УДК 519.65

А. Н. ХОМЧЕНКО
Чорноморський національний університет ім. Петра Могили
О.І. ЛИТВИНЕНКО, Ю.Г. ТЕНДІТНИЙ, В.О. СТАРЧЕНКО
Херсонська філія Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова
І.О. АСТІОНЕНКО
Херсонський національний технічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ 2*D*-ШАБЛОНІВ ТА КУБАТУР ЯК ЗАДАЧІ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Численне інтегрування стає все більш важливою процедурою в сучасному методі скінченних елементів (МСЕ). Зрозуміло, що переважна більшість відомих кубатур асоціюється з трикутниками і квадратами. На жаль, не всі кубатури придатні для практичного використання. Наприклад, є кубатури з від'ємними ваговими коефіцієнтами. На думку сучасних американських математиків Г. Стренга і Дж. Фікса, проблема конструювання кубатур навіть на трикутних та квадратних шаблонах лишається актуальною. Щоб отримати нові кубатури, використовуються псевдовипадкові числа і квазіметод Монте-Карло.

На зразок відомих систем трикутних і квадратних чисел Піфагора у 50-ті роки двадцятого століття в МСЕ виникли системи трикутних і квадратних обчислювальних шаблонів та відповідних кубатур. Особливість системного аналізу полягає в тому, що на одному шаблоні може існувати декілька альтернативних кубатур в межах закону збереження вагового балансу. В цих випадках постає проблема сегментного тестування нових базисів (на сумісність). Зусилля, що затрачені на стратифікацію вибірки, обертаються покращенням якості оцінки.

У роботі розглядаються системи обчислювальних 2D-шаблонів, які утворені на зразок арифметичних систем і геометрії трикутних і квадратних чисел Піфагора. Мета дослідження – на прикладах обчислювальних 2D-шаблонів і випадкових кубатур проілюструвати можливості і переваги процедури стратифікації вибіркових аплікат, підкреслити важливу роль центрованих моделей (з вузлом інтегрування в барицентрі трикутника, квадрата). В результаті дослідження з'ясувалося: якщо зафіксовано кількість вузлів інтегрування та їх розташування, то необхідно з'ясувати, яким критерієм скористатися для визначення коефіцієнтів лінійної комбінації аплікат. В системі альтернативних кубатур жоден із критеріїв стратифікації не має помітної переваги над іншими. Для кожного критерію можна підібрати приклад, в якому він буде кращим. Щоб знайти найбільш ефективну кубатуру для конкретної задачі потрібен спеціальний аналіз.

Ключові слова: системи обчислювальних шаблонів, системи кубатур, квазіметод Монте-Карло, псевдовипадкові числа, стратифікована вибірка, оптимізація оцінки.

А.Н. ХОМЧЕНКО
Черноморский национальный университет им. Петра Могилы
Е.И. ЛИТВИНЕНКО, Ю.Г. ТЕНДИТНЫЙ, В.А. СТАРЧЕНКО
Херсонский филиал Национального университета кораблестроения им. адм. Макарова
И.А. АСТИОНЕНКО
Херсонский национальный технический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ 2*D*-ШАБЛОНОВ И КУБАТУР КАК ЗАДАЧИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Численное интегрирование становится все более важной процедурой в современном методе конечных элементов (МКЭ). Понятно, что преимущественное большинство известных кубатур ассоциируется с треугольниками и квадратами. К сожалению, не все кубатуры пригодны для практического применения. Например, есть кубатуры с отрицательными весовыми коэффициентами. По мнению современных американских математиков Г. Стренга и Дж. Фикса, проблема конструирования кубатур даже на треугольных и квадратных шаблонах остается актуальной. Для получения новых кубатур, используются псевдослучайные числа и квазиметод Монте-Карло.

По образцу известных систем треугольных и квадратных чисел Пифагора в 50-е годы двадцатого века в МКЭ появились системы треугольных и квадратных вычислительных шаблонов и соответствующих кубатур. Особенность системного анализа состоит в том, что на одном шаблоне может существовать несколько альтернативных кубатур в рамках закона сохранения весового

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19

баланса. В этих случаях возникает проблема сегментного тестирования новых базисов (на совместимость). Усилия, которые затрачены на стратификацию выборки, окупаются улучшением качества оценки.

В работе рассматриваются системы вычислительных 2D-шаблонов, которые образованы по примеру арифметических систем и геометрии треугольных и квадратных чисел Пифагора. Цель исследования – на примерах вычислительных 2D-шаблонов и случайных кубатур проиллюстрировать возможности и преимущества процедуры стратификации выборочных аппликат, подчеркнуть важную роль центрированных моделей (с узлом интегрирования в барицентре треугольника, квадрата). В результате исследования выяснилось: если зафиксировано количество узлов интегрирования и их расположение, то необходимо выяснить, каким критерием воспользоваться для определения коэффициентов линейной комбинации аппликат. В системе альтернативных кубатур ни один из критериев стратификации не имеет заметного преимущества над другими. Для каждого критерия можно подобрать пример, в котором он будет лучшим. Чтобы найти наиболее эффективную кубатуру для конкретной задачи, необходим специальный анализ.

Ключевые слова: системы вычислительных шаблонов, системы кубатур, квазиметод Монте-Карло, псевдослучайные числа, стратифицированная выборка, оптимизация оценки.

A.N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LYTVYNENKO, Yu.G. TENDITNYI, V.O. STARCHENKO
Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Kherson branch
I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

MODELLING OF COMPUTATIONAL 2D-TEMPLATES AND CUBATURES AS THE PROBLEMS OF SYSTEM ANALYSIS

Numerical integration is becoming an increasingly important procedure in the modern method of finite elements (MFE). It is clear that the overwhelming majority of known cubatures is associated with triangles and squares. Unfortunately, not all cubatures are suitable for practical use. For example, there are cubatures with negative weight number. According to modern American mathematicians G. Strang and J. Fix, the problem of constructing the cubatures even on triangular and square patterns remains relevant. To obtain new cubatures pseudo-random numbers and the Monte-Carlo quasi-method are used.

By the example of well-known systems of triangular and square Pythagorean numbers in the 50s of the twentieth century the systems of triangular and square computational templates and corresponding cubatures appeared in the MFE. The peculiarity of system analysis is that on one template there may be several alternative cubatures within the law of conservation of weight balance. In these cases the problem of segment testing of new bases (for compatibility) arises. Efforts spent to stratify the selection result in improved quality of evaluation.

The paper considers systems of computational 2D-templates which are formed following the example of arithmetic systems and geometry of triangular and square Pythagorean numbers. The purpose of the study is to illustrate the possibilities and advantages of the procedure of stratification of selective applicates, to emphasize the important role of centered models (with integration node in the barycenter of a triangle, square) on the examples of computational 2D-templates and random cubatures. The study found the following: if the number of integration nodes and their location was recorded, it is necessary to find out which criterion should be used to determine the coefficients of the linear combination of applicates. In the system of alternative cubatures none of the stratification criteria has a significant advantage over the others. For each criterion one can choose an example in which it will be the best. To find the most effective cubature for a particular task a special analysis is required.

Keywords: systems of computational templates, cubatures systems, Monte-Carlo quasi-method, pseudo-random numbers, stratified selection, optimization of evaluation.

Постановка проблеми

Нагадаємо, що 2*D*–шаблони використовують для чисельних оцінок подвійних інтегралів. З геометричної точки зору подвійний інтеграл – це об’єм тіла. Проблема полягає у створенні простого алгоритму (на зразок класичного методу Монте-Карло)

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19

для наближеного обчислення подвійного інтеграла на трикутному (квадратному) шаблоні шляхом вдалого усереднення значень підінтегральної функції в незалежних випадкових точках (вузлах). Квазіметод Монте-Карло дозволяє використовувати квазівипадкові точки. Важливо, щоб система цих точок мала рівномірний розподіл. Рівномірність важливіша за випадковість. Популярність квазіметоду Монте-Карло пояснюється тим, що для деяких функцій похибка наближення зменшується як $1/N$, а для класичного методу вона завжди має порядок $1/\sqrt{N}$, де N – об'єм вибірки. Системний аналіз викриває цікаві приклади, коли шаблон відіграє подвійну роль: як скінченний елемент в сітковому ансамблі і як носій кубатури. В цих випадках постає проблема сегментного тестування нових базисів (на сумісність).

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Ми розглядаємо системи обчислювальних 2*D*-шаблонів, які утворені на зразок арифметичних систем і геометрії трикутних і квадратних чисел Піфагора [1]. Зацікавлений читач швидко знайде зв'язок між фігурними числами Піфагора і сучасним методом скінченних елементів [2-4]. Наприклад, лагранжеві елементи успадкували (без будь-яких відхилень) форму, кількість точок та їх розташування на фігурних числах Піфагора. Модифікації кубатур конструюються шляхом зваженого усереднення вузлових аплікат. Стратифікація вибіркових аплікат може здійснюватися за різними "рецептами". Тому на одному шаблоні іноді виникають дві або три кубатури. Деякі кубатури відрізняються від класичних кубатур [3-5], що отримані традиційним методом невизначених коефіцієнтів. В таких випадках виникає потреба порівняти оцінки подвійного інтеграла. Про метод Монте-Карло можна прочитати в [5, 6]. Кубатурні формули (переважно для трикутних шаблонів) є в [2-4]. Двовимірні аналоги одновимірних квадратур Котеса майже не зустрічаються, хоча системний аналіз показує, що версія Котеса має не лише академічний інтерес [8-11].

Мета дослідження

На прикладах обчислювальних 2*D*-шаблонів і випадкових кубатур проілюструвати можливості і переваги процедури стратифікації вибіркових аплікат, підкреслити важливу роль центрованих моделей (з вузлом інтегрування в барицентрі трикутника, квадрата). Система кубатур створює умови для отримання деяких комбінованих алгоритмів, де випадковий вибір сполучається із обчисленням детермінованої суми. Кінцева мета дослідження – поповнити модельний ряд шаблонів і кубатур новими моделями на зразок нестандартного трикутника [7]. Заслуговують на увагу мішані моделі квадратів $Q6$ і $Q12$.

Викладення основного матеріалу дослідження

Історично все почалося з фігурних чисел Піфагора, які через 25 століть несподівано потрапили в сучасний метод скінченних елементів (МСЕ). На рис. 1 показані системи трикутних та квадратних піфагорових чисел.

Сьогодні такі моделі широко використовують в задачах відновлення функцій двох аргументів в рамках інтерполяційної гіпотези Лагранжа (або Ерміта).

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19

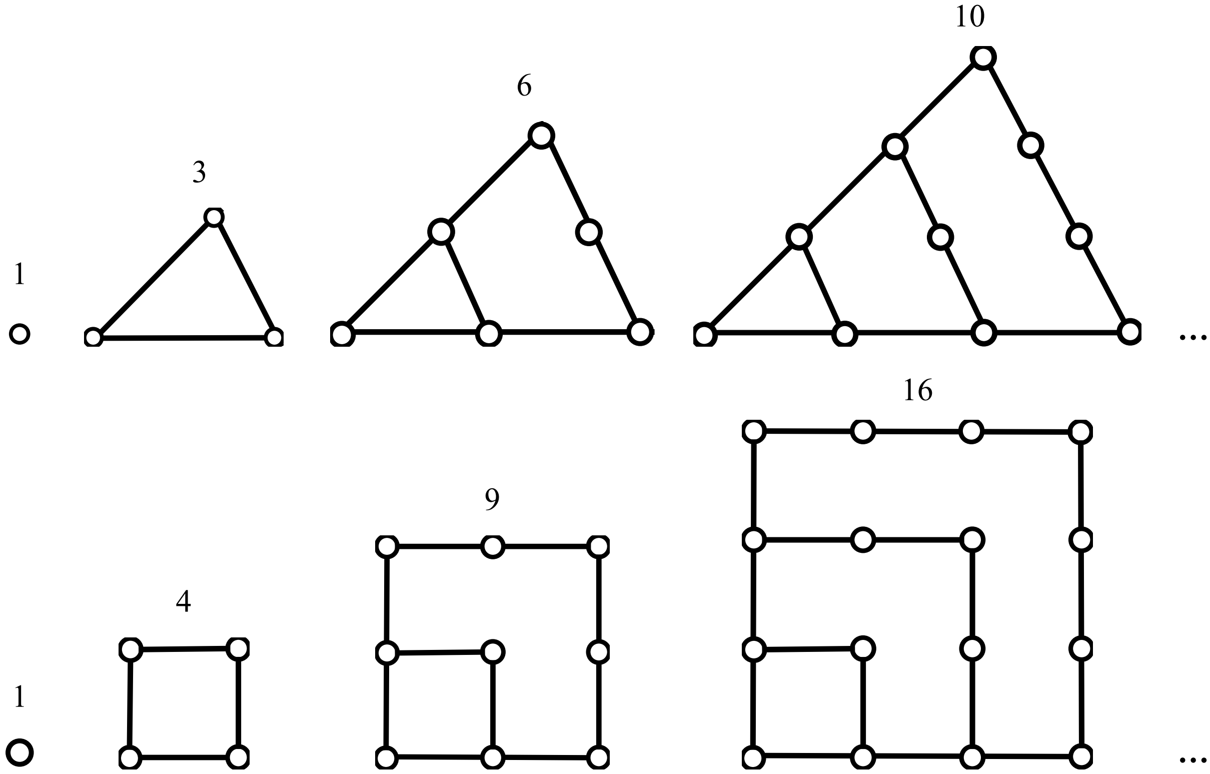

Рис. 1. Системи піфагорових чисел

Наша задача – побудувати обчислювальні шаблони і відповідні формули для наближеного інтегрування функцій двох аргументів. Почнемо з трикутників, які показані на рис. 2.

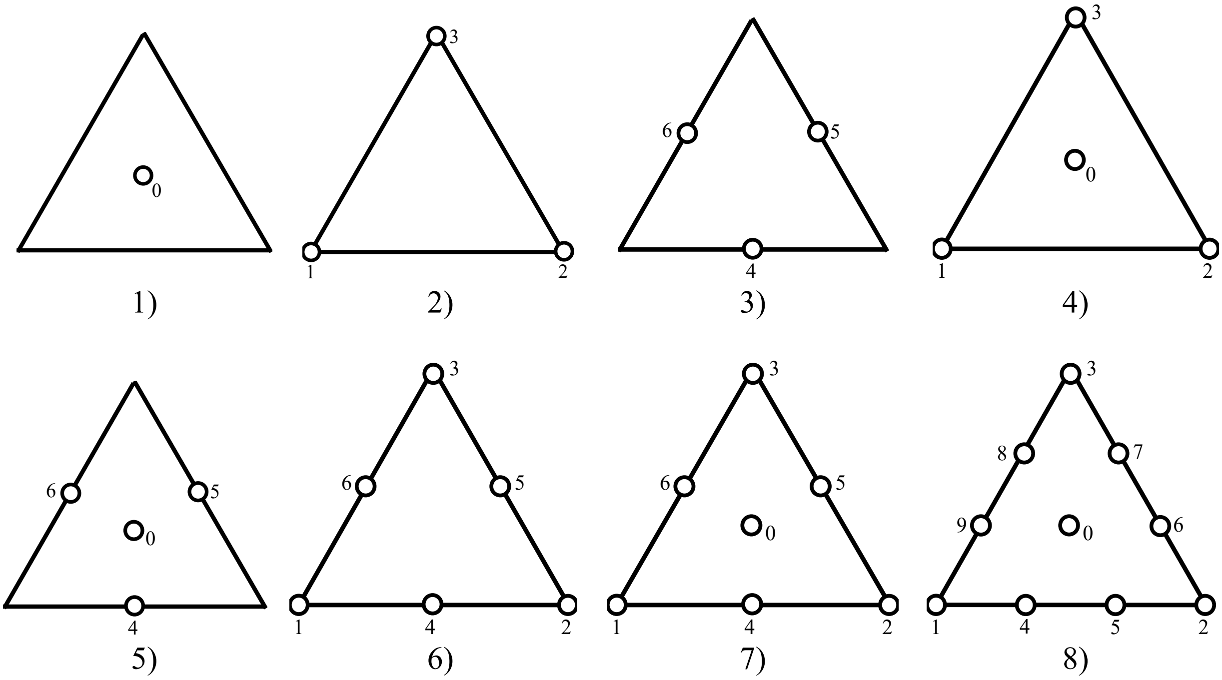

Рис. 2. Система трикутних шаблонів для подвійного інтегрування

Перші три формули спираються на просту вибірку і не потребують коментарів:

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19

1) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \approx S \cdot f_0$,

2) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \approx S \cdot \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} f_i$,

3) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \approx S \cdot \frac{1}{3}\sum_{i=4}^{6} f_i$,

де S – площа області D, f_i – вузлові аплікати.

Ці прості оцінки об’єму тіла V узагальнюють відомі квадратури: центрального інтегрування і трапецій. Якщо об’єднати 1) і 2) та скористатися принципом повузлової пропорційності, можна отримати формулу підвищеної точності:

4A) $V \approx S \cdot \left(\frac{3}{4} f_0 + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{3} f_i \right)$.

До речі, метод невизначених коефіцієнтів дає саме цю кубатуру [2]. Зважене усереднення 1) і 2) з коефіцієнтами $2/3$ і $1/3$ (“золота” пропорція) дає:

4B) $V \approx S \cdot \left(\frac{2}{3} f_0 + \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{3} f_i \right)$.

Арифметичне усереднення 1) і 2) дає кубатуру (паритет):

4C) $V \approx S \cdot \left(\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} f_i \right)$.

В рамках квазіметоду Монте-Карло експерименти (стратифікація вибірки) не тільки цікаві, але й корисні. Варто показати ще один приклад “зважування” 1) і 2) з коефіцієнтами $3/5$ і $2/5$:

4D) $V \approx S \cdot \left(\frac{3}{5} f_0 + \frac{2}{15}\sum_{i=1}^{3} f_i \right)$.

Шаблон 5) можна отримати в результаті суперпозиції 1) і 3). “Рецепти” стратифікації вибірки аналогічні з 4). На нецентрованому шаблоні 6) можна обмежитись арифметичним усередненням, хоча це не зовсім природно. Зважування шаблонів 2) і 3) краще виконати з коефіцієнтами $1/3$ і $2/3$:

6) $V \approx S \cdot \left(\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{3} f_i + \frac{2}{9}\sum_{i=4}^{6} f_i \right)$.

Шаблон 7) – це суперпозиція 3) і 4). Якщо “зважувати” ці шаблони за правилом повузлової пропорційності, отримаємо:

7A) $V \approx S \cdot \left(\frac{3}{7} \cdot f_0 + \frac{1}{21}\sum_{i=1}^{3} f_i + \frac{1}{7}\sum_{i=4}^{6} f_i \right)$.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19

Якщо скористатися “золотою” пропорцією ($3/5$ і $2/5$), або методом невизначених коефіцієнтів, отримаємо кубатуру:

$$7\text{B})\quad V \approx S \cdot \left(\frac{9}{20} \cdot f_0 + \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{3} f_i + \frac{2}{15} \sum_{i=4}^{6} f_i \right),$$

яка майже не відрізняється від 7А).

Уважний читач вже помітив, що деякі трикутники виконують потрійну роль – як числа в системі Піфагора (рис.1), як скінченні елементи [2, 4] і як обчислювальні шаблони. Як відомо, у скінченного елемента є базис. Це дає іще один “рецепт” побудови кубатури шляхом інтегрального усереднення базисних функцій. В інтегральному численні це правило існує з часів Ньютона і Котеса. На жаль, воно не завжди гарантує фізичну адекватність інтегральних характеристик моделі. Наприклад, на трикутнику 6) інтегральне усереднення виключає із кубатури половину аплікат: ваговий коефіцієнт кутового вузла дорівнює нулю. Нижче на квадраті ми зустрінемо небажані від’ємні характеристики. Нещодавно [7] вдалося побудувати базис для нетрадиційного трикутника 7) (рис. 2). Інтегральне усереднення підтверджує формулу 7В).

Кубатура для трикутника 8) (рис. 2) є результатом інтегрального усереднення аплікат і має вигляд:

$$8)\quad V \approx S \cdot \left(\frac{9}{20} \cdot f_0 + \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{3} f_i + \frac{3}{40} \sum_{i=4}^{9} f_i \right).$$

Під оптимізацією кубатури ми розуміємо мінімізацію похибки. Це цілком природно.

Тепер розглянемо систему квадратних шаблонів (рис. 3).

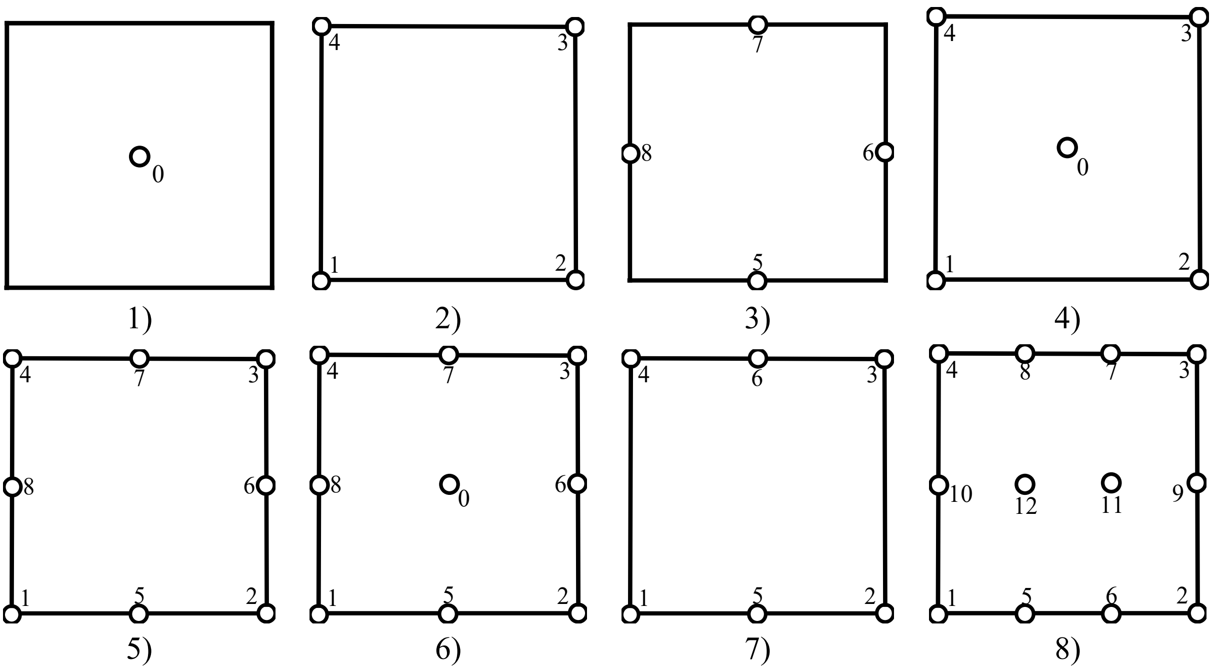

Рис. 3. Система квадратних шаблонів для подвійного інтегрування

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19

У більшості випадків побудова відповідних кубатур – це $2D$-узагальнення відомих квадратур. В окремих випадках допомагає геометрична інтуїція та когнітивність шаблона. Перші три моделі прості і зрозумілі:

1) $V \approx S \cdot f_0$, 2) $V \approx \frac{S}{4}\sum_{i=1}^{4} f_i$, 3) $V \approx \frac{S}{4}\sum_{i=5}^{8} f_i$.

Четверта модель уже має альтернативні кубатури, як результат "зважування" квадратів 1) і 2):

$$4A)\quad V \approx S \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot f_0 + \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{4} f_i \right) \quad \text{(повузлова пропорція)},$$

$$4B)\quad V \approx S \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot f_0 + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{4} f_i \right) \quad \text{("золота" пропорція)},$$

$$4C)\quad V \approx S \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f_0 + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4} f_i \right) \quad \text{(паритет)}.$$

Решта квадратів використовуються в МСЕ і мають відповідні базиси. Інтегральне усереднення базису серендипового елемента $Q8$ [3, 4] дає кубатуру:

$$5A)\quad V \approx S \cdot \left(-\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{4} f_i + \frac{1}{3}\sum_{i=4}^{8} f_i \right).$$

Практика інтегрування не забороняє кубатури з від'ємними ваговими коефіцієнтами, але і не рекомендує.

Якщо при "зважуванні" квадратів 2) і 3) порівняти площі $\left(S_{1234} = 2 \cdot S_{5678}\right)$, отримаємо альтернативу:

$$5B)\quad V \approx S \cdot \left(\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{4} f_i + \frac{1}{6}\sum_{i=4}^{8} f_i \right).$$

Тут неважко помітити "золоту" пропорцію ($1/3$ і $2/3$), яка завжди допомагає, якщо нічого іншого не спадає на думку.

Шаблон 6) використовують в МСЕ як елемент біквадратичної інтерполяції за Лагранжем. Інтегральне усереднення базису дає кубатуру:

$$6)\quad V \approx S \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot f_0 + \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{4} f_i + \frac{1}{9}\sum_{i=5}^{8} f_i \right).$$

Це $2D$-аналог правила Сімпсона.

Шаблон 7) – це мішаний СЕ лінійно-квадратичної інтерполяції. Кубатура комбінується із двох квадратур: Сімпсона і трапецій.

$$7)\quad V \approx S \cdot \left(\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{4} f_i + \frac{1}{3}\sum_{i=5}^{6} f_i \right).$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19

Шаблон 8) – це мішаний квадратично-кубічний скінченний елемент. В результаті інтегрального усереднення базисних функцій отримуємо кубатуру:

$$8)\ \ V \approx S \cdot \left(\frac{1}{48} \sum_{i=1}^{4} f_i + \frac{1}{16} \sum_{i=5}^{8} f_i + \frac{1}{12} \sum_{i=9}^{10} f_i + \frac{1}{4} \sum_{i=11}^{12} f_i \right).$$

Вагові коефіцієнти стратифікованої вибірки (12 аплікат) успадковані від класичних квадратур: “$3/8$” і Сімпсона.

Висновки

Якщо зафіксовано кількість вузлів інтегрування та їх розташування, ми маємо з'ясувати, яким критерієм скористатися для визначення коефіцієнтів лінійної комбінації аплікат. В системі альтернативних кубатур жоден із критеріїв стратифікації не має помітної переваги над іншими. Для кожного критерію можна підібрати приклад, в якому він буде кращим. Щоб знайти найбільш ефективну кубатуру для конкретної задачі потрібен спеціальний аналіз.

Розглянуті у роботі шаблони і кубатури спираються на ідеї Ньютона і Котеса. Шаблони і кубатури Гаусса – тема наступної публікації.

Список використаної літератури

1. Яглом И.М. Математика и реальный мир. М.: Знание, 1978. 64 с.
2. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
3. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
4. Segerlind L.J., Applied Finite Element Analysis. New York-London-Sydney-Toronto, John Wiley & Sons. 1976. 422 p.
5. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 296 с.
6. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1985. 80 с.
7. Хомченко А. Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Нестандартна модель трикутного скінченного елемента Т7. *Системні технології*. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 5 (130). Дніпро, 2020. С. 37-46. DOI: 10.34185/1562-9945-5-130-2020-05
8. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1973.
9. Литвиненко Е.И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей: дис. … кандидата техн. наук: 05.13.06. Херсон, 1999. 172 с.
10. Astionenko I.O, Litvinenko O.I., Osipova N.V., Tuluchenko G.Ya., Khomchenko A.N. Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *AIP Conference Proceedings Report*. 2016. V. 1773, No 1, 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
11. Хомченко А. Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. “Дута” мода як когнітивна модель побудови трикутника третього порядку. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 2. С. 110-117. DOI: 10.32782/2618-0340/2019.2-2.10

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19

References

1. Yaglom I.M. (1978). Matematika i realnyiy mir. M.: Znanie.
2. Marchuk, G.I., & Agoshkov, V.I. (1981). Vvedenie v proektsionno-setochnyie metodyi. M.: Nauka.
3. Zienkiewicz, O. C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill.
4. Segerlind, L.J. (1976). Applied Finite Element Analysis. New York-London-Sydney-Toronto, John Wiley & Sons.
5. Ermakov, S.M., & Mihaylov, G.A. (1982). Statisticheskoe modelirovanie. M.: Nauka.
6. Sobol, I.M. (1985). Metod Monte-Karlo. M.: Nauka.
7. Khomchenko, A. N., Lytvynenk,o O.I., & Astionenko, I.O. (2020). Nestandartna model trykutnoho skinchennoho elementa T7. *Systemni tekhnolohii*. Rehionalnyi mizhvuzivskyi zbirnyk naukovykh prats. Dnipro. **5** (130), 37-46. DOI: 10.34185/1562-9945-5-130-2020-05.
8. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
9. Litvinenko, E.I. (1999). Matematicheskie modeli i algoritmyi kompyuternoy diagnostiki fizicheskih poley: dis. … kandidata tehn. nauk: 05.13.06. Herson.
10. Astionenko, I.O, Litvinenko, O.I., Osipova, N.V., Tuluchenko, G.Ya., & Khomchenko, A.N. (2016). Cognitive-graphic Method for Constructing of Hierarchical Form of Basic Functions of Biquadratic Finite Element. *AIP Conference Proceedings Report*. **1773**, 1, 040002-1 – 040002-11. DOI: 10.1063/1.4964965.
11. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O.I., & Astionenko, I.O. (2019). «Duta» moda yak kohnityvna model pobudovy trykutnyka tretoho poriadku. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. **2**, 2, 110-117. DOI: 10.32782/2618-0340/2019.2-2.10

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили, e-mail: khan@chmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.

Тендітний Юрій Григорович – старший викладач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: nten.hfnuk@gmail.com.

Старченко Віктор Олексійович – магістр кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: Starchenko95viktor@gmail.com.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.2.19