

УДК 536.21

Р.С. МУСИЙ, У.В. ЖИДИК, Н.Б. МЕЛЬНИК, В.К. ШИНДЕР, О.М. М'ЯУС,
Р.А. НАКОНЕЧНИЙ
Національний університет "Львівська політехніка"

ВИЗНАЧЕННЯ І АНАЛІЗ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРІДНІЙ АНІЗОТРОПНІЙ ОБОЛОНЦІ ЗА ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВУ

Сформульована нестационарна задача теплопровідності для неоднорідної анізотропної оболонки, яка обмінюється теплом із навколишнім середовищем за законом Ньютона та нагрівається нестационарними джерелами тепла. Матеріал оболонки є неоднорідним за товщиною і анізотропним з одною площиною теплової симетрії.

По аналогії з теорією пружності для оболонок просторову задачу теплопровідності зведено до математично простішої двовимірної задачі. Таке спрощення відповідає першому наближенню Лява і має місце для тонкостінних конструкцій. Записано двовимірні рівняння теплопровідності неоднорідних анізотропних оболонок для двох часто використовуваних законів розподілу температури по товщині оболонки: кубічного та лінійного розподілів.

Для оболонки, складеної з пакету жорстко з'єднаних між собою однорідних анізотропних шарів різної товщини, прийнято, що гіпотеза про характер розподілу температури по товщині виконується для всього пакету. Теплофізичні характеристики шаруватой оболонки як одного цілого подано за допомогою асиметричних одиничних функцій. Для випадку такої кусково-неперервної неоднорідності отримано вирази інтегральних характеристик теплофізичних параметрів через фізичні властивості шарів.

Для неоднорідної кругової замкненої ортотропної циліндричної оболонки скінченної довжини і сталої товщини з використанням подвійного скінченного перетворення Фур'є за координатами та інтегрального перетворення Лапласа за часом записано загальний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності.

Досліджено температурне поле шаруватой циліндричної оболонки антисиметричної регулярної структури, осі ортотропії кожного шару якої по чергово орієнтовані паралельно і перпендикулярно до координатних осей. Чисельно проаналізовано розподіл температури у двошаровій графітоепоксидній композитній оболонці за локального її нагрівання у початковий момент часу заданим температурним полем або довкіллям шляхом конвективного теплообміну. Досліджено залежність інтегральних характеристик температури від фізичних та геометричних параметрів оболонки.

Ключові слова: нестационарна теплопровідність, анізотропна оболонка, шаруватість, локальний нагрів.

Р.С. МУСИЙ, У.В. ЖИДИК, Н.Б. МЕЛЬНИК, В.К. ШИНДЕР, О.Н. МЯУС,
Р.А. НАКОНЕЧНИЙ
Национальный университет "Львовская политехника"

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ

Сформулирована нестационарная задача теплопроводности для неоднородной анизотропной оболочки, которая обменивается теплом с окружающей средой по закону Ньютона и нагревается нестационарными источниками тепла. Материал оболочки неоднородный по толщине и анизотропный с одной плоскостью тепловой симметрии.

По аналогии с теорией упругости для оболочек пространственную задачу теплопроводности сведено к математически более простой двумерной задаче. Такое упрощение соответствует первому приближению Лява и имеет место для тонкостенных конструкций. Записаны двухмерные уравнения теплопроводности неоднородных анизотропных оболочек для двух часто используемых законов распределения температуры по толщине оболочки: кубического и линейного распределений.

Для оболочки, составленной из пакета жестко соединенных между собой однородных анизотропных слоев различной толщины, принято, что гипотеза о характере распределения температуры по толщине выполняется для всего пакета. Теплофизические характеристики слоистой оболочки как одного целого поданы с помощью асимметричных единичных функций. Для случая такой кусочно-непрерывной неоднородности получены выражения интегральных характеристик теплофизических параметров через физические свойства слоев.

Для неоднородной круговой замкнутой ортотропной цилиндрической оболочки конечной длины и постоянной толщины с использованием двойного конечного преобразования Фурье по координатам и интегрального преобразования Лапласа по времени записано общее решение нестационарной задачи теплопроводности.

Исследовано температурное поле слоистой цилиндрической оболочки антисимметричной регулярной структуры, оси ортотропии каждого слоя которой поочередно ориентированы параллельно и перпендикулярно к координатным осям. Численно проанализировано распределение температуры в двухслойной графитэпоксидной композитной оболочке при ее локальном нагреве в начальный момент времени заданным температурным полем или окружающей средой путем конвективного теплообмена. Исследована зависимость интегральных характеристик температуры от физических и геометрических параметров оболочки.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, анизотропная оболочка, слоистость, локальный нагрев.

R.S. MUSII, U.V. ZHYDYK, N.B. MELNYK, V.K. SHYNDER, O.M. MYAUS,
R.A. NAKONECHNYI
Lviv Polytechnic National University

DETERMINATION AND ANALYSIS OF THE TEMPERATURE FIELD IN INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC COVER UNDER LOCAL HEATING

A nonstationary thermal conductivity problem is formulated for an inhomogeneous anisotropic shell, which exchanges heat with the environment according to Newton's law and is heated by nonstationary heat sources. The shell material is inhomogeneous in thickness and anisotropic with one plane of thermal symmetry.

By analogy with the theory of elasticity for shells, the spatial problem of thermal conductivity is reduced to a mathematically simpler two-dimensional problem. This simplification corresponds to the first Liav approximation and occurs for thin-walled structures. Two-dimensional equations of thermal conductivity of inhomogeneous anisotropic shells are recorded for two frequently used laws of temperature distribution over shell thickness: cubic and linear distributions.

For a shell composed of a package of rigidly interconnected homogeneous anisotropic layers of different thickness, it is assumed that the hypothesis about the nature of the temperature distribution over the thickness holds for the whole package. The thermophysical characteristics of the layered shell as a whole are given by asymmetric unit functions. For the case of such piecewise continuous inhomogeneity, the expressions of the integral characteristics of thermophysical parameters due to the physical properties of the layers are obtained.

For an inhomogeneous circular closed orthotropic cylindrical shell of finite length and constant thickness using the double-finite coordinate Fourier transform and the Laplace integral over time, the general solution of the nonstationary thermal conductivity problem is written.

The temperature field of a layered cylindrical shell of antisymmetric regular structure, the orthotropy axes of each layer of which are alternately oriented parallel and perpendicular to the coordinate axes, is investigated. The temperature distribution in the two-layer graphite-epoxy composite shell under local heating at the initial moment of time by a given temperature field and environment by convective heat exchange is numerically analyzed. The dependence of the integral characteristics of the temperature on the physical and geometrical parameters of the shell is investigated.

Keywords: nonstationary thermal conductivity, anisotropic shell, stratification, local heating.

Постановка проблеми

У зв'язку з широким застосуванням неоднорідних анізотропних матеріалів для виготовлення елементів конструкцій, що перебувають під впливом інтенсивного нагрівання, необхідно вдосконалювати математичні моделі теплопровідності таких елементів, зокрема, для шаруватих циліндричних оболонок. Це необхідно для прогнозування температурних режимів їх експлуатації за умов локального нагрівання, що часто використовується у відповідних технологічних процесах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Неоднорідні оболонки є елементами багатьох сучасних конструкцій, які працюють в умовах інтенсивного нагрівання [1-5]. Найбільшого застосування знайшли

конструкції з неперервною неоднорідністю (функціонально градієнтні) [6-8] та кусково-однорідні (шаруваті) [3, 9, 10]. Кусково-однорідні матеріали, зокрема, використовують в конструкціях термостатів, для інтенсифікації передачі тепла, для ізоляції, для захисту від агресивних середовищ, для збільшення або зменшення жорсткості. Для дослідження термопружного стану шаруватих оболонок, що нерівномірно нагріваються, потрібно попередньо визначити температурне поле, розподіл якого в оболонці наперед невідомий. Тому формулювання відповідних двовимірних крайових задач теплопровідності для неоднорідних тонкостінних елементів є актуальним науково-технічним завданням. Зведення тривимірних задач теплопровідності до двовимірних, як правило, виконується одним з відповідних методів: варіаційним, операторним, усередненням по товщині неоднорідної оболонки тощо. Двовимірні рівняння теплопровідності для ізотропних оболонок отримані в праці [11], для ортотропних – в [12], а для шаруватих – в статтях [9, 10, 13]. В роботі [14] розвинуто методику зведення тривимірної задачі теплопровідності для неоднорідної ізотропної оболонки до двовимірної. Для циліндричної попередньо нагрітої оболонки з ізотропної неоднорідної металокераміки чисельно проаналізовано температурне поле залежно від осової та колової координат за різних значень безрозмірного часу і заданого коефіцієнта неоднорідності.

На практиці часто використовують шаруваті оболонки, матеріалом яких, як правило, є армований волокнами композит. Тому фізико-механічні властивості матеріалів складових шарів таких оболонок мають властивість ортотропії.

Мета дослідження

Метою даної роботи є побудова двовимірної математичної моделі теплопровідності тонкостінних кусково-однорідних анізотропних оболонок, зокрема, циліндричної форми, та отримання розв'язку задачі теплопровідності для кусково-однорідної ортотропної циліндричної оболонки за умов локального нагріву внаслідок початкового розподілу температури та конвективного теплообміну з довкіллям.

Викладення основного матеріалу дослідження

Задача теплопровідності для неоднорідних анізотропних оболонок. Розглянемо тонку оболонку сталої товщини $2h$, яка обмінюється теплом із навколишнім середовищем за законом Ньютона та нагрівається джерелами тепла. Матеріал оболонки є неоднорідним за товщиною і анізотропним з одною площиною теплової симетрії. Розподіл температурного поля $t(\alpha, \beta, z, \tau)$ в такій оболонці описується тривимірним рівнянням теплопровідності, яке для неоднорідного анізотропного тіла в криволінійній ортогональній системі координат α, β, z після спрощення, що відповідає точності теорії тонких оболонок [11], має вигляд

$$\Delta t + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{33}(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right) + 2k_0 \lambda_{33}(z) \frac{\partial t}{\partial z} - c_e(z) \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_i = 0. \quad (1)$$

Тут $\Delta = \frac{1}{AB} \left[\lambda_{11}(z) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \lambda_{22}(z) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + 2\lambda_{12}(z) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right]$; w_i – густина теплових джерел; $c_e(z)$ – питома теплоємність; $\lambda_{ij}(z)$ – коефіцієнти теплопровідності; τ – змінна часу; A, B – відповідні коефіцієнти Ляме; k_0 – середня кривина оболонки.

Для однозначності розв'язку рівняння (1) додаємо початкову умову

$$t|_{\tau=0} = t_0(\alpha, \beta), \quad (2)$$

де $t_0(\alpha, \beta)$ – функція, що описує початковий розподіл температури в оболонці та одну з граничних умов

$$t = t^\pm, \lambda_{33} \frac{\partial t}{\partial z} = \mp q^\pm, \lambda_{33} \frac{\partial t}{\partial z} \pm \alpha_z^\pm (t - t_z^\pm) = 0 \quad (3)$$

на поверхнях $z = \pm h$ оболонки. Тут α_z^\pm – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h$, а t^\pm, q^\pm, t_z^\pm – відповідно температура, тепловий потік і температура довкілля, задані на цих поверхнях. Якщо оболонка не замкнена, то аналогічні умови потрібно задати і на її краях.

Побудова двовимірної математичної моделі

По аналогії з теорією пружності для оболонок просторову задачу теплопровідності зводимо до математично простішої двовимірної задачі. Таке спрощення, що відповідає першому наближенню Лява [11], є виправданим для тонкостінних конструкцій. Згідно з цим наближенням для формулювання двовимірної задачі на інтегральні характеристики температури

$$T_i(\alpha, \beta, \tau) = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^h t(\alpha, \beta, z, \tau) z^{i-1} dz, \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

необхідно задати закон розподілу температури по товщині оболонки з подальшим використанням методу усереднення вихідного рівняння (1) згідно формули (4).

Запишемо двовимірні рівняння теплопровідності неоднорідних анізотропних оболонок для двох часто використовуваних законів розподілу температури по товщині.

Для кубічного розподілу температури по товщині оболонки для її інтегральних характеристик T_1 і T_2 отримуємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)} T_1 + \Delta_{(6)} T_2 + \frac{5k_0}{2h} (\Lambda_{33}^{(1)} - \Lambda_{33}^{(3)}) T_2 - C^{(1)} \dot{T}_1 - \frac{5}{12} (3C^{(2)} - C^{(4)}) \dot{T}_2 + W_t^{(1)} &= f_1, \\ \Delta_{(2)} T_1 + \Delta_{(7)} T_2 + \frac{5k_0}{2h} (\Lambda_{33}^{(2)} - \Lambda_{33}^{(4)}) T_2 - \frac{5}{4h^2} (\Lambda_{33}^{(1)} - \Lambda_{33}^{(3)}) T_2 - C^{(2)} \dot{T}_1 - \frac{5}{12} (3C^{(3)} - C^{(5)}) \dot{T}_2 + W_t^{(2)} &= f_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Відповідно для лінійного розподілу температури по товщині оболонки для її інтегральних характеристик T_1 і T_2 система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)} T_1 + \Delta_{(2)} T_2 + \frac{2k_0}{h} \Lambda_{33}^{(1)} T_2 - C^{(1)} \dot{T}_1 - C^{(2)} \dot{T}_2 + W_t^{(1)} &= F_1, \\ \Delta_{(2)} T_1 + \Delta_{(3)} T_2 + \frac{2k_0}{h} \Lambda_{33}^{(2)} T_2 - \frac{1}{h^2} \Lambda_{33}^{(1)} T_2 - C^{(2)} \dot{T}_1 - C^{(3)} \dot{T}_2 + W_t^{(2)} &= F_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\{\Lambda_{ij}^{(n)}, \Lambda_{33}^{(n)}, C^{(n)}\} = \int_{-h}^h \left\{ \lambda_{ij}(z), \lambda_{33}(z), c_e(z) \right\} \left(\frac{z}{h} \right)^{n-1} dz, \quad (n = 1, 2, \dots, 5); \quad (7)$$

$$\Delta_{(k)} = \frac{1}{AB} \left[\Lambda_{11}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \Lambda_{22}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + 2\Lambda_{12}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right], \quad (k = 1, 2, \dots, 7);$$

$$\Lambda_{ij}^{(6)} = \frac{5}{12} (3\Lambda_{ij}^{(2)} - \Lambda_{ij}^{(4)}); \quad \Lambda_{ij}^{(7)} = \frac{5}{12} (3\Lambda_{ij}^{(3)} - \Lambda_{ij}^{(5)}); \quad W_i^t = \int_{-h}^h w_i \left(\frac{z}{h} \right)^{i-1} dz; \quad T_i = \frac{\partial T_i}{\partial \tau};$$

$F(\alpha, \beta, \tau), F_2(\alpha, \beta, \tau), f_1(\alpha, \beta, \tau), f_2(\alpha, \beta, \tau)$ – функції, що залежать від граничних умов на поверхнях $z = \pm h$ оболонки. Зокрема, функції F_1, F_2 у випадку конвективного теплообміну мають вигляд: $F_i = (T_1 - t_1^e) \varepsilon_i^t + (T_2 - t_2^e) \varepsilon_{3-i}^t$, причому $\varepsilon_i^t = (\alpha_z^+ - (-1)^i \alpha_z^-)$, $t_i^e = \frac{1}{2} (t_z^+ - (-1)^i t_z^-)$, $(i = 1, 2)$.

Зауважимо, що рівняння теплопровідності (5), які відповідають кубічному закону розподілу температури, отримані за умови виконання граничних умов на поверхнях $z = \pm h$ і мають той самий порядок, що і рівняння (6).

Для обчислення інтегральних характеристик $\Lambda_{ij}^{(n)}, \Lambda_{33}^{(n)}, C^{(n)}$ теплофізичних властивостей неоднорідного матеріалу за формулою (7) потрібно задати закон розподілу цих властивостей по товщині. Цей закон залежить від того, чи неоднорідність неперервна, чи кусково-неперервна. Далі розглянемо кусково-неперервну неоднорідність.

Співвідношення для кусково-неперервної неоднорідності

Нехай оболонка складена з пакету жорстко з'єднаних між собою N однорідних анізотропних шарів з різною товщиною h_k . Вважатимемо, що гіпотеза про характер розподілу температури по товщині виконується для всього пакету. Тоді, згідно з методикою, викладеною в [3], теплофізичні характеристики шаруватої оболонки як одного цілого представимо за допомогою асиметричних одиничних функцій $S_{\pm}(z)$ у вигляді

$$q(z) = q_1 + \sum_{k=1}^{N-1} (q_{k+1} - q_k) S_+(z - z_k). \quad (8)$$

Тут $q_k = \{\lambda_{ij}^{(k)}, \lambda_{33}^{(k)}, c_e^{(k)}\}$ – теплофізичні характеристики k -го шару; z_k – координата границі розділу k -го і $k+1$ -го шарів, причому $z_k = -h + \sum_{m=1}^k h_m$;

$$S_+(z) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}; \quad S_-(z) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Підставляючи співвідношення (8) у (7), отримуємо вирази інтегральних характеристик $\Lambda_{ij}^{(n)}, \Lambda_{33}^{(n)}, C^{(n)}$ через фізичні властивості шарів $\lambda_{ij}^{(k)}, \lambda_{33}^{(k)}, c_e^{(k)}$. Запишемо їх для інтегральних характеристик $\Lambda_{ij}^{(n)}$

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^{(1)} &= 2h \lambda_{ij}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k)}) (h - z_k); & \Lambda_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k)}) (h^2 - z_k^2); \\ \Lambda_{ij}^{(3)} &= \frac{2h}{3} \lambda_{ij}^{(1)} + \frac{1}{3h^2} \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k)}) (h^3 - z_k^3); & \Lambda_{ij}^{(4)} &= \frac{1}{4h^3} \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k)}) (h^4 - z_k^4); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Lambda_{ij}^{(5)} = \frac{2h}{5} \lambda_{ij}^{(1)} + \frac{1}{5h^4} \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_{ij}^{(k+1)} - \lambda_{ij}^{(k)}) (h^5 - z_k^5).$$

Відповідно для інших інтегральних характеристик вирази будуть аналогічними.

Шаруваті конструкції можуть мати різну структуру залежно від розміщення шарів відносно середньої поверхні: симетричну, антисиметричну та несиметричну; всі шари можуть мати однакову товщину – регулярна структура, або різну – нерегулярна структура. Залежно від структури співвідношення (9) будуть різними.

Розв’язок для неоднорідної ортотропної циліндричної оболонки

Розглянемо кругову замкнену циліндричну оболонку, віднесена до циліндричної системи координат x, θ, z , яка має скінченну довжину l , радіус середньої поверхні R і сталу товщину $2h$. Нехай оболонка виготовлена із неоднорідного ортотропного матеріалу, причому осі ортотропії співпадають з осями координат. Рівняння теплопровідності (6) за відсутності джерел тепла у цьому випадку отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned} (\Delta_{(1)} - \varepsilon_1^t) T_1 + (\Delta_{(2)} + \Lambda_{33}^{(1)}/(Rh) - \varepsilon_2^t) T_2 - C^{(1)} \dot{T}_1 &= -F_1^z, \\ (\Delta_{(2)} - \varepsilon_2^t) T_1 + (\Delta_{(3)} - \Lambda_{33}^{(1)}/h^2 - \varepsilon_1^t) T_2 - C^{(3)} \dot{T}_2 &= -F_2^z. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут

$$\Delta_{(k)} = \Lambda_{11}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\Lambda_{22}^{(k)}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (k=1,2,3); \quad F_1^z = \varepsilon_1^t t_1^z + \varepsilon_2^t t_2^z + W_1^t; \quad F_2^z = \varepsilon_2^t t_1^z + \varepsilon_1^t t_2^z + W_2^t.$$

Для однозначності розв’язку системи рівнянь (10), задамо такі граничні умови на краях $x=0$ і $x=l$ оболонки:

$$T_1 = T_2 = 0 \quad (11)$$

і початкові в момент часу $\tau=0$ умови:

$$T_1(x, \theta, 0) = T_1^0(x, \theta), \quad T_2(x, \theta, 0) = T_2^0(x, \theta). \quad (12)$$

Система рівнянь (10) згідно з граничними умовами (11) після застосування подвійного скінченного перетворення Фур’є за координатами x, θ буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dT_{1mn}}{d\tau_1} + g_1 T_{1mn} + g_2 T_{2mn} &= F_{1mn}^z, \\ \frac{dT_{2mn}}{d\tau_1} + g_3 T_{1mn} + g_4 T_{2mn} &= F_{2mn}^z. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут

$$\begin{aligned} g_1 &= L_{11}^{(1)} \mu_n^2 + L_{22}^{(1)} \delta^2 m^2 + Bi_1; & g_2 &= L_{11}^{(2)} \mu_n^2 + L_{22}^{(2)} \delta^2 m^2 - \delta + Bi_2; & g_3 &= \tilde{C} (L_{11}^{(2)} \mu_n^2 + L_{22}^{(2)} \delta^2 m^2 + Bi_2); \\ g_4 &= \tilde{C} (L_{11}^{(3)} \mu_n^2 + L_{22}^{(3)} \delta^2 m^2 + Bi_1 + 1); & \mu_n &= \frac{\pi n h}{l}; & \delta &= \frac{h}{R}; & \tau_1 &= \frac{\Lambda_{33}^{(1)}}{h^2 C^{(1)}} \tau; & \tilde{C} &= \frac{C^{(1)}}{C^{(3)}}; & L_{ii}^{(j)} &= \frac{\Lambda_{ii}^{(j)}}{\Lambda_{33}^{(1)}}; \end{aligned}$$

$$Bi_i = \frac{\varepsilon_i^t h^2}{\Lambda_{33}^{(1)}}; \quad F_{1mn}^z = Q_{1mn}(x, \theta) \tilde{F}_1(\tau) = Bi_1 t_{1mn}^z + Bi_2 t_{2mn}^z + W_{1mn}^t \frac{h^2}{\Lambda_{33}^{(1)}};$$

$$F_{2mn}^z = Q_{2mn}(x, \theta) \tilde{F}_2(\tau) = \left(Bi_2 t_{1mn}^z + Bi_1 t_{2mn}^z + W_{2mn}^t \frac{h^2}{\Lambda_{33}^{(1)}} \right) \tilde{C};$$

Розв'язок системи рівнянь (13) за початкових умов (12) з використанням інтегрального перетворення Лапласа запишеться

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^2 \frac{\sin \frac{\pi n x}{l} \cos m \theta}{p_j - p_k} \left\{ (p_j - g_4) Q_{1nm} Z_1^{(j)}(\tau) + g_2 Q_{2nm} Z_2^{(j)}(\tau) + \right. \\ \left. + [(p_j - g_4) T_{1nm}^0 + g_2 T_{2nm}^0] \exp(-p_j \tau_1) \right\},$$

$$T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^2 \frac{\sin \frac{\pi n x}{l} \cos m \theta}{p_j - p_k} \left\{ (p_j - g_1) Q_{2nm} Z_2^{(j)}(\tau) + g_3 Q_{1nm} Z_1^{(j)}(\tau) + \right. \\ \left. + [(p_j - g_1) T_{2nm}^0 + g_3 T_{1nm}^0] \exp(-p_j \tau_1) \right\}. \quad (14)$$

Тут

$$p_i = \frac{g_1 + g_4}{2} + (-1)^i \sqrt{\frac{(g_1 - g_4)^2}{4} + g_2 g_3},$$

$$\{Q_{inm}, T_{inm}^0\} = \frac{\varsigma}{\pi l} \int_0^l \int_{-\pi}^{\pi} \{Q_i, T_i^0\}(x, \theta) \sin \frac{\pi n}{l} x \cos m \theta dx d\theta, \quad \varsigma = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}, \quad (i = 1, 2). \quad (15)$$

$$Z_i^{(j)} = \int_0^{\tau_1} \tilde{F}_i(u) \exp(-p_j(\tau_1 - u)) du, \quad (i, j = 1, 2). \quad (16)$$

Підставляючи вирази (14) з урахуванням (15) і (16) у лінійний закон $t = T_1 + \frac{z}{h} T_2$ розподілу температури по всій товщині розглядуваної оболонки, отримуємо загальний розв'язок задачі теплопровідності для неї. Зауважимо, що, використовуючи таку ж методику до системи рівнянь (5), запишемо загальний розв'язок задачі теплопровідності для даної оболонки і у випадку кубічного закону розподілу температури по її товщині.

Співвідношення для шаруватої циліндричної ортотропної оболонки

Дослідження температурного поля виконували для шаруватої циліндричної оболонки антисиметричної регулярної структури, причому осі ортотропії кожного шару по чергово орієнтовані під кутами 0° і 90° до координатних осей. Матеріалом таких оболонок, як правило, є армований волокнами композит, тому їх ще називають ортогонально армованими. Інтегральні характеристики (9) у цьому випадку набудуть вигляду

$$\Lambda_{11}^{(1)} = \Lambda_{22}^{(1)} = h(\lambda_{11} + \lambda_{22}); \quad \Lambda_{33}^{(1)} = 2h\lambda_{33}; \quad \Lambda_{11}^{(2)} = -\Lambda_{22}^{(2)} = \frac{h}{N}(\lambda_{22} - \lambda_{11});$$

$$\Lambda_{11}^{(3)} = \Lambda_{22}^{(3)} = \frac{h}{3}(\lambda_{11} + \lambda_{22}); \quad \Lambda_{12}^{(k)} = \Lambda_{33}^{(2)} = 0.$$

Нехай оболонка нагрівається температурним полем, заданим в початковий момент часу виразами $T_1^{(0)}(x, \theta) = \phi(x, \theta)$, $T_2^{(0)} = 0$ або доквіллям з температурою $t_z^+(x, \theta, \tau) = \phi(x, \theta)S_+(\tau)$, $t_z^-(x, \theta, \tau) = 0$ відповідно на поверхнях $z = \pm h$ шляхом конвективного теплообміну. Джерела тепла відсутні.

За функцію розподілу температури залежно від координат x, θ візьмемо квадратичну залежність

$$\phi(x, \theta) = T^* \left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{d^2} \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{\eta^2} \right) [S_-(x - x_0 + d) - S_+(x - x_0 - d)] [S_-(\theta + \eta) - S_+(\theta - \eta)], \quad (17)$$

де $T^* = \text{const}$; $2d$ і 2η – відповідно ширина і кут області нагріву; $(x_0, 0)$ – координати центра цієї області; $S_{\pm}(x)$ – асиметричні одиничні функції.

Коефіцієнти Фур'є T_{inn}^0, Q_{inn} , що входять у розв'язок системи рівнянь (14) обчислюємо за формулами (15):

$$\{T_{in0}^0, Q_{in0}\} = \left\{ 1, \frac{Bi}{2} \right\} \frac{16}{3} \frac{\eta T^*}{\pi^3 n^2 (d/l)^2} \left(\frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n d}{l} - \frac{d}{l} \cos \frac{\pi n d}{l} \right) \sin \frac{\pi n x_0}{l}, \quad T_{2n0}^0 = 0,$$

$$\{T_{inn}^0, Q_{inn}\} = \left\{ 1, \frac{Bi}{2} \right\} \frac{32 T^*}{\pi^3 n^2 m^2 \eta^2 (d/l)^2} \left(\frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n d}{l} - \frac{d}{l} \cos \frac{\pi n d}{l} \right) \left(\frac{1}{m} \sin m \eta - \eta \cos m \eta \right) \sin \frac{\pi n x_0}{l},$$

$T_{2nm}^0 = 0$ ($m \neq 0$), а функцію часу $Z_i^{(j)}(\tau)$ – за формулою (16). Отримуємо її вираз

$$Z_i^{(j)}(\tau) = \frac{1}{p_j} (1 - \exp(-p_j \tau)) S_+(\tau).$$

Числовий аналіз для двошарової циліндричної ортотропної оболонки

На основі розглянутої вище методики для шаруватої циліндричної оболонки антисиметричної регулярної структури виконаємо обчислення для двошарової композитної графітоепоксидної армованої волокнами оболонки з такими значеннями теплофізичних і геометричних параметрів: $\lambda_{11} = 105 \text{ W/mK}$; $\lambda_{22} = 75 \text{ W/mK}$; $h/R = 0,05$; $l/R = 2$; $\eta = \pi/4$; $d/l = 0,35$; $x_0 = l/2$.

Для заданих параметрів обчислили значення безрозмірних середньої температури $T_1' = \frac{T_1}{T^*}$, температурного градієнта $T_2' = \frac{T_2}{T^*}$ і температурного поля $t' = \frac{t}{T^*}$

для різних значень безрозмірного часу $\tau' = \frac{\lambda_{22} \tau}{c_e h^2}$ і безрозмірного коефіцієнта

тепловіддачі (критерія Біо) $Bi = \frac{\alpha_z h}{\lambda_{22}}$. На рис. 1 показано зміну величин T_1' і T_2' вздовж

твірної $\theta = 0$ ($0,5 \leq x' \leq 1$), а на рис. 2 – зміну цих же величин вздовж напрямної $x' = 0,5$

($0 \leq \theta \leq \pi$) в різні моменти часу. Залежність середньої температури T_1' від часу τ' для різних значень коефіцієнта тепловіддачі Bi ілюструє рис. 3. На рис. 4 наведені графіки

залежності температурного поля t' від поперечної координати $z' = \frac{z}{h}$ для значень

$Bi = 0,1, 0,2, 0,3$.

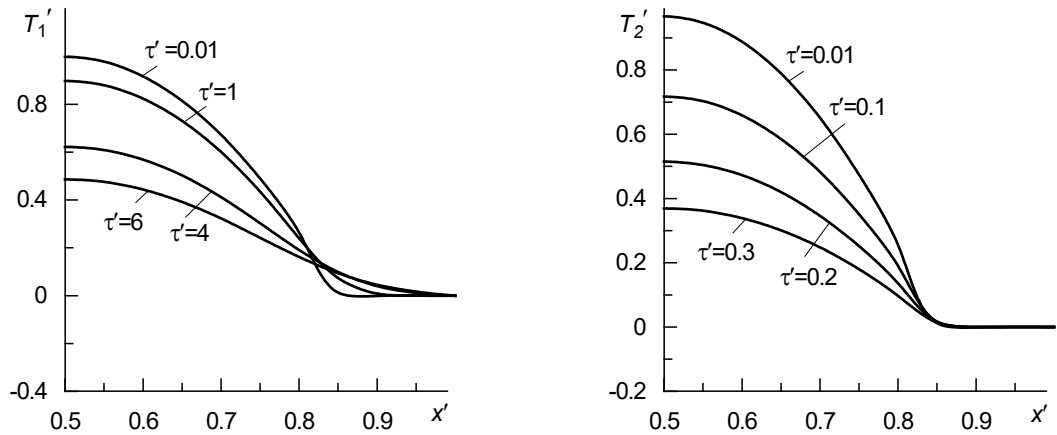


Рис. 1. Зміна величин T_1' і T_2' вздовж твірної $\theta = 0$ ($0.5 \leq x' \leq 1$)

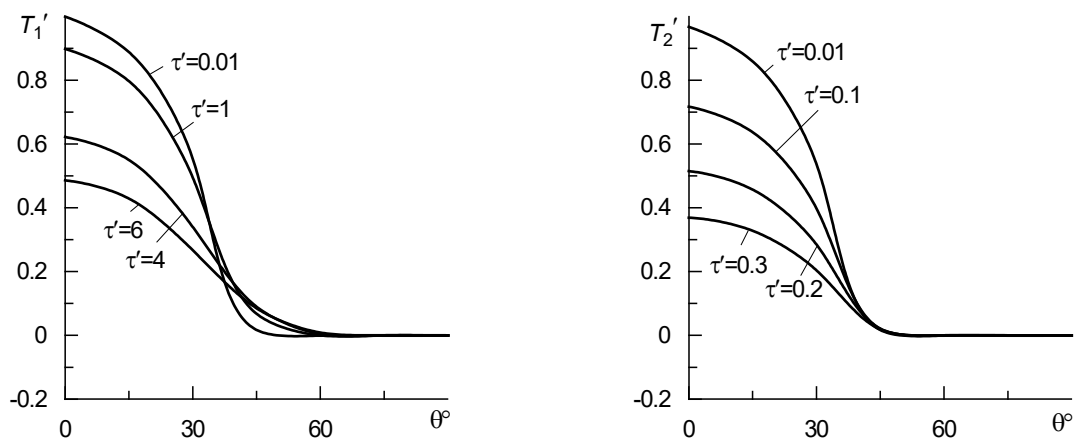


Рис. 2. Зміна величин T_1' і T_2' вздовж напрямної $x' = 0.5$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) в різні моменти часу

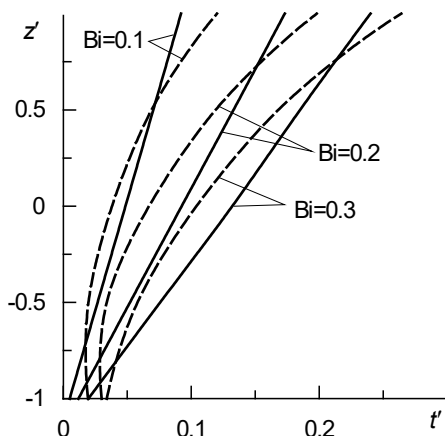


Рис. 3. Залежність середньої температури T_1' від часу τ' для різних значень коефіцієнта тепловіддачі Bi

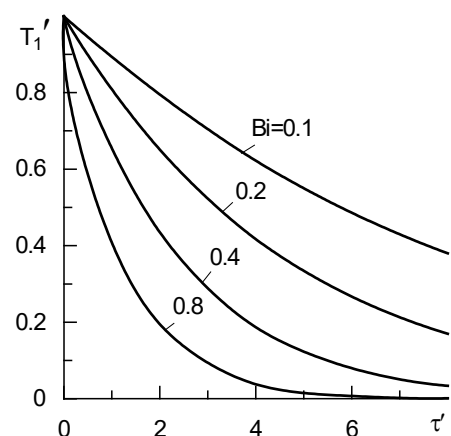


Рис. 4. Графіки залежності температурного поля t' від поперечної координати $z' = \frac{z}{h}$ для значень $Bi = 0.1, 0.2, 0.3$

Суцільні лінії відповідають розв'язку системи рівнянь, які записані за лінійного закону розподілу температури по товщині, а штрихові лінії – за кубічного закону. Результати, які зображені на рис. 1-3 одержані за умов нагріву оболонки

температурним полем, заданим в початковий момент часу, а результати, подані на рис. 4, – за нагріву оболонки довкіллям шляхом конвективного теплообміну.

Із аналізу числових результатів та наведених рисунків отримано, що найбільшого значення середня температура і температурний градієнт досягають в центрі області нагріву ($x' = 0.5, \theta = 0$). По мірі віддалення від центру вони монотонно спадають до нуля. Оскільки відбувається теплообмін з довкіллям, то температурні характеристики з плином часу зменшуються. Це зменшення відбувається інтенсивніше для температурного градієнта, а також зі збільшенням коефіцієнта тепловіддачі. Температурний градієнт суттєвий лише в початкові моменти часу, далі він стрімко спадає. Для розглядуваного композиту шарувата структура матеріалу несуттєво впливає на розподіл температури в оболонці порівняно з однорідною структурою.

Висновки

На основі методики, що використовується в лінійній теорії пружності оболонок, побудовано наближену двовимірну математичну модель теплопровідності для неоднорідних анізотропних оболонок за кубічної та лінійної гіпотез розподілу температури по товщині. Для циліндричної ортогонально армованої оболонки регулярної структури отримано загальний розв'язок з використанням інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа. Числовий аналіз виконано для двошарової оболонки, яка в початковий момент часу локально нагрівається заданим температурним полем, або довкіллям шляхом конвективного теплообміну. Досліджено залежність інтегральних характеристик температури від фізичних та геометричних параметрів оболонки. Отримані результати можуть бути використані для аналізу розподілу температури в тонкостінних оболонкових елементах з покриттями та в біметалевих конструкціях.

Список використаної літератури

1. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. Thermo-Dynamics of plates and shells (foundations of engineering mechanics). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010. 789 p.
2. Hetnarski R.B., Eslami M.R., Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications, – Springer Science Business Media, B.V., 2009. 559 p.
3. Коляно Ю.М. Методи теплопровідності та термопружності неоднорідних тіл. Київ: Наукова думка, 1992. 280 с.
4. Kushnir R.M., Nykolyshyn M.M., Zhydyk U.V., Flyachok V.M., On the theory of inhomogeneous anisotropic shells with initial stresses. *J. Math. Sci.* 2012. 186. P.61–72.
5. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. New York: CRC Press, 2004. 831p.
6. Fazelzadeh S. A., Rahmani S., Ghavanloo E., Marzocca P. Thermoelastic vibration of doubly-curved nano-composite shells reinforced by graphene nanoplatelets. *J. Therm. Stresses.* 2019. 42. N 1. P.1–17.
7. Punera D., Kant T., Desai Y.M. Thermoelastic analysis of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models. *J. Therm. Stresses.* 2018. 41. N 1. P. 54–79.
8. Thai H.T., Kim S. E.A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Compos. Struct.* 2015. 128. P. 70–86.
9. Brishetto S., Carrera E. Heat conduction and thermal analysis in multilayered plates and shells. *J. Mech. Res. Communications.* 2011. 38. P. 449–455.
10. Shvets R.M., Flyachok V.M. Heat conduction equations for multilayer anisotropic shells. *J. Therm. Stresses.* 1999. 22. N 2. P. 241–254.

11. Подстригач Я.С., Швець Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344 с.
12. Шевченко В.П., Гольцев А.С. Термопружний згин локально нагрітих ортотропних оболонок. *Прикл. мех.* 2007. 43. № 3. С. 80–85.
13. Жидик У.В., Флячок В.М. Температурні поля в пологих оболонках шаруватої структури. *Кваліологія книги.* 2017. № 1 (31). С. 94–97.
14. Мусій Р.С., Мельник Н.Б., Бандирський Б. Й., Гошко Л. В., Шиндер В.К. Визначення нестационарного температурного поля попередньо нагрітої неоднорідної ізотропної циліндричної оболонки. *Прикладні питання математичного моделювання.* Т.3. № 2.2. 2020. С. 202–211.

References

1. Awrejcewicz, J., Krysko, V. A., & Krysko, A. V. (2010). Thermo-Dynamics of plates and shells (foundations of engineering mechanics). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
2. Hetnarski, R.B., & Eslami M.R. (2009). Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications, – Springer Science Business Media, B.V.
3. Koliano, Yu.M. (1992). Metody teploprovodnosti ta termoprzhnosti neodnorodnykh til. Kyiv: Naukova dumka.
4. Kushnir, R.M., Nykolyshyn, M.M., Zhydyk, U.V., & Flyachok, V.M. (2012). On the theory of inhomogeneous anisotropic shells with initial stresses. *J. Math. Sci.* **186**, 61–72.
5. Reddy, J. N. (2004). Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. New York: CRC Press.
6. Fazelzadeh, S. A., Rahmani, S., Ghavanloo, E., & Marzocca, P. (2019). Thermoelastic vibration of doubly-curved nano-composite shells reinforced by graphene nanoplatelets. *J. Therm. Stresses.* **42**, 1, 1–17.
7. Punera, D., Kant, T., & Desai, Y.M. (2018). Thermoelastic analysis of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models. *J. Therm. Stresses.* **41**, 1, 54–79.
8. Thai, H.T., & Kim, S.E. (2015). A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Compos. Struct.* **128**, 70–86.
9. Brishetto, S., & Carrera, E. (2011). Heat conduction and thermal analysis in multilayered plates and shells. *J. Mech. Res. Communications.* **38**, 449–455.
10. Shvets, R.M., & Flyachok, V.M., (1999). Heat conduction equations for multilayer anisotropic shells. *J. Therm. Stresses.* **22**, 2, 241–254.
11. Podstrigach, Ya.S., & Shvets, R.N. (1978). Termouprugost tonkih obolochek. Kiev: Naukova dumka.
12. Shevchenko, V.P., & Holtsev, A.S. (2007). Termoprzhnyi zghyn lokalno nahrytykh ortotropnyi obolonok. *Prykl. mekh.* **43**, 3, 80–85.
13. Zhydyk, U.V., & Fliachok, V.M. (2017). Temperaturni polia v polohykh obolonkakh sharuvatoi struktury. *Kvalilohiia knyhy.* **1** (31), 94–97.
14. Musii, R.S., Melnyk, N.B., Bandytskyi, B.Y., Hoshko, L.V., & Shynder, V.K. (2020). Vyznachennia nestatsinarnoho temperaturnoho polia poperedno nahritoi neodnorodnoi izotropnoi tsylindrychnoi obolonky. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання.* **3**, 2.2, 202–211.

Мусій Роман Степанович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: roman.s.musii@lpnu.ua, ORCID: 0000-0002-7169-2206.

Жидик Уляна Володимирівна - к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: uliana.v.zhydyk@lpnu.ua, ORCID: 0000-0002-1104-1946.

Мельник Наталія Богданівна - к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри програмного забезпечення Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: nataliia.b.melnyk@lpnu.ua, ORCID: 0000-0003-2337-2395.

Шиндер Валентин Костянтинович - к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри опору матеріалів та будівельної механіки Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: valentyn.k.shynder@lpnu.ua, ORCID: 0000-0002-9414-5619.

М'яус Ольга Миколаївна - к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: olha.m.miaus@lpnu.ua, ORCID: 0000-0001-5332-7080.

Наконечний Ростислав Адрианович – к.т.н., доцент кафедри електронних обчислювальних машин Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: rostyslav.a.nakonechnyi@lpnu.ua, ORCID: 0000-0003-0645-3361.