belt, which transfers heat to the outside of the roll. At the initial moment of time on the surface and at the ends of the rolls have a constant initial temperature. On the surface in the contact zone, the temperature of the roll is equal to the temperature of the metal being processed, and on the other part of the roll surface, heat exchange with the environment takes place according to the Stefan-Boltzmann law. At a significant number of revolutions, the surface temperature function becomes periodic with the period of rotation of the roll around its axis.*

*A simplified mathematical model of the temperature field of the section perpendicular to the axis of rotation of the hollow roll under the conditions of the above problem is considered. With such a simplification, the derivative with respect to the axial coordinate in the heat conduction equation vanishes. A method and an algorithm for solving the problem are proposed. The algorithm includes consideration of the radius-averaged temperature of the rolling mill roll. To find the temperature distribution, the solution to the boundary value problem is reduced to solving an equivalent nonlinear integral equation of the Hammerstein type with a kernel in the form of the Green's function. The Green's function is constructed in the form of a trigonometric series with coefficients - Bessel functions of the first kind of the  $n$ -th order, which is a solution to an own spectral problem with a parameter.*

*As a simplification, a thermally thin hollow cylinder, whose temperature field weakly depends on the radius, is considered, and a transition is made to the consideration of the averaged temperature over the radius.*

*A thermodynamic state is considered, which is established some time after the start of the process, as a result of which the Green's function turns out to be periodic in the angular coordinate and in time.*

*Key words: roll of a rolling mill, mathematical model, periodic problem of heat conduction, method of integral equations, Green's function.*

### Постановка проблеми

Валки прокатних станів є досить дорогим інструментом у прокатному виробництві. Під час термічної обробки та прокатки, тепло, що виділяється, сприяє деформації і руйнуванню валків прокатного стану. Для продовження терміну експлуатації валків, необхідно досліджувати теплові процеси, що відбуваються всередині валка і на його поверхні під час прокатки [1, 2].

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Багато авторів, які працюють у прокатному виробництві, в більшості випадків розглядають температурний розподіл не у валку прокатного стану і на його поверхні, а у листу, що прокатується валками [3, 4]. Також розглядаються моделі температурного розподілу у валку, коли сам валок знаходиться без руху [5, 6] і розв'язок відповідної задачі отримують за допомогою чисельних методів, зокрема методом кінцевих елементів [7]. Крім того, увага спрямована на економію ресурсів, тобто, споживання електрики, витрату води для охолодження, тощо [5]. Аналітичний розв'язок задачі температурного розподілу у валку і на його поверхні не розглядається, тому прогнозування поточного і усталеного процесів утруднено. Крім того, задачі, у яких досліджуються температурні розподіли валків у залежності від часу обертання валка навколо своєї осі і умов теплообміну, що залежать від кута повороту валка навколо осі, не розглядалися. Тобто, задачі з різними умовами теплообміну поверхні валка з оточуючим середовищем у вітчизняній та закордонній науковій літературі практично не розглядаються.

### Мета роботи

Метою роботи є побудова математичної моделі температурного поля обмеженого порожнистого циліндра (валка прокатного стану), що обертається навколо своєї осі та різними умовами теплообміну поверхні з оточуючим середовищем, а також дослідження періодичного стану термодинамічної рівноваги.

### Викладення основного матеріалу

У металургійній промисловості прокатка металевої стрічки та дроту відбувається на прокатних станах, у яких робочим інструментом є валки, що мають циліндричну форму та вмонтовані у прокатну клітку.

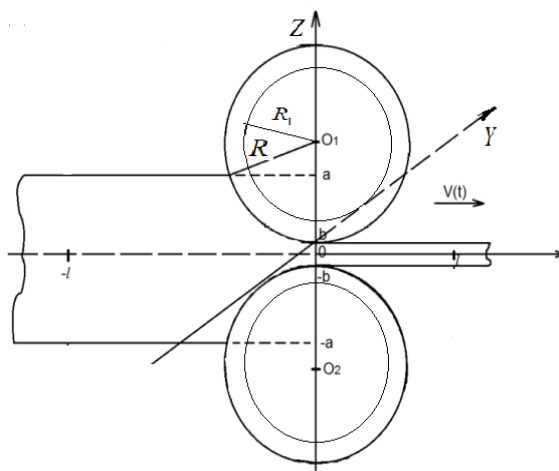


Рис. 1 Схема прокатки металевої стрічки.

Дослідження температурних розподілів у прокатній клітці є важливою задачею проектування інструменту та технологічного процесу прокатки металевих виробів. З математичної точки зору це призводить до розв'язання початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності у циліндричній області із зовнішніми джерелами тепла та складними умовами теплообміну на поверхні валків [8].

Математична модель температурного порожнистого валка під час термічної обробки та прокатки металевої стрічки приводить до задач визначення температурного поля циліндра, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega$ , коли тепловий потік інтенсивності  $q = const$  ортогональний до осі обертання. Ця задача зводиться до розв'язання такої початково-крайової задачі в області  $\Omega \times t = \{(r, \varphi, z, t) | R_1 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi, z > 0, t > 0\}$  [8, 9]:

$$\begin{aligned} \Delta u - \frac{1}{a^2} u_t &= 0 \\ u(r, \varphi, 0) &= u_0, \quad u(r, \varphi + 2\pi, t) = u(r, \varphi, t) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} &= -h_2 u + \bar{F}(\varphi, t, u), \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\bar{F}(\varphi, t, u) = \begin{cases} h_2 u_M & \omega t < \varphi < \varphi_0 + \omega t, \\ (h_2 - h_1)u + h_1 u_0 + \kappa(u_c^4 - u^4), & \omega t + \varphi_0 < \varphi < \omega t + 2\pi, \end{cases}$ ,  $\Delta$  – оператор

Лапласа у циліндричній системі координат [10],  $u_M$  – температура металу;  $R$  та  $R_1$  – зовнішній та внутрішній радіуси циліндра. За умовами технологічного процесу можна вважати, що температура у напрямі осі  $OZ$  не змінюється, тому можна покласти, що  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$  і у подальших розрахунках на неї не зважати.

Якщо порожнистий циліндр є тонким у термічному відношенні, тобто, температурне поле слабо залежить від радіуса, то можна перейти до розгляду усередненої температури за радіусом [10]

$$\bar{u}(\varphi, t) = \frac{2}{R^2 - R_1^2} \int_{R_1}^R u(r, \varphi, t) r dr. \quad (2)$$

Після усереднення (2) задачі (1) отримаємо наступну початково-крайову задачу в області  $\Omega \times t = \{(\varphi, t) | 0 < \varphi < 2\pi, t > 0\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\bar{a}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu \bar{u} &= F(\varphi, t, \bar{u}), \\ \bar{u}(\varphi, 0) &= u_0, \quad \bar{u}(\varphi + 2\pi, t) = \bar{u}(\varphi, t) \end{aligned}, \quad (3)$$

де  $\bar{a} = \frac{a}{r_{cp}}$ ,  $\mu = \frac{2h_2 R r_{cp}^2}{R^2 - R_1^2}$ ,  $F(\varphi, t, \bar{u}) = -\frac{\mu}{h_2} \bar{F}(\varphi, t, \bar{u})$ ,  $r_{cp}$  – середнє значення радіуса стінки порожнистого циліндра,  $r_{cp} \in [R_1, R_2]$ .

Для знаходження розв'язку задачі (3) перейдемо до розгляду еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма за кутовою координатою  $\varphi$  та

типу Вольтера за часом  $t$  [11, 12]. Для цього скористаємося другою формулою Гріна оператора задачі (3) для функцій  $u$  та  $v$ , періодичних по  $\varphi$  з періодом  $2\pi$  [13]:

$$\int_0^{\tau+0} \int_{\omega t}^{\omega t+2\pi} \left[ v \left( \Delta_\varphi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mu \bar{u} \right) - \bar{u} \left( \Delta_\varphi v + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t} - \mu v \right) \right] d\varphi dt = -\frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} (\bar{u}v) \Big|_0^{\tau+0} d\varphi. \quad (4)$$

Розглянемо функцію Гріна  $G(\varphi - \psi; t - \tau)$ , що є розв'язком спряженої задачі для початково-крайової задачі (3) в області  $\Omega \times t = \{(\varphi, \psi; t, \tau) \mid 0 < \varphi, \psi < 2\pi, t, \tau > 0\}$ .

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} - \mu G + \frac{1}{a} \frac{\partial G}{\partial t} = -\delta(\varphi - \psi) \delta(t - \tau), \quad (5)$$

$$G(\varphi - \psi; t - \tau) = 0, \quad t > \tau; \quad G(\varphi + 2\pi - \psi, t - \tau) = G(\varphi - \psi; t - \tau)$$

Функцію Гріна представимо у вигляді ряду

$$G(\varphi - \psi; t - \tau) = \frac{\bar{a}^2}{\pi} \eta(t - \tau) \sum_{j=0}^{\infty} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau)} \cos j(\varphi - \psi), \quad (6)$$

де  $\eta(t - \tau)$  – функція Хевісайда; штрих «<sup>1</sup>» біля символу суми означає, що для  $j = 0$  усі члени ряду зменшуються вдвічі.

Поклавши в (4)  $v = G(\varphi - \psi; t - \tau)$  та враховуючи умови задач (3) та (5), отримаємо інтегральне рівняння для визначення усередненої по радіусу  $\bar{u}(\psi, \tau)$

$$\bar{u}(\psi, \tau) = \bar{u}_L(\psi, \tau) - \mu_2 \int_0^{\tau} \int_{\omega t + \varphi_0}^{\omega t + 2\pi} G(\varphi - \psi; t - \tau) \Phi[\bar{u}(\varphi, t)] d\varphi dt, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_L = \frac{u_0}{\bar{a}^2} \int_0^{2\pi} G(\varphi - \psi; 0 - \tau) d\varphi + \mu u_M \int_0^{\tau} \int_{\omega t}^{\omega t + \varphi_0} G(\varphi - \psi; t - \tau) d\varphi dt + \\ + \frac{\mu}{h_2} (h_1 u_c + \kappa u_c^4) \int_0^{\tau} \int_{\omega t + \varphi_0}^{\omega t + 2\pi} G(\varphi - \psi; t - \tau) d\varphi dt, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\Phi[\bar{u}(\varphi, t)] = (h_1 - h_2 + \kappa \bar{u}^3) \bar{u}$ .

Після підстановки (6) у вираз (8) та інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned} \bar{u}_L(\psi, \tau) = u_0 e^{-\bar{a}^2 \mu \tau} + \frac{1}{2\pi h_2} (1 - e^{-\bar{a}^2 \mu \tau}) \left[ \varphi_0 h_2 u_M + (2\pi - \varphi_0) (h_1 u_c + \kappa u_c^4) \right] + \\ + \frac{\mu \bar{a}^2}{\pi h_2} \left[ h_2 u_M - (h_1 u_c + \kappa u_c^4) \right] \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{j} \sin j \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{j^2 \omega^2 + \bar{a}^4 (\alpha + j^2)}} \times \\ \left\{ \sin \left[ j \left( \omega \tau - \psi + \frac{\varphi_0}{2} \right) + \beta_j \right] - e^{-\bar{a}^2 (\mu + j^2) \tau} \sin \left[ j \left( \frac{\varphi_0}{2} - \psi \right) + \beta_j \right] \right\}, \end{aligned}$$

де  $\operatorname{tg} \beta_j = \frac{\bar{a}^2 (\mu + j^2)}{j \omega}$ .

При розв'язанні задач для інженерної практики, врахуємо, що через деякий час після початку процесу встановлюється стан термодинамічної рівноваги, коли температурний розподіл не залежить від часу, а розв'язок можна шукати на проміжку  $(N+q)T \leq \tau \leq (N+q+1)T$ , де  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  – період (тривалість одного обороту циліндра навколо своєї осі). При  $N \gg 1$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ) вплив початкової температури зникає і тоді

$$\bar{u}_L(\psi, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{u}_L(\psi, \tau) = \frac{1}{2\pi h_2} \left[ \varphi_0 h_2 u_M + (2\pi - \varphi_0)(h_1 u_c + u_c^4) \right] + \left[ h_2 u_M - (h_1 u_c + \kappa u_c^4) \right] \frac{\mu \bar{a}^2}{\pi h_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{j} \sin j \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{j^2 \omega^2 + \bar{a}^4 (\alpha + j^2)^2}} \times \sin \left[ j \left( \omega \tau - \psi + \frac{\varphi_0}{2} \right) + \beta_j \right],$$

оскільки  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\bar{a}^2(\mu+j^2)\tau} = 0$ .

Підставляючи (5) у нелінійну складову розв'язку (6), отримаємо [8]:

$$\frac{\mu}{h_2} \int_0^{\tau} \int_{\omega t + \varphi_0}^{\omega t + 2\pi} G(\varphi - \psi; t - \tau) \Phi[\bar{u}(\varphi, t)] d\varphi dt = \frac{\mu \bar{a}^2}{\pi h_2} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\tau} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau)} F(t) dt, \quad (9)$$

де  $F(t) = \int_{\omega t + \varphi_0}^{\omega t + 2\pi} \cos j(\varphi - \psi) \Phi[\bar{u}(\varphi, t)] d\varphi$ . Поклавши у правій частині рівняння (9)

$\tau = (N+q)T + \tau'$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $q \sim N$ , отримаємо

$$\int_0^{\tau} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau)} F(t) dt = \int_0^{NT} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau)} F(t) dt + \int_{NT}^{(N+q)T} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau)} F(t) dt + \int_{(N+q)T}^{(N+q)T+\tau'} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau)} F(t) dt. \quad (10)$$

Обчисливши інтеграли, що входять в останню рівність маємо

$$\int_0^{NT} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau)} F(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(N+q)T} \int_0^{NT} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau')} F(t) dt = 0,$$

як добуток нескінченно малої функції на обмежену:  $q \sim N \rightarrow \infty$ .

Другий інтеграл з (10) розглянемо у припущенні, що  $\bar{u}(\varphi, t)$  – періодична функція з періодом  $T$  по змінній  $t$  [8]. Проінтегруємо його частинами та матимемо:

$$\int_{NT}^{(N+q)T} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau)} F(t) dt = \frac{1}{e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)T} - 1} \cdot \left[ \int_0^{\tau'} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t'-\tau')} F(t') dt' + \int_{\tau'}^T e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t'-\tau')} F(t') dt' \right],$$

оскільки  $\sum_{i=1}^q e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(i-q)T} = \frac{1}{1 - e^{-\bar{a}^2(\mu+j^2)T}}$  – нескінченно спадна геометрична прогресія  $q \sim N \rightarrow \infty$ .

Перетворимо інтеграл

$$\int_{(N+q)T}^{(N+q)T+\tau'} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-(N+q)T-\tau')} F(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} t = (N+q)T + \tau' \\ dt = dt' \end{array} \right\} = \\ = \int_0^{\tau'} e^{\bar{a}^2(\mu+j)(t'+(N+q)T-(N+q)T-\tau')} F((N+q)T+t') dt' = \int_0^{\tau'} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t'-\tau')} F(t') dt'.$$

Після такого граничного переходу рівняння (7) перетворюється у нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна [10]

$$\bar{u}(\psi, \tau) = \bar{u}_L(\psi, \tau) - \frac{\mu}{h_2} \int_0^T \int_{\omega t + \varphi_0}^{\omega t + 2\pi} K(\varphi - \psi; t - \tau) \Phi[\bar{u}(\varphi, t)] d\varphi dt, \quad (11)$$

$$K(\varphi - \psi; t - \tau) = \frac{\bar{a}^2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos j(\varphi - \psi) \cdot e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)(t-\tau')}}{e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)T} - 1} \begin{cases} e^{\bar{a}^2(\mu+j^2)T}, & t < \tau, \\ 1 & t > \tau. \end{cases} \quad (12)$$

Із періодичності ядра (12) та вільного члена інтегрального рівняння (11)  $K(\varphi - \psi - 2\pi; t - \tau) = K(\varphi - \psi; t - \tau) = K(\varphi - \psi - 2\pi; t - \tau - T)$  та  $\bar{u}_L(\psi + 2\pi, \tau) = \bar{u}_L(\psi, \tau)$  слідує, що температурне поле (11) періодичне по  $\varphi$  та по  $t$  з періодами  $2\pi$  и  $T$  відповідно. Це дозволяє замість початково-крайової задачі (3) розглядати періодичну по  $t$  задачу в області  $\Omega \times t = \{(\varphi, t) \mid 0 < \varphi < 2\pi, 0 < t < T\}$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \alpha \bar{u} = F(\varphi, t, \bar{u}),$$

$$\bar{u}(\varphi, T) = \bar{u}(\varphi, 0), \quad \bar{u}(\varphi + 2\pi, t) = \bar{u}(\varphi, t) \quad (13)$$

За допомогою відповідної функції Гріна  $\bar{G}(\varphi - \psi; t - \tau)$  по змінним  $\varphi$  та  $t$  задача (13) зводиться до розв'язання інтегрального рівняння (11). При цьому  $K(\varphi - \psi; t - \tau) = \bar{G}(\varphi - \psi; t - \tau)$ , де функція Гріна  $\bar{G}(\varphi - \psi; t - \tau)$  є розв'язком такої задачі

$$\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial \varphi^2} - \alpha \bar{G} + \frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = -\delta(\varphi - \psi) \delta(t - \tau), \quad 0 < \varphi, \psi < 2\pi, t, \tau > 0,$$

$$\bar{G}(\varphi - \psi; T - \tau) = \bar{G}(\varphi - \psi; 0 - \tau),$$

$$\bar{G}(\varphi + 2\pi - \psi; t - \tau) = \bar{G}(\varphi - \psi; t - \tau).$$

Для отримання наближеного розв'язку нелінійного інтегрального рівняння (11) застосовано проєкційно-сітковий метод [7]. Проведені чисельні експерименти, побудовані графіки температурних розподілів.

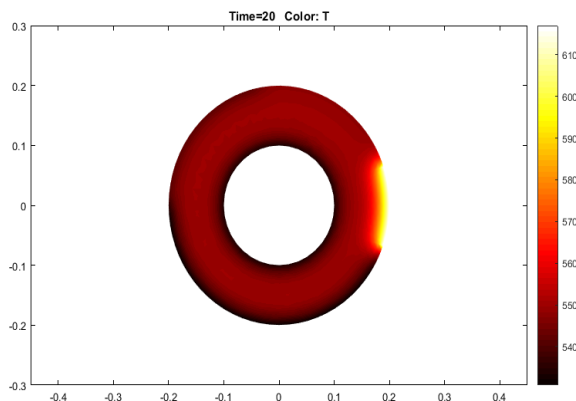


Рис. 2 Температурний розподіл порожнистого циліндру

### Висновки

Розглянуто та досліджено математичну модель температурного поля обмеженого порожнистого циліндра (валка прокатного стану), що обертається навколо своєї осі з різними умовами теплообміну поверхні з оточуючим середовищем, у вигляді третьої крайової задачі теплопровідності. Задача розв’язана аналітичним методом шляхом зведення крайової задачі до розв’язання еквівалентного їй інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна. Розглянуто спрощену математичну модель температурного поля перерізу порожнистого валка, перпендикулярного до осі його обертання. Розглянуто ustalений періодичний стан – стан термодинамічної рівноваги. Побудовано графік температурного розподілу порожнистого циліндра.

### Список використаної літератури

1. Ляшенко В. П., Аниськов О. В. Математична модель прокатки тонкої і надтонкої стрічки із тугоплавких і важкодеформованих металів. *Вісник Криворізького нац. ун-ту*. Кривий Ріг, 2016. Вип. 42. С. 68–72.
2. Ляшенко В. П., Козир А. Е., Дем’янченко О. П. Математична модель зі складними умовами теплообміну у сферичній області. *Вісник Кременчуцького нац. ун-ту ім. М. Остроградського*. Кременчук, 2017. Вип. 5. С. 21–27.
3. Тришевський О. І., Салтавець Н. В. Дослідження теплового стану штаби при прокатці: *Вісник НТУ ХП*. Тематичний випуск «Нові рішення в сучасних технологіях». 2013. Вип. 42. С. 41–47.
4. Тришевский О. И., Салтавец Н. В. Разработка математической модели теплового состояния полосы при прокатке. Москва, 2009. 49 с.
5. Тришевський О. І., Салтавець Н. В., Юрченко О. А. Розробка математичної моделі теплового стану валка при гарячій прокатці листа. *Вост.-Европ. журнал передових технологій*. 2009. № 5/4 (41). С. 14–18.
6. Салтавець В. І., Салтавець М. В. Розробка математичної моделі теплового стану металу під час прокатки. *Науковий вісник будівництва*. Харків, 2003. Вип. 21. С. 162–169.
7. Беляев Н. М., Рядно А. А. Математические методы теплопроводности. Киев, 1993. 415 с.
8. Дем’янченко О. П., Ляшенко В. П. К расчету температурного поля теплоизлучающего полого цилиндра. *Вестник ХГТУ*. 2002. № 2(15). С. 154–159.
9. Березовський А. А., Дем’янченко О. П. Періодична задача складного теплообміну. *Сучасні проблеми математики: матеріали Міжнародної наукової конференції, 1998, Чернівці*. Ч.1. Київ, 1998. С. 41–44.



10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва: Высшая школа, 1967. 599 с
11. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ : справ. пособие. Киев, 1978. 292 с.
12. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев, 1976. 320 с.
13. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. Москва, 1970. 712 с.

#### References

1. Liashenko, V. P., & Aniskov, O. V. (2016). Matematychna model prokatky tonkoi i nadtonkoi strichky iz tuhoplavkykh i vazhkodeformovanykh metaliv. *Visnyk Kryvorizkoho nats. un-tu*. Kryvyi Rih, **42**, 68–72.
2. Liashenko, V. P., Kozyr, A. E., & Demyanchenko, O. P. (2017). Matematychna model zi skladnymy umovamy teploobminu u sferychnii oblasti. *Visnyk Kremenchutskoho nats. un-tu im. M. Ostrohradskoho*. Kremenchuk, **5**, 21–27.
3. Tryshevskiy, O. I., & Saltavets, N. V. (2013). Doslidzhennia teplovoho stanu shtaby pry prokattsi: *Visnyk NTU KhPI*. Tematychnyi vypusk «Novi rishennia v suchasnykh tekhnolohiiakh». **42**, 41–47.
4. Tryshevskiy, O. Y., & Saltavets, N. V. (2009). Razrabotka matematycheskoi modely teplovoho sostoianiya polosyi pry prokatke. Moskva.
5. Tryshevskiy, O. I., Saltavets, N. V., & Yurchenko, O. A. (2009). Rozrobka matematychnoi modeli teplovoho stanu valka pry hariachii prokattsi lysta. *Vost.-Evrop. zhurnal peredovykh tekhnolohiy*. Kharkiv, **5/4** (41), 14–18.
6. Saltavets, V. I., & Saltavets, M. V. (2003). Rozrobka matematychnoi modeli teplovoho stanu metalu pid chas prokatky. *Naukovyi visnyk budivnytstva*. Kharkiv, **21**, 162–169.
7. Belyaev, N. M., & Ryadno, A. A. (1993). Matematicheskie metodyi teploprovodnosti, Kiev.
8. Demyanchenko, O. P., & Lyashenko, V. P. (2002). K raschetu temperaturnogo polya teploizluchayushego pologo tsilindra. *Vestnik HGTU*. **2**(15), 154–159.
9. Berezovskiy, A. A., & Demyanchenko, O. P. (1998). Periodychna zadacha skladnoho teploobminu. *Suchasni problemy matematyky: materialy Mizhnarodnoi naukovoii konferentsii, 1998, Chernivtsi. Ch.1*. Kyiv, pp. 41–44.
10. Lyikov, A. V. (1967). Teoriya teploprovodnosti. Moskva: Vysshaya shkola.
11. Verlan, A. F., & Sizikov, V. S. (1978). Metodyi resheniya integralnykh uravneniy s programmami dlya EVM : sprav. posobie. Kiev.
12. Galitsyin, A. S., & Zhukovskiy, A. N. (1976). Integralnyie preobrazovaniya i spetsialnyie funktsii v zadachah teploprovodnosti. Kiev.
13. Koshlyakov, N. S., Gliner, E. B., & Smirnov, M. M. (1970). Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematycheskoy fiziki. Moskva.

Дем'янченко Ольга Пантеліївна – к.т.н., старший викладач кафедри «Інженерії та технологій» Азовського морського інституту національного університету «Одеська морська академія». E-mail: [olgademyanchenko@gmail.com](mailto:olgademyanchenko@gmail.com), ORCID <https://orcid.org/0000-0002-4693-0364>.