УДК 517.91:532.2

С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ, О.М. ЛЕНЮК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
О.М. НІКІТІНА
Чернівецький ліцей №1 математичного та економічного профілів
М.І. ШИНКАРИК
Західноукраїнський національний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким використанням композитних матеріалів, існує нагальна потреба у вивченні фізико-технічних характеристик таких матеріалів, що знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи рівнянь з чатинними похідними другого порядку на кусково-однорідному сегменті з відповідними початковими та крайовими умовами, зокрема, задача динаміки математично призводить до побудови розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень.

У цій роботі побудовано розв'язок задачі динаміки на двоскладовому сегменті полярної осі $r \in [0; R_2]$ *з точкою спряження методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Бесселя.*

Задача динаміки на двоскладовому сегменті полярної осі математично призводить до побудови обмеженого розв'язку сепаратної системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу з відповідними початковими умовами, умовами спряження та крайовими умовами. Застосувавши до цієї крайової задачі гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя, отримаємо задачу Коші. Знайшовши розв'язок задачі Коші, ми застосовуємо до нього обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя.

Пряме інтегральне перетворення Ейлера-Бесселя на сегменті полярної осі з точкою спряження записується у вигляді матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до заданої задачі за правилом множення матриць. В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Обернене перетворення Ейлера-Бесселя записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення певних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, задача динаміки, гібридне інтегральне перетворення.

С.Г. БЛАЖЕВСКИЙ, О.М. ЛЕНЮК
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича
О.М. НИКИТИНА
Черновицкий лицей №1 математического и экономического профилей
Н.И. ШИНКАРИК
Западноукраинский национальный университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТЕ

На современном этапе научно-технического прогресса, особенно в связи с широким использованием композитных материалов, существует настоятельная потребность в изучении физико-технических

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.2

характеристик таких материалов, находящихся в различных условиях эксплуатации, что математически приводит к задаче решения сепаратной системы уравнений с частными производными второго порядка на кусочно-однородном сегменте с соответствующими начальными и краевыми условиями, в частности, задача динамики математически приводит к построению решения сепаратной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Одним из эффективных методов построения интегральных изображений аналитических решений алгоритмического характера задач математической физики является метод гибридных интегральных преобразований.

В этой работе построено решение задачи динамики на двухкомпонентном сегменте полярной оси $r \in [0; R_2]$ *с точкой сопряжения методом гибридного интегрального преобразования Эйлера-Бесселя.*

Задача динамики на двухкомпонентном сегменте полярной оси математически приводит к построению ограниченного решения сепаратной системы двух дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с соответствующими начальными условиями, условиями сопряжения и краевыми условиями. Применив к этой краевой задаче гибридное интегральное преобразование Эйлера-Бесселя, получим задачу Коши. Найдя решение задачи Коши, мы применяем к нему обратное гибридное интегральное преобразование Эйлера-Бесселя.

Прямое интегральное преобразование Эйлера-Бесселя на сегменте полярной оси с точкой сопряжения записывается в виде матрицы-строки. Исходная система и начальные условия записываются в матричной форме, и мы применяем операторную матрицу-строку к заданной задаче по правилу умножения матриц. В результате получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Обратное преобразование Эйлера-Бесселя записывается в виде операторной матрицы-столбца, и мы применяем его к построенному решению задачи Коши. После осуществления определенных преобразований мы получаем единственное решение исходной задачи.

Построенные решения краевых задач имеют алгоритмический характер, что позволяет использовать их как в теоретических исследованиях, так и в числовых расчетах.

Ключевые слова: гибридный дифференциальный оператор, задача динамики, гибридное интегральное преобразование.

S.G. BLAZHEVSKIY, O.M. LENYUK
Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych
O.M. NIKITINA
Chernivtsi Lyceum №1 of Mathematical and Economic Profiles
M.I. SHYNKARYK
West Ukrainian National University

MODELING OF DYNAMIC PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF EULER-BESSEL TYPE ON THE SEGMENT

At the present stage of scientific and technological progress, especially in connection with the widespread use of composite materials, there is an urgent need to study the physical and technical characteristics of such materials that are in different operating conditions, which mathematically leads to the problems of solving a separate system of partial differential equations of the second order on a piecewise homogeneous segment with the corresponding initial and boundary conditions, in particular, the dynamics problem mathematically leads to the construction of a solution of a separate system of partial differential equations of hyperbolic type.

One of the effective methods for constructing of integral representations of analytic solutions of the algorithmic nature of the problems of mathematical physics is the method of hybrid integral transforms.

In this paper we construct a solution of the dynamics problem on the two-component segment of polar axis $r \in [0; R_2]$ *with point of conjugation by the method of hybrid integral Euler-Bessel transform.*

The problem of dynamics on the two-component segment of polar axis mathematically leads to the construction of a limited solution of a separate system of two partial differential equations of hyperbolic type with corresponding initial conditions, conjugation conditions and boundary conditions. Applying to this boundary-value problem the hybrid integral Euler-Bessel transform, we obtain the Cauchy problem. Finding a solution to the Cauchy problem, we apply to it the inverse hybrid integral Euler-Bessel transform.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.2

A straight integral Euler-Bessel transform on the segment of polar axis with point of conjugation is written in the form of a matrix row. The output system and the initial conditions are written in a matrix form and we apply the operator matrix row to the given problem by the rule of multiplication of matrices. As a result we obtain the Cauchy problem for the ordinary differential equation of the second order. The inverse Euler-Bessel transform is written in the form of an operator matrix column and we apply it to the constructed solution of the Cauchy problem. After completing certain transformations, we obtain the unique solution of the original problem.

The constructed solutions of boundary value problems have an algorithmic character, which allows us to use them both in theoretical studies and in numerical calculations.

Keywords: hybrid differential operator, problem of dynamic, hybrid integral transform.

Постановка проблеми

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1 – 3], зокрема задача динаміки математично приводить до побудови розв'язку сепаратної системи рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоримтічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень [1 – 6].

В [4] побудовано гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на сегменті полярної осі $r \in [0; R_2]$ з однією точкою спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Ейлера-Бесселя.

Мета дослідження

Побудувати розв'язок задачі динаміки на двоскладовому сегменті полярної осі $r \in [0; R_2]$ з однією точкою спряження за допомогою гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Бесселя.

Викладення основного матеріалу дослідження

Задача динаміки на двоскладовому сегменті математично приводить до побудови в області

$$D_1 = \{(t,r) : t > 0, r \in I_1\}, \; I_1 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2), R_2 < \infty\}$$

обмеженого розв'язку системи рівнянь гіперболічного типу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\alpha_1}^*[u_1] = f_1(t,r), \; r \in (0, R_1), \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}[u_2] = f_2(t,r), \; r \in (R_1, R_2),
\end{gathered} \tag{1}$$

за початковими умовами

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.2

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r), \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j), \quad j = \overline{1,2}, \quad R_0 = 0, \tag{2}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1\right)u_1 - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1\right)u_2\right]\Big|_{r=R_1} = 0, \ j = 1,2, \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0} r^{\gamma} u_1 = 0, \quad \left(\alpha_{22}^2 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^2\right)u_2\,|_{r=R_2} = 0. \tag{4}$$

Тут беруть участь диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu,\alpha}$ та диференціальний оператор Ейлера другого порядку B_{α}^{*} [4].

На коефіцієнти, що беруть участь в постановці задачі, накладаються певні природні умови обмеження [4].

В [4] побудовано пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ й обернене $H_{\nu,(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_1 гібридним диференціальним оператором

$$M_{\nu,(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\alpha_1}^{*} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu,\alpha_2} \ :$$

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_0^{R_2} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{5}$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{6}$$

та виведена основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $M_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}[M_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^{2} k_i^2 \tilde{g}_i(\beta) + (-\alpha_{22}^2)^{-1} V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta)a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1} g_R +$$

$$+ c_{11}^{-1} R_1^{2\alpha_1+1}[Z_{\nu,(\alpha);12}^1(\beta)\omega_{21} - Z_{\nu,(\alpha);22}^1(\beta)\omega_{11}]. \tag{7}$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда, спектральна вектор-функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{2} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)V_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta), \quad R_0 = 0,$$

вагова функція

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_2 + 1}$$

та спектральна щільність

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.2

$$\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)=\beta[b_1(\beta)]^{-1}\left(\left[\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)^{-1},$$

а також інші величини та функції, виписані в [4].

Знайдемо інтегральне зображення аналітичного розв’язку задачі (1) – (4) методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Бесселя на двоскладовому сегменті полярної осі $r\in[0;R_2]$ з точкою спряження, запровадженого правилами (5) – (7).

Запишемо систему (1) та початкові умови (2) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2-a_1^2B^*_{\alpha_1}\right)u_1(t,r)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2-a_2^2B_{\nu,\alpha_2}\right)u_2(t,r)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\end{pmatrix}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\end{pmatrix},\quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\end{pmatrix}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}\varphi_1(r)\\ \varphi_2(r)\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}$, який діє згідно правила (5), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,(\alpha)}[\ldots]=\left[\int_0^{R_1}\ldots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr\ \int_{R_1}^{R_2}\ldots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr\right]. \tag{9}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (9) за правилом множення матриць до задачі (8). Внаслідок основної тотожності (7) отримуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta^2\right)\tilde u(t,\beta)+\left(k_1^2+\gamma_1^2\right)\int_0^{R_1}u_1(t,r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+\left(k_2^2+\gamma_2^2\right)\int_{R_1}^{R_2}u_2(t,r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr=\tilde f(t,\beta),$$

$$\tilde u(t,\beta)\big|_{t=0}=\tilde g(\beta),\quad \frac{d\tilde u}{dt}\Big|_{t=0}=\tilde\varphi(\beta).$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\}=\gamma_1^2$. Покладемо всюди $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge 0$. Одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta^2+\gamma_1^2\right)\tilde u(t,\beta)=\tilde f(t,\beta),$$

$$\tilde u\big|_{t=0}=\tilde g(\beta),\quad \frac{d\tilde u}{dt}\Big|_{t=0}=\tilde\varphi(\beta). \tag{10}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв’язком задачі Коші (10) є функція [7]

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.2

$$\tilde{u}(t,\beta)=\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{\varphi}(\beta)+\frac{d}{dt}\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{g}(\beta)+\int_0^t\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{f}(\tau,\beta)d\tau. \qquad (11)$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ згідно правила (6), як обернений до (9), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\ldots]=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty\ldots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\\ \dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty\ldots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (12) за правилом множення матриць до матриці-елемента

$$[\tilde{u}(t,\beta)],$$

де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (11), одержуємо єдиний розв'язок гіперболічної задачі (1) – (4):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\int_0^{R_1}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho)+\varphi_1(\rho)\delta_+(\tau)\right]\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}d\rho\, d\tau+$$

$$\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\varphi_2(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}d\rho\, d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{R_1}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}d\rho+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_2+1}d\rho\,. \qquad (13)$$

У рівностях (13) беруть участь породжені неоднорідністю системи функції впливу:

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\int_0^\infty\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\ \ j,k=1,2. \qquad (14)$$

При цьому $\delta_+(t)$ – дельта-функція Дірака, зосереджена в точці $t=0+$. Вона використовується в рівності (13) для скорочення запису і означає, що потрібно брати значення відповідної функції в точці 0.

Зауваження. При $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2\}=\gamma_2^2$, виконується нерівність: $k_j^2=\gamma_2^2-\gamma_j^2\geq 0,\ j=1,2,$ і у формулі (14) вираз $(\beta^2+\gamma_1^2)$ міняється на вираз $(\beta^2+\gamma_2^2)$.

Висновки

Побудований розв'язок (13) гіперболічної задачі (1) – (4) має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.2

Список використаної літератури

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К.: Наук. думка, 1992. 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 188 с.
3. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. Чернівці: Прут, 2004. 276 с.
4. Нікітіна О.М. Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера-Бесселя). Львів, 2008. 86 с. (Препринт. НАН України, Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача; 01-08).
5. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Ч. 1. Тернопіль: Економ. Думка, 2004. 368 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.

References

1. Kolyano, Yu.M. (1992). Metodyi teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela.K.: Nauk. dumka.
2. Leniuk, M.P. (1197). Temperaturni polia v ploskykh kuskovo-odnoridnykh ortotropnykh oblastiakh. K.: In-t matematyky NAN Ukrainy.
3. Konet, I.M. & Leniuk, M.P. (2004). Temperaturni polia v kuskovo-odnoridnykh tsylindrychnykh oblastiakh. Chernivtsi: Prut.
4. Nikitina, O.M. (2008). Hibrydni intehralni peretvorennia typu (Eilera-Besselia). Lvivs. (Preprynt. NAN Ukrainy, In-t prykladnykh problem matematyky i mekhaniky im. Ya.S. Pidstryhacha; 01-08).
5. Leniuk, M.P. & Shynkaryk, M.I. (2004). Hibrydni intehralni peretvorennia (Furie, Besselia, Lezhandra). Chastyna 1. Ternopil: Ekonom. Dumka.
6. Tihonov, A.N. & Samarskiy, A.A. (1972). Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka.
7. Stepanov, V.V. (1959). Kurs differentsialnyih uravneniy. M.: Fizmatgiz.

Блажевський Степан Георгійович – к.ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, e-mail: blgs@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3396-7253.

Ленюк Олег Михайлович – к.ф.-м.н., доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, e-mail: O.Lenyuk@chnu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9494-2864.

Нікітіна Ольга Михайлівна – к.ф.-м.н., доцент, вчитель математики Чернівецького ліцею №1 математичного та економічного профілів, e-mail: o.nikitina.chv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0702-0453.

Шинкарик Микола іванович – к.ф.-м.н., доцент кафедри економіко-математичних методів, перший проректор Західноукраїнського національного університету e-mail: shynkaryk_m@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8191-8953.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.2