УДК 514.13

К.В. ВАЛЬКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
В.І. КУЗЬМИЧ, Л.В. КУЗЬМИЧ, О.Г. САВЧЕНКО
Херсонський державний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМНОГО РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ

Робота присвячена побудові математичної моделі зображення геометричних образів у метричних просторах за допомогою основних понять метричної геометрії. Головною особливістю цієї геометрії є можливість використання лише однієї характеристики, що встановлюється між точками метричного простору, – відстані між ними. Це накладає на дослідження з метричної геометрії значні обмеження та збільшує складність аналітичних співвідношень між її основними геометричними образами – прямолінійним розміщенням точок, плоским розміщенням точок, кутом і його числовою характеристикою. Образи класичних геометричних фігур евклідової геометрії – трикутник, тетраедр і таке інше можуть мати достатньо незвичні форми та властивості у метричній геометрії. Значною перевагою цієї геометрії є достатньо високий рівень загальності, який дозволяє з однієї точки зору розглядати як класичну геометрію Евкліда, так і неевклідові геометрії. Швидкий розвиток метричної геометрії у наш час зумовлений численними її застосуваннями у різних галузях науки та інженерії. Складність аналітичних перетворень частково компенсується можливістю застосування до них сучасних засобів обчислювальної техніки та комп'ютерної візуалізації геометричних образів.

Однією із перепон до використання комп'ютерної візуалізації є необхідність використання формул перерахунку відстаней між точками метричного простору у декартові координати цих точок. Сучасні програмні засоби для зображення геометричних образів використовують, в основному, задані координати точок, що утруднює геометричну інтерпретацію цих образів та їх перетворення. У роботі пропонуються формули переходу від значень відстані між точками метричного простору до їх декартових координат у випадку геометричного образу тетраедра. Цей образ відіграє значну роль у встановленні фактів прямолінійного та плоского розміщення точок простору і дає можливість візуалізації впливу метрики простору на його геометричні властивості.

Програмне забезпечення результатів роботи використовує як стандартні обчислювальні засоби та засоби візуалізації (електронні таблиці Excel, динамічне геометричне середовище GeoGebra 3D), так і окремі комп'ютерні застосунки для обчислення об'єму тетраедра за довжинами його ребер.

Ключові слова: метричний простір, відстань між точками, прямолінійне розміщення точок, кутова характеристика, плоске розміщення точок, тетраедр.

Е.В. ВАЛЬКО
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
В.И. КУЗЬМИЧ, Л.В. КУЗЬМИЧ, А.Г. САВЧЕНКО
Херсонский государственный университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Работа посвящена построению математической модели изображения геометрических образов в метрических пространствах с помощью основных понятий метрической геометрии. Главной особенностью этой геометрии является возможность использования только одной характеристики, которая устанавливается между точками метрической пространства, – расстояния между ними. Это накладывает на исследования по метрической геометрии значительные ограничения и увеличивает сложность аналитических соотношений между ее основными геометрическими образами – прямолинейного расположения точек, плоского размещения точек, угла и его числовой характеристики. Образы классических геометрических фигур евклидовой геометрии – треугольник, тетраэдр и т.д. могут иметь достаточно необычные формы и свойства в метрической геометрии. Значительным преимуществом этой геометрии является высокий уровень общности, который позволяет с одной точки зрения рассматривать как классическую геометрию Евклида, так и неевклидовы геометрии. Быстрое развитие метрической геометрии в наше время обусловлено многочисленными ее приложениями в различных областях науки и инженерии. Сложность аналитических преобразований

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

частично компенсируется возможностью применения к ним современных средств вычислительной техники и компьютерной визуализации геометрических образов.

Одной из преград к использованию компьютерной визуализации является необходимость использовать формулы пересчёта расстояний между точками метрического пространства в декартовы координаты этих точек. Современные программные средства изображения геометрических образов используют, в основном, заданные координаты точек, что затрудняет геометрическую интерпретацию этих образов и их преобразования. В работе предлагаются формулы перехода от значений расстояния между точками метрической пространства к их декартовым координатам в случае геометрического образа тетраэдра. Этот образ играет значительную роль в установлении фактов прямолинейного и плоского размещения точек пространства, и дает возможность визуализации влияния метрики пространства на его геометрические свойства.

Программное обеспечение результатов работы использует как стандартные вычислительные средства и средства визуализации (электронные таблицы Excel, динамическую геометрическую среду GeoGebra 3D), так и отдельные компьютерные приложения для вычисления объема тетраэдра по длинам его ребер.

Ключевые слова: метрическое пространство, расстояние между точками, прямолинейное расположение точек, угловая характеристика, плоское размещение точек, тетраэдр.

K.V. VALKO

Taras Shevchenko National University of Kyiv

V.I. KUZ’MICH, L.V. KUZ’MICH, O.G. SAVCHENKO

Kherson State University

MODELING THE MUTUAL LOCATION OF POINTS OF THE METRIC SPACE

The work is devoted to the construction of a mathematical model of the image of geometric images in metric spaces using the basic concepts of metric geometry. The main feature of this geometry is the ability to use only one characteristic that is established between the points of the metric space - the distance between them. This imposes significant limitations on the study of metric geometry, and increases the complexity of analytical relationships between its basic geometric images - rectilinear placement of points, flat placement of points, angle and its numerical characteristics. Images of classical geometric figures of Euclidean geometry - a triangle, tetrahedron and so on, can have quite unusual shapes and properties in metric geometry. A significant advantage of this geometry is a significant level of generality, which allows from one point of view to consider both classical Euclidean geometry and non-Euclidean geometries. The significant development of metric geometry in our time is due to its numerous applications in various fields of science and engineering. The complexity of analytical transformations is partially offset by the possibility of applying modern computer technology and computer visualization of geometric images.

One of the obstacles to the use of computer visualization is the need to use formulas for calculating the distances between points of a metric space in the Cartesian coordinates of these points. Modern software for displaying geometric images uses mainly the specified coordinates of points. This makes it difficult to geometrically interpret these images and transform them. The paper proposes formulas for the transition from the values of the distance between the points of the metric space to their Cartesian coordinates in the case of a geometric image of a tetrahedron. This image plays a significant role in establishing the facts of rectilinear and flat placement of points in space and makes it possible to visualize the influence the metric of space on its geometric properties.

The results software uses both standard computing and visualization tools (Excel spreadsheets, GeoGebra 3D dynamic geometric environment) and individual computer applications to calculate the volume of a tetrahedron by the lengths of its edges.

Keywords: metric space, distance between points, rectilinear placement of points, angular characteristic, flat placement of points, tetrahedron.

Постановка проблеми

Тема роботи зумовлена необхідністю розробки програмних засобів для візуалізації геометричних образів у метричних просторах. Такі образи використовуються для вивчення геометричних властивостей та структуризації метричних просторів, а також для вивчення впливу метрики простору на його геометрію. Як правило, у метричному просторі будуються аналоги відповідних

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

геометричних об'єктів класичної геометрії Евкліда, однак їх властивості, форма можуть значно відрізнятись від звичних. Для того, щоб провести певну "геометризацію" метричного простору, необхідно коректно означити у ньому основні геометричні поняття, такі як точка, відстань між точками, прямолінійне розміщення точок, плоске розміщення точок, кут і його числова характеристика і таке інше. При цьому слід зберігати основні співвідношення класичної геометрії, з тим, щоб вони розглядались як частинні випадки такої геометризації. Одним із таких засобів "геометризації" метричного простору є метрична геометрія. Її суть полягає у використанні поняття відстані між двома точками, яке означається за допомогою відповідних аксіом.

Сучасні засоби комп'ютерної візуалізації базуються на використанні методу координат та векторної графіки при побудові геометричних образів. Однак, не завжди є змога отримати відразу необхідні числові значення координат і оперувати з ними. Інколи, перш ніж отримати значення необхідних координат, потрібна попередня аналітична обробка числових значень. Така ситуація виникає і при спробі візуалізації окремих образів метричної геометрії. Зокрема, достатньо проста, на перший погляд, задача зображення тетраедра, заданого довжинами своїх ребер, у деякому комп'ютерному графічному середовищі наштовхується на значні труднощі, пов'язані з визначенням самої можливості побудови такого тетраедра, а також з визначенням координат його вершин. У даній роботі будуть наведені формули переходу від довжин ребер тетраедра до координат його вершин, а також приклад впливу метрики простору на геометричні властивості взаємного розміщення точок цього простору.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Основи метричної геометрії були закладені англійським математиком Артуром Келі (1821-1895) та австрійсько-американським математиком Карлом Менгером (1903-1985). Із сучасним її станом можна ознайомитись, наприклад, за монографією Марселя Берже [1]. Поняття прямолінійного розміщення точок розглядалось В.Ф. Каганом [2] і вивчалось, зокрема, у [3, 4]. Плоске розміщення точок метричного простору розглядалось у роботах [5, 6, 7]. Окремі аналітичні співвідношення геометричного змісту у метричних просторах вивчались у роботі [8]. Поняття кута, утвореного трьома точками метричного простору розглядалось у роботах [9, 10]. У роботі [11] були отримані аналоги формули Юнгіуса для обчислення об'єму тетраедра, на основі яких у роботі [12] було представлено програмний засіб для виконання цих обчислень. Цей засіб, зокрема, частково вирішує питання існування тетраедра із заданими довжинами його ребер.

Мета дослідження

Метою цієї роботи є представлення математичної моделі візуалізації взаємного розміщення точок метричного простору за допомогою динамічного геометричного середовища GeoGebra 3D, на прикладі візуалізації взаємного розміщення чотирьох точок простору (візуалізація тетраедра і плоского розміщення точок).

Викладення основного матеріалу дослідження

Поняття метричного простору є базовим у математиці. У його основі лежить поняття відстані між двома точками простору. Поняття відстані означається за допомогою трьох аксіом: відстань невід'ємна, вона комутативна і, крім того, повинна виконуватись нерівність трикутника – відстань між двома точками простору не більша ніж сума відстаней від цих точок до третьої точки простору. Поряд з метричними просторами також активно досліджуються їх спеціальні класи та модифікації, що мають застосування у різних галузях сучасної науки. У цьому плані особливої уваги

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

заслуговують розмиті метричні простори, зокрема, стаціонарні розмиті метричні простори та пов'язані з ними функторіальні конструкції [13, 14]. Так, в роботі [15] розглянуто утворений за допомогою певної ультраметризації функтор ймовірнісних мір, який утворює монаду на категорії розмитих ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень.

У роботі ми розглянемо, у якості прикладу, два метричних простори, які часто використовуються у застосуваннях. Перший з них - це простір неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій. Його позначають $C_{[a,b]}$, а за відстань між двома його точками $f(x)$ і $g(x)$ беруть число: $\rho(f, g) = max_{x\epsilon[a,b]}|f(x) - g(x)|$. Крім цього, розглянемо простір неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій, у якому за відстань між двома точками $f(x)$ і $g(x)$ простору беруть число: $\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. Цей простір позначають через C_L. Правило ρ, за яким встановлюють відстань $\rho(x, y)$ між точками x і y метричного простору X, називають метрикою цього простору, а сам простір позначають через (X, ρ).

У метричному просторі розглядають геометричні образи відповідних геометричних об'єктів класичної геометрії Евкліда. Наприклад, якщо для трьох різних точок x, y і z метричного простору (X, ρ) виконується рівність:

$$\rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y), \tag{1}$$

то кажуть, що ці точки прямолінійно розміщені у просторі (X, ρ), а якщо будь-які три різні точки деякої множини точок простору розміщені прямолінійно, то таку множину природно назвати прямолінійно розміщеною у цьому просторі [2, с. 527; 4, с. 32; 5, с. 60; 6, с. 436].

Кутом, що утворений трьома різними точками x, y, z метричного простору (X, ρ), будемо називати упорядковану трійку цих точок: (x, y, z). При цьому, точку y будемо називати вершиною кута, пари точок (x, y) і (y, z) – його сторонами, а позначати сам кут будемо звичним чином: $\angle(x, y, z)$. Числову характеристику $\varphi(x, y, z)$ кута $\angle(x, y, z)$ у метричному просторі можна означити за допомогою аналога формули косинусів [6, с. 436; 9, с. 28-29; 10, с. 11]:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\rho^2(x, y) + \rho^2(y, z) - \rho^2(x, z)}{2\rho(x, y)\rho(y, z)}. \tag{2}$$

Такий запис можна дещо спростити, увівши позначення:

$$\rho(x_i, x_j) = \rho_{ij}, \quad \varphi(x_i, x_j, x_k) = \frac{\rho_{ij}^2 + \rho_{jk}^2 - \rho_{ik}^2}{2\rho_{ij}\rho_{jk}} = \varphi_{ijk} \; (i, j, k = 1,2,3, \dots).$$

Кутова характеристика у вигляді (2) зручна для означення плоского розміщення точок метричного простору. А саме: чотири різні точки x_1, x_2, x_3, x_4 метричного простору (X, ρ) будемо називати плоско розміщеними у цьому просторі, якщо виконується рівність:

$$1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0. \tag{3}$$

Рівність (3), фактично, означає рівність нулю об'єму тетраедра, вершинами якого є точки x_1, x_2, x_3, x_4 [5, с. 62-63; 6, с. 440; 11, с. 61-62]. Якщо будь-які чотири різні точки деякої множини точок метричного простору плоско розміщені, то таку множину точок природно назвати плоско розміщеною у цьому просторі [5, с. 63; 6, с. 440; 7, с. 43].

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

Слід зазначити, що коли чотири точки метричного простору задані, то питання візуалізації їх взаємного розміщення наштовхується на питання можливості побудови тетраедра із заданими довжинами його ребер. Ця задача схожа із задачею про побудову трикутника за заданими довжинами його сторін, однак, для тетраедра вона значно складніша, оскільки усіх можливих варіантів побудови тетраедра (його орієнтації) набагато більше: $6! = 720$. Якщо є однаковий набір шести довжин ребер тетраедра, то при різній його орієнтації тетраедр може існувати (його об'єм буде додатним), може не існувати (об'єм буде від'ємним), або може бути виродженим (об'єм буде дорівнювати нулю) [12]. В останньому випадку, як сказано вище, вершини тетраедра будуть плоско розміщеними у просторі. Числові розрахунки об'єму тетраедра, при різних варіантах його орієнтації, можна провести за допомогою спеціального калькулятора [11, с. 63; 12].

При моделюванні геометричних образів, утворених точками метричного простору, слід мати на увазі, що ці образи можуть мати властивості, які притаманні неевклідовій геометрії. Наприклад, прямолінійне розміщення чотирьох точок метричного простору, на відміну від геометрії Евкліда, не завжди забезпечує їх плоске розміщення [6, с. 439-441].

Наведемо приклад моделювання взаємного розміщення чотирьох різних точок простору $C_{[a,b]}$ за допомогою динамічного геометричного середовища GeoGebra 3D. Для цього встановимо певну орієнтацію тетраедра, вершинами якого є ці точки. Позначимо через $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $S(x_S, y_S, z_S)$ вершини тетраедра. Довжини ребер тетраедра позначимо: $AB = a_1$, $AS = a_2$, $AC = a_3$, $BS = a_4$, $BC = a_5$, $CS = a_6$. Вершину A помістимо у центр системи тривимірних декартових прямокутних координат (простір R^3), а вершину B – на додатну піввісь абсцис (рис. 1).

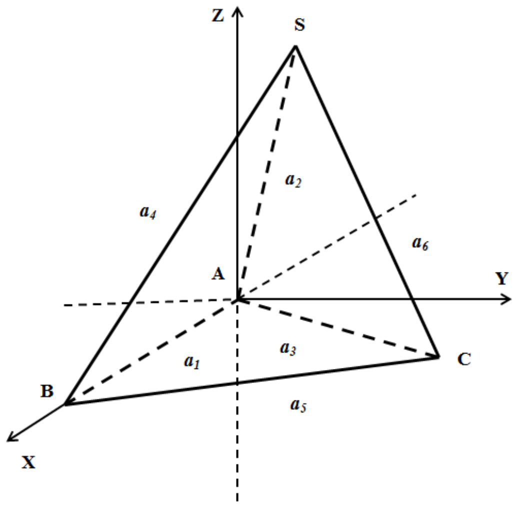


Рис. 1. Орієнтація тетраедра у просторі R^3

При розрахунку координат вершин тетраедра ординату точки C і аплікату точки S завжди будемо вибирати невід'ємними. Формули координат вершин тетраедра, при такій його орієнтації, будуть:

$x_A = 0; y_A = 0; z_A = 0.$

$x_B = a_1; y_B = 0; z_B = 0.$

$x_C = \frac{1}{2a_1}(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2); y_C = \frac{1}{2a_1}\sqrt{2(a_1^2 a_3^2 + a_1^2 a_5^2 + a_3^2 a_5^2) - a_1^4 - a_3^4 - a_5^4}; z_C = 0.$

$x_S = \frac{1}{2a_1}(a_1^2 + a_2^2 - a_4^2);$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

$$y_S = \frac{2a_1^2a_2^2 + 2a_1^2a_3^2 - 2a_1^2a_6^2 - (a_1^2 + a_2^2 - a_4^2)(a_1^2 + a_3^2 - a_5^2)}{2a_1\sqrt{2(a_1^2a_3^2 + a_1^2a_5^2 + a_3^2a_5^2) - a_1^4 - a_3^4 - a_5^4}};$$

$$z_S = \sqrt{\frac{\begin{array}{c} a_1^2a_6^2(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_1^2 - a_6^2) + a_2^2a_5^2(a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_6^2 - a_2^2 - a_5^2) + \\ + a_3^2a_4^2(a_1^2 + a_2^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_3^2 - a_4^2) - a_2^2a_3^2a_6^2 - a_1^2a_3^2a_5^2 - a_1^2a_2^2a_4^2 - a_4^2a_5^2a_6^2 \end{array}}{(a_1 + a_3 + a_5)(a_3 + a_5 - a_1)(a_1 + a_5 - a_3)(a_1 + a_3 - a_5)}}.$$

Приклад 1. Розглянемо у просторі $C_{[0,1]}$ чотири функції (точки простору): $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = x$, $y_4 = 1 - x$. У двовимірному прямокутному евклідовому просторі (простір R^2) графіки цих функцій мають вигляд (рис. 2):

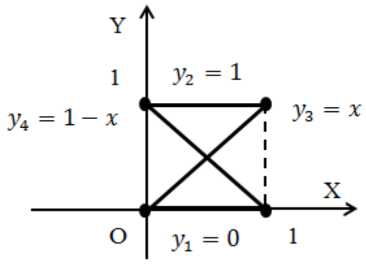
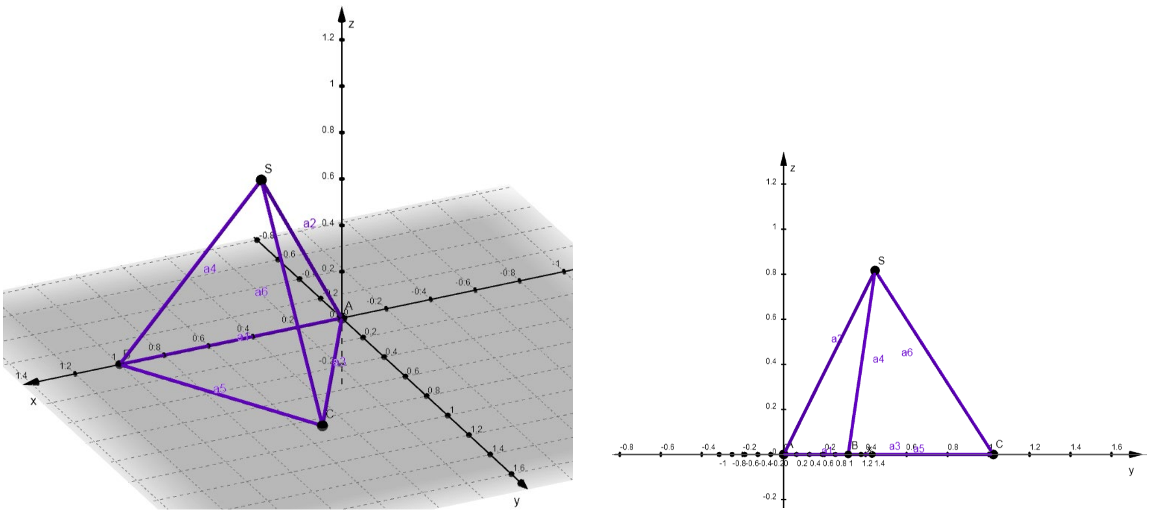


Рис. 2. Графіки функцій y_1, y_2, y_3, y_4 у просторі R^2

За метрикою простору $C_{[0,1]}$ відстані між точками y_1, y_2, y_3, y_4 будуть:

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 1.$$

У просторі R^3 тетраедр з такими довжинами ребер є правильним. У цьому можна переконатись візуально, увівши вказані довжини у спеціально створений у динамічному геометричному середовищі GeoGebra 3D калькулятор, розрахунки якого базуються на використанні наведених вище формул координат вершин тетраедра. У тому, що отримана візуалізація є саме тетраедром, можна впевнитись, повернувши зображення на певний кут таким чином, щоб спостерігач знаходився у площині основи тетраедра (рис. 3).



а) б)

Рис. 3. Візуалізація взаємного розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 простору $C_{[0,1]}$ у просторі R^3: а) вид з точки над площиною основи ($z > 0$), б) вид з точки площини основи ($z = 0$)

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

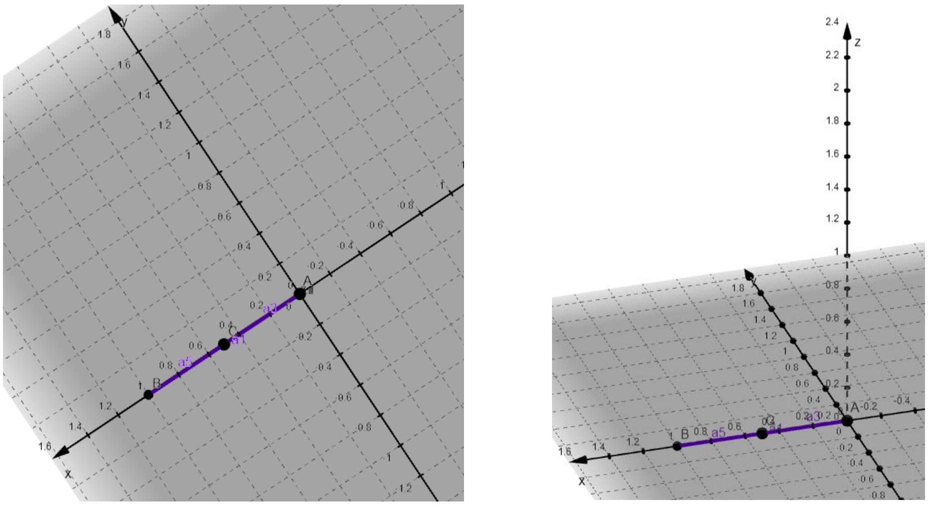
Тепер покажемо, що зміна метрики простору впливає на його геометрію. Для цього обчислимо відстані між точками y_1, y_2, y_3, y_4 за метрикою простору C_L. Ці відстані будуть:

$$\rho_{12} = 1;\ \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0{,}5.$$

У геометрії Евкліда при таких значеннях відстаней точки y_1, y_2, y_3 повинні бути прямолінійно розміщені, оскільки для них виконується рівність (1):

$$\rho_{12} = \rho_{13} + \rho_{23} = 0{,}5 + 0{,}5 = 1,$$

і, при цьому, точка y_3 повинна лежати посередині між точками y_1 і y_2. Аналогічно, точки y_1, y_2, y_4 теж повинні бути прямолінійно розміщені, а точка y_4 теж повинна лежати посередині між точками y_1 і y_2. Таким чином, у геометрії Евкліда точки y_3 і y_4 повинні співпадати, однак, відстань між ними за метрикою простору C_L відмінна від нуля: $\rho_{34} = 0{,}5$. На рисунку 4 можна побачити візуалізацію цього факту у просторі R^3:



а) **б)**

Рис. 4. Візуалізація прямолінійного розміщення точок y_1, y_2, y_3 простору C_L:
а)вид з точки $(0,0,z_0)$ осі координат, б) вид з точки над площиною основи $(z > 0)$

Приклад 2. Якщо відстані між точками x_1, x_2, x_3, x_4 деякого метричного простору задовольняють рівність (3), то ці точки плоско розміщені у даному просторі (вироджений тетраедр). Це може бути, наприклад, коли виконуються рівності:

$$\rho_{12} = 5;\ \rho_{13} = 3;\ \rho_{14} = 4;\ \rho_{23} = 4;\ \rho_{24} = 3;\ \rho_{34} = 5.$$

Дійсно, знайшовши за формулою (2) відповідні кутові характеристики, будемо мати:

$$\varphi_{213} = \frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}{2\rho_{12}\rho_{13}} = \frac{5^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{3}{5};$$
$$\varphi_{214} = \frac{\rho_{12}^2 + \rho_{14}^2 - \rho_{24}^2}{2\rho_{12}\rho_{14}} = \frac{5^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{4}{5};$$
$$\varphi_{314} = \frac{\rho_{13}^2 + \rho_{14}^2 - \rho_{34}^2}{2\rho_{13}\rho_{14}} = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0.$$

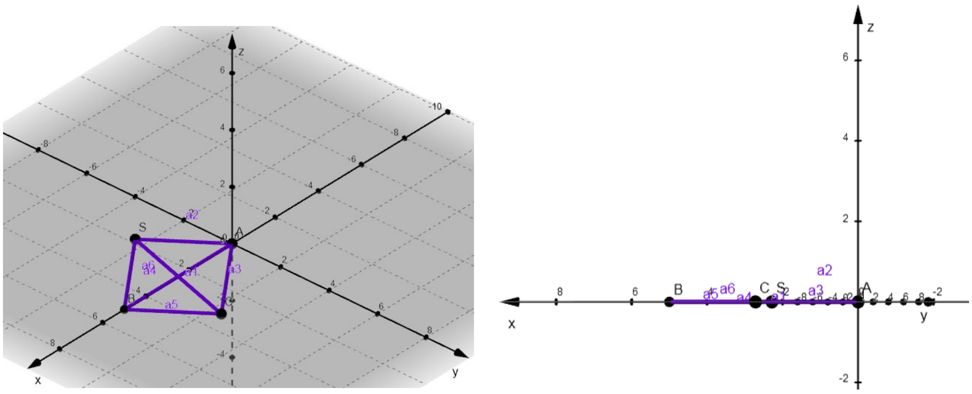
Підставивши знайдені значення кутових характеристик у ліву частину рівності (3), будемо мати:

$$1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 1 + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 0^2 = 0.$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

Оскільки рівність (3) виконується, то точки x_1, x_2, x_3, x_4 плоско розміщені у метричному просторі.

На Рисунку 5 представлена візуалізація у просторі R^3 плоского розміщення точок x_1, x_2, x_3, x_4 метричного простору. На рисунку а) зображено вигляд взаємного розміщення точок з точки над площиною основи виродженого тетраедра, а на рисунку б) зображено це ж розміщення, але з точки площини основи, що досягається поворотом системи координат. Обидва зображення цілком відображають плоске розміщення точок x_1, x_2, x_3, x_4 метричного простору.



а) б)

Рис. 5. Візуалізація плоского розміщення точок x_1, x_2, x_3, x_4 метричного простору у просторі R^3: а) вид з точки над площиною основи ($z > 0$), б) вид з точки площини основи виродженого тетраедра ($z = 0$)

Оскільки візуалізація геометричних образів відображає взаємне положення точок з певною похибкою, то на цей випадок у калькуляторі передбачене відображення розрахованих числових значень координат вершин тетраедра, квадрату його об'єму, а також значення для перевірки можливості існування кожного з чотирьох трикутників, вершинами яких є вершини тетраедра, за довжинами їх сторін (різниця між сумою довжин двох сторін трикутника та довжиною третьої його сторони).

У випадку, коли значення квадрату об'єму тетраедра набуває значення нуль, тетраедр є виродженим, і його вершини плоско розміщені у відповідному метричному просторі, і апліката точки S, при цьому, теж дорівнює нулю.

Якщо квадрат об'єму тетраедра набуває від'ємних значень, то при відповідному виборі довжин ребер такий тетраедр не існує (його неможливо побудувати). У цьому випадку апліката точки S не вираховується і сама точка на зображення не виноситься.

Якщо хоча б одна з різниць між сумою довжин двох сторін трикутника та довжиною третьої його сторони буде від'ємною, то апліката точки S не вираховується і сама точка на зображення не виноситься, при цьому не вираховується також об'єм тетраедра.

Висновки

Застосування сучасних засобів динамічної візуалізації геометричних образів дає можливість проводити геометричну структуризацію множин точок у різних метричних просторах. Зокрема, з'являється можливість більш глибокого вивчення властивостей функцій та їх взаємозв'язків. Геометричну структуризацію метричних просторів можна звести до звичних геометричних образів класичної геометрії Евкліда, з можливістю візуалізації елементів неевклідових геометрій.

Подальші дослідження у цьому напрямі слід спрямувати на побудову більш складних геометричних образів, які є композицією образів тетраедра.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

Список використаної літератури

1. Берже М. Геометрия. Том 1. М.: Мир, 1984. 559 с.
2. Каган В.Ф. Очерки по геометрии. М.: Издательство Московского университета, 1963. 571 с.
3. Довгошей А. А., Дордовский Д. В. Отношение “лежать между” и изометрические вложения метрических пространств. *Український математичний журнал*. 2009. № 10(61). С. 1319-1328.
4. Кузьмич В., Кузьмич Л. Побудова прямолінійно розміщених множин при вивченні метричних просторів. *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки. Серія: Педагогічні науки*. 2018. № 9(382). С. 30-36.
5. Кузьмич В. І. Плоско розміщені множини точок у метричному просторі. *Вісник Львівського університету. Серія: механіко-математична*. 2017. Вип. 83. С. 58–71.
6. Kuz′mich V. I. Geometric Properties of Metric Spaces. Ukrainian Mathematical Journal, 2019, volume 71, No. 3, p. 435-454. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-019-01656-1.
7. Кузьмич В. І. Побудова плоских образів у довільному метричному просторі. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. 2017. № 11. С. 40–46.
8. Kuz′mych, V. I., Savchenko A. G. Geometric relations in an arbitrary metric space. *Matematychni Studii.* 2019. № 1(52). С. 86-95. DOI: 10.30970/ms.52.1.76-85.
9. Кузьмич В. І. Поняття кута при вивченні властивостей метричного простору. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки.* 2016. № 13. С. 26-32.
10. Кузьмич В. І. Кутова характеристика у метричному просторі. *Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference : book of abstracts*. 2017. С. 11–12. [електронний ресурс] код доступу URL: https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf.
11. Кузьмич В.І., Кузьмич Ю.В. Аналоги формули Юнгіуса об’єму тетраедра. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. 2012. № 36(249). С. 55-64.
12. Kuz′mich V. I., Kuz′mich Y. V. Software tool for calculating the volume of the tetrahedron on the lengths of its edges. *Інформаційні технології в освіті: Збірник наукових праць*. Херсон: Видавництво Херсонського державного університету. 2012. Вип. 12. С. 67-72.
13. Savchenko O. A remark on stationary fuzzy metric spaces. *Carpathian Mathematical Publications*. 2011. **3** (1). 124–129. URL: http://journals.pu.if.ua/index.php/cmp/article/view/85.
14. Savchenko A. Fuzzy hyperspace monad. *Mat. Stud.* 2010. **33**(2). 192–198. URL: http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/192-198.pdf.
15. Savchenko A., Zarichnyi M. Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 2011. **1**(1). 114–121. URL: https://www.azjm.org/volumes/0101/0101-6.pdf.

References

1. Berzhe, M. (1984). Geometriya. Tom 1. M.: Mir.
2. Kagan, V. F. (1963). Ocherki po geometrii. M.: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta.
3. Dovhoshei, A. A., & Dordovskyi, D. V. (2019). Otnoshenye lezhat mezhdu y yzometrycheskye vlozhenyia metrycheskykh prostranstv. Ukrainskyi matematychnyi zhurnal. **10**(61), 1319-1328.
4. Kuz′mych, V., & Kuz′mych, L. (2018). Pobudova pryamoliniyno rozmishchenykh mnozhyn pry vyvchenni metrychnykh prostoriv. *Naukovyy visnyk Skhidnoyevropeys'koho natsional'noho universytetu imeni Lesi Ukrayinky. Seriya: Pedahohichni nauky*. **9**(382), 30-36.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4

5. Kuz′mych, V. I. (2017). Plosko rozmishcheni mnozhyny tochok u metrychnomu prostori. *Visnyk L'vivs'koho universytetu. Seriya: mekhaniko-matematychna*. Vyp. 83, 58–71.
6. Kuz’mich, V. I. (2019). Geometric Properties of Metric Spaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, **71**(3), 435-454. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-019-01656-1.
7. Kuz′mych, V. I. (2017). Pobudova ploskykh obraziv u dovil′nomu metrychnomu prostori. *Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya: Pedahohichni nauky*. **11**, 40–46.
8. Kuz′mych, V. I., & Savchenko, A. G. (2019). Geometric relations in an arbitrary metric space. *Matematychni Studii*. **1**(52), 86-95. DOI: https://doi.org/10.30970/ms.52.1.76-85.
9. Kuz′mych, V. I. (2016). Poniattia kuta pry vyvchenni vlastyvostei metrychnoho prostoru. *Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriia: Pedahohichni nauky*. **13**, 26-32.
10. Kuz′mych, V. I. (2017). Kutova kharakterystyka u metrychnomu prostori. *Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference : book of abstracts,* pp. 11-12. [elektronnyy resurs] kod dostupu URL: https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf
11. Kuz′mych, V. I., & Kuz′mych, Yu. V. (2012). Analohy formuly Yunhiusa ob′yemu tetraedra. *Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya: Pedahohichni nauky*. **36(**249), 55-64.
12. Kuz′mich, V. I., & Kuz′mich, Yu. V. (2012). Software tool for calculating the volume of the tetrahedron on the lengths of its edges. *Informatsiyni tekhnolohiyi v osviti: Zbirnyk naukovykh prats'*. Kherson: Vydavnytstvo Khersons′koho derzhavnoho universytetu. **12**, 67-72.
13. Savchenko, O. (2011). A remark on stationary fuzzy metric spaces. *Carpathian Mathematical Publications*. **3** (1), 124–129. URL: http://journals.pu.if.ua/index.php/cmp/article/view/85.
14. Savchenko, A. (2010). Fuzzy hyperspace monad. *Mat. Stud.* **33**(2), 192–198. URL: http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/192-198.pdf.
15. Savchenko, A., & Zarichnyi, M. (2011). Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. **1**(1), 114–121. URL: https://www.azjm.org/volumes/0101/0101-6.pdf.

Валько Катерина Віталіївна – студентка бакалавріату спеціальності “Комп’ютерні науки”, факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
e-mail: katerynavalko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9746-018X.

Кузьмич Валерій Іванович – к.ф.-м.н., доцент, професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету,
e-mail: vikuzmichksu@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8150-3456.

Кузьмич Людмила Василівна – к.пед.н., доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету,
e-mail: lvkuzmichksu@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6727-9064.

Савченко Олександр Григорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету,
e-mail: savchenko.o.g@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4687-5542.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.4