УДК 519.872

В.В. ГНАТУШЕНКО
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
Г.К. ВИТОВТОВ
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»

АНАЛІЗ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ПРИ СТРИБКОПОДІБНІЙ ЗМІНІ ІНТЕНСИВНОСТЕЙ ПОТОКІВ ІНФОРМАЦІЇ

У даній роботі наведено аналітичний підхід до аналізу багатоканальної системи масового обслуговування з втратами без очікування як в перехідному, так і в стаціонарному режимах роботи на прикладі системи M|M|2. Така система описується процесом загибелі та розмноження з трьома станами. Для даної системи складена система рівнянь Колмогорова і знайдена фундаментальна матриця системи для випадку з постійними інтенсивностями потоків та інтенсивностями потоків, що змінюються стрибком в деякий момент часу. Числові розрахунки проведені на прикладі моделі комутатора мережі передачі даних, що пов'язаний з другим комутатором мережі по двом каналам Ethernet. Пропускна здібність кожного каналу складає 100 Мбіт/с. Проаналізовано перехідний режим роботи системи для трьох випадків. У першому випадку інтенсивність надходження пакетів є нижчою за інтенсивність їх обслуговування; у другому випадку інтенсивність надходження пакетів дорівнює інтенсивності їх обслуговування; в третьому випадку інтенсивність надходження більше за інтенсивність обслуговування приладу. Для кожного випадку знайдені імовірності стану системи, у тому числі імовірності втрати пакетів і час перехідного режиму. Ілюстровано, що при збільшенні інтенсивності вхідного трафіка час перехідного процесу зменшується, а імовірність втрати пакетів зростає. Так за збільшенням інтенсивності надходження пакетів до 10 разів імовірність втрати пакетів зростає до 82%, а час перехідного режиму становить 0,0001 с, що в 6 разів менше часу перехідного режиму у нормальному режимі функціонування мережі, коли інтенсивність вхідних потоків λ *є меншою, ніж інтенсивність обслуговування* μ*. Розраховано імовірності станів системи за умови стрибків інтенсивності вхідного трафіка. Розглядається вплив одного та двох стрибків. За першого стрибка, коли інтенсивність надходження пакетів стрімко збільшується з* $\lambda = 2 \cdot 10^3$ *пакетів/с до* $\lambda = 8.3 \cdot 10^3$*пакетів/с, імовірність втрати пакетів зростає до 82%. При різкому зменшенні інтенсивності надходження пакетів до початкового значення в наступний момент часу імовірність втрати пакетів знову зменшується до 8%. У роботі показано, що в стаціонарному режимі після відновлення системи ці імовірності визначаються тільки параметрами системи після всіх стрибків.*

Ключові слова: перехідний режим, фундаментальна матриця, імовірності станів, комутатор, стрибки потоків інформації

В.В. ГНАТУШЕНКО
Национальный технический университет «Днепровская политехника»
Г.К. ВЫТОВТОВ
Национальный технический университет «Днепровская политехника»

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ СКАЧКООБРАЗНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ИНТЕНСИВНОСТЯХ ПОТОКОВ ИНФОРМАЦИИ

В данной работе представлен аналитический подход к анализу многоканальной системы массового обслуживания с потерями без ожидания как в переходном, так и в стационарном режимах на примере системы M|M|2. Такая система описывается процессом гибели и размножения с тремя состояниями. Для данной системы составлена система уравнений Колмогорова и найдена фундаментальная матрица системы для случая с постоянными интенсивностями потоков и интенсивностями потоков, изменяющихся скачком в некоторые моменты времени. Численные расчеты проведены на примере модели коммутатора сети передачи данных, связанного с другим коммутатором сети по двум каналам Ethernet. Пропускная способность каждого канала 100 Мбит/с. Проанализирован переходной режим работы системы для трех

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.7

случаев. В первом случае интенсивность поступления пакетов ниже интенсивности их обслуживания; во втором случае интенсивность поступления пакетов равна интенсивности их обслуживания и в третьем случае интенсивность поступления больше интенсивности обслуживания устройства. Для каждого случая найдены вероятности состояний системы, в том числе вероятности потерь пакетов и время переходного процесса. Показано, что при увеличении интенсивности входного трафика время переходного процесса уменьшается, а вероятность потери пакетов возрастает. Так при увеличении интенсивности поступления пакетов в 10 раз вероятность потери пакетов составила 82%, а время переходного режима составляет 0,0001 с, что в 6 раз меньше времени переходного режима при нормальном режиме функционирования сети, когда интенсивность входящих потоков λ является меньшей, чем интенсивность обслуживания μ. Рассчитаны вероятности состояний системы при скачках интенсивности входного трафика. Рассматривается воздействие одного и двух скачков. При воздействии первого скачка, когда интенсивность поступления пакетов резко возрастает с $\lambda = 2 \cdot 10^3$ пакетов/сек до $\lambda = 8.3 \cdot 10^3$ пакетов/с, вероятность потери пакетов увеличивается до 82%. При резком уменьшении интенсивности поступления пакетов до первоначального значения в следующий момент времени вероятность потери пакетов снова уменьшается до 8%. В работе показано, что в стационарном режиме после восстановления системы эти вероятности определяются только параметрами системы после всех скачков.

Ключевые слова: переходной режим, фундаментальная матрица, вероятности состояний, коммутатор, скачки потоков информации.

V.V. HNATUSHENKO
Dnipro University of Technology
G.K. VYTOVTOV
Dnipro University of Technology

ANALYSIS OF THE QUEUEING SYSTEMS AT JUMPING VARIABLE INFORMATION FLOW INTENSITY

This paper presents an analytical approach to the analysis of a multi-channel queuing system with losses without buffering, both for transient and stationary modes. It is considered the M|M|2 system as an example. Such a system is described as a three-state birth-and-death process. For this system the system of Kolmogorov equations is compiled and the fundamental matrix of the Kolmogorov equation system is found for two cases. In the first case arrival and service rates are constant and in the second case the ones change abruptly at some moments of time. Numerical calculations are carried out on the example of the model of the data transmission network switch connected to another network switch via two Ethernet channels. The throughput of each channel is 100 Mbps. The transient mode of the system is analyzed for three cases. In the first case, the arrival rate is lower than the service rate; in the second case, the arrival rate of packets is equal to their service rate, and in the third case, the arrival rate is greater than the device service rate. For each case, the probabilities of the system states are found, including the probabilities of packet loss and the transient time. It is shown that with an increase in the intensity of the input traffic, the transient time decreases, and the probability of packet loss increases. So, with an increase in the arrival rate up to 10 times, the probability of packet loss is 82%, and the transient time is 0.0001 s, which is 6 times less than the transient time under normal network operation when the intensity of incoming flows λ is less than the service intensity μ. The probabilities of the system states after jumps of the intensity of the input traffic are calculated. The cases of one and two jumps are considered. Under the influence of the first jump, when the arrival rate increases sharply from $\lambda = 2 \cdot 10^3$ packets/s to $\lambda = 8.3 \cdot 10^3$ packets/s, the probability of packet loss increases to 82%. With a sharp decrease in the intensity of arrival rate to the initial value at the next moment in time, the probability of packet loss decreases to 8% again. The probabilities of the system states at jumps in the intensity of the input traffic are calculated. It is shown that in the stationary mode, after the system is restored, these probabilities are determined only by the parameters of the system after all jumps.

Keywords: transient mode, fundamental matrix, the probabilities of the states, switch, jumps of the traffic.

Постановка проблеми

Системи масового обслуговування широко використовуються в різних сферах науки, у тому числі і області телекомунікаційних систем [1, 2]. Зазвичай, у теорії масового обслуговування розрізняють два режими роботи: перехідний та стаціонарний. Найбільш

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.7

вивченим та дослідженим є стаціонарний режим, у якому імовірність стану системи не залежить від часу на відміну від перехідного режиму. Перехід до мереж зв'язку нового покоління (5G/6G) потребує використання нових швидкодіючих обслуговуючих пристроїв, котрими можуть бути, наприклад, оптичні комутатори або високошвидкісні бездротові точки доступу. Трафік в таких мережах має нерівномірний характер, оскільки в мережі відбуваються регулярні стрибки інтенсивності вхідного трафіку, пов'язані, наприклад, з реконфігурацією мережі в результаті виходу із строю окремого вузла. З огляду на те, що швидкість зміни трафіку, тобто частота появи стрибків інтенсивності, на теперішній час є порівняною з часом перехідного режиму (10^{-3}с), вплив цих стрибків стає суттєвим. Таким чином, їх необхідно враховувати у аналізі мережі, розрахунку її характеристик та прогнозуванні її роботи не тільки в стаціонарному, а також й в перехідному режимах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Однією із перших робіт, що присвячено вивченню перехідного режиму, є робота Харісона, в якій вперше звернуто увагу на важливість розгляду даного режиму роботи обчислювальної мережі [3]. Перехідний режим роботи систем $M|M|1$ та $M|M|2$, як з нескінченим, так і з обмеженим буфером був розглянутий у статтях [4-7]. Однак, в існуючих на сьогоднішній день роботах, де розглядається перехідний режим, відсутній докладний аналіз перехідного режиму багатоканальної системи масового обслуговування з втратами без очікування, як однією із яскравих моделей сучасної мережі зв'язку. Крім того, в літературі майже не розглядається вплив стрибків трафіку на характер функціонування системи.

Мета дослідження

Головною метою даної статі є дослідження перехідного режиму багатоканальної системи масового обслуговування з втратами без очікування на прикладі системи $M|M|2$, як однієї з існуючих моделей мережі зв'язку. Також важливим завданням є вивчення впливу стрибків трафіку та пов'язаного з цим перехідного процесу на поведінку системи.

Основна частина

Система $M|M|2$ є, наприклад, моделлю комутатора, пов'язаного з іншим комутатором мережі за допомогою двох каналів Ethernet по 100 Мбіт/с кожний. Система описується процесом загибелі та розмноження, та її описує граф з трьома дискретними станами й безперервним часом (рис. 1). У даному випадку потоки описуються довільними кусково-постійними функціями (рис. 2). Передбачається, що на інтервалах Δt_i інтенсивності вхідних потоків λ підпорядковується закону Пуасона, а також інтенсивність обслуговування μ має експоненціальний розподіл. Додатково, у моменти часу t_i відбуваються стрибки λ та μ. Через S_1 позначено стан, коли система вільна. Цьому стану відповідає імовірність p_1. S_2 – стан, коли у системі зайнятий перший канал. Цьому стану відповідає імовірність p_2. S_3 – стан, коли зайняті обидва канали (імовірність p_3).

Система рівнянь Колмогорова для випадку, що розглядається, має вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1(t)}{dt} &= -\lambda(t)p_1(t) + \mu p_2(t) \\
\frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda(t)p_1(t) - \big(\lambda(t) + \mu(t)\big)p_2(t) + 2\mu(t)p_3(t) \\
\frac{dp_3(t)}{dt} &= \lambda(t)p_2(t) - 2\mu(t)p_3(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.7

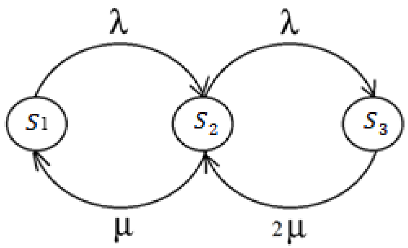

Рис. 1. Граф стану системи масового обслуговування

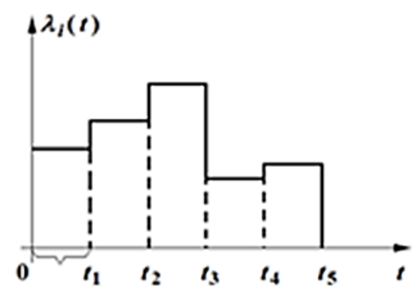

Рис. 2. Залежність інтенсивності потоків від часу

Оскільки у межах i-го інтервалу часу потоки є пуасонівськими, то рівняння (1) є системою однорідних диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами, а характеристичне рівняння цієї системи має вигляд:

$$\gamma[\gamma^2 + (2\lambda + 3\mu)\gamma + (\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)] = 0\,. \tag{2}$$

Його корені дорівнюють

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_{2,3} = -\frac{2\lambda+3\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{(2\lambda+3\mu)^2}{4} - \lambda^2 - 2\lambda\mu - 2\mu^2}.$$

Тоді розв'язок системи (1) на i-му інтервалі має вигляд:

$$\begin{gathered} p_1 = Ae^{\gamma_1 t} + B + Ce^{\gamma_3 t} \\ p_2 = \xi_1 Ae^{\gamma_1 t} + \xi_2 B + \xi_3 Ce^{\gamma_3 t} \\ p_3 = \zeta_1 Ae^{\gamma_1 t} + \zeta_2 B + \zeta_3 Ce^{\gamma_3 t}, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\xi_j = \frac{\gamma_j+\lambda}{\mu}$; $\zeta_j = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\gamma_j+\lambda}{\gamma_j+2\mu}$, $j = \overline{1{,}3}$.

Далі, відповідно до методики [8] знаходиться 3×3-фундаментальна матриця $\mathbf{M}$ системи Колмогорова, що пов'язує імовірності станів систем масового обслуговування (СМО) у довільний момент часу t з цими вірогідностями у початковий момент часу $t = 0$. У аналізі роботи системи у випадку, коли інтенсивність вхідного потоку змінюється стрибком, результуюча фундаментальна матриця знаходиться як добуток матриць інтервалів з постійними параметрами

$$\mathbf{M} = \prod_{i=N}^{1} \mathbf{M}_i, \tag{4}$$

де $\mathbf{M}$ – фундаментальна матриця i-го інтервалу, N – число інтервалів.

В роботі зроблені розрахунки багатоканальної системи масового обслуговування M|M|2 з втратами без очікування. Насамперед, продемонстровано, що результати, отриманні з використанням запропонованого методу у стаціонарному режимі, повністю відповідають раніше наданим результатам. На рис. 3 наведена залежність імовірностей станів від часу. Оскільки швидкість передачі пакетів в одному каналі становить 100 Мбіт/с, то враховуючи, що розмір пакету Enternet становить 1500 байт, тобто 12000 біт, розраховуємо інтенсивність обслуговування комутатора $\mu = (100 \cdot 10^6)/(12 \cdot 10^3) = 8.3 \cdot\cdot 10^3$пакетів/с. Тут інтенсивність потоку є $\lambda = 2 \cdot 10^3$ пакетів/с. Лінія, що є довгою

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.7

штриховою, відповідає імовірності того, що обидва канали вільні. Коротка штрихова лінія відповідає імовірності того, що зайнятий перший канал. Штрих-пунктирна лінія відповідає тому, що зайняті обидва канали, тобто ілюструє імовірність втрат пакетів. За результатами розрахунків час перехідного режиму $t_{пер} = 0.0006$ с.

Припустимо, що в результаті реконфігурації мережі, тобто зміни маршруту передачі інформації, інтенсивність надходження потоків до комутатора збільшується. На рис. 4 наведена залежність імовірностей станів від часу. Тут $\mu = 8.3 \cdot 10^3$ пакетів/с, $\lambda = 8.3 \cdot 10^3$ пакетів/с. За результатами розрахунків час перехідного режиму $t_{пер} = 0.0005$ с. Тобто зі збільшенням вхідного потоку тривалість перехідного процесу зменшується. При цьому у стаціонарному режимі імовірність того, що система вільна, дорівнює імовірності того, що зайнятий тільки перший канал. Крім того, у цьому випадку імовірність втрати пакетів дорівнює 0.2, що в 2.5 рази більше, ніж у попередньому випадку.

Далі розглянемо випадок перевантаженої мережі, коли інтенсивність вхідного потоку пакетів у десять разів перевищує інтенсивність обслуговування. На рис. 5 надана залежність імовірностей станів від часу. Тут $\mu = 8.3 \cdot 10^3$ пакетів/с, $\lambda = 83 \cdot 10^3$ пакетів/с. За результатами розрахунків час перехідного режиму $t_{пер} = 0.0001$ с. Тобто ще раз підтверджується той факт, що зі збільшенням інтенсивності вхідного потоку тривалість перехідного процесу зменшується. Крім того, у даному випадку імовірність втрати пакетів збільшилась до 82%.

Далі наведено результати досліджень функціонування системи при наявності стрибків інтенсивності надходження пакетів. Такі випадки виникають раптово при нормальній роботі мережі коли $\lambda < \mu$. На рис. 6 наведена залежність імовірностей станів від часу при наявності одного стрибка інтенсивності вхідного потоку. Тут до стрибка $\mu = 8.3 \cdot 10^3$ пакетів/с, $\lambda = 2 \cdot 10^3$ пакетів/с, після стрибка $\mu = 8.3 \cdot 10^3$ пакетів/с, $\lambda = 8.3 \cdot 10^3$ пакетів/с. Стрибок відбувається в момент часу $t = 0.0002$с. Довга штрихова лінія відповідає імовірності того, що система вільна. Коротка штрихова лінія відповідає тому, що зайнятий один канал. Штрих-пунктирна лінія відповідає імовірності того, що зайняті обидва канали, тобто імовірності втрати пакетів. У цьому випадку різке збільшення інтенсивності вхідного потоку (у 10 разів) призвело до збільшення імовірності втрати пакетів до 82% і зниженню імовірності того, що система є вільною до 2%.

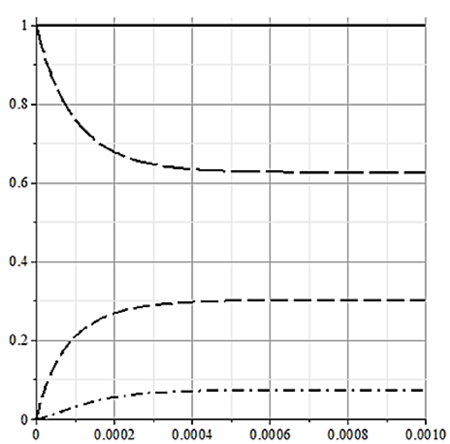

Рис. 3. Залежність імовірностей станів від часу при $\lambda = 2 \cdot 10^3$ пакетів/с

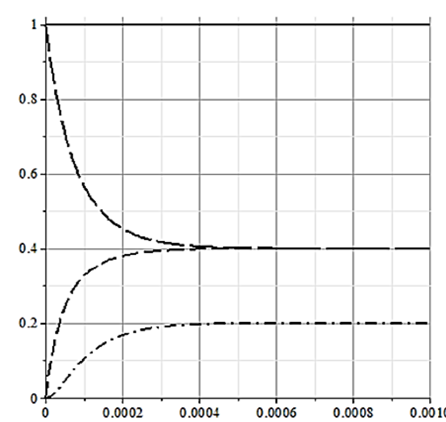

Рис. 4. Залежність імовірностей станів від часу при $\lambda = 8.3 \cdot 10^3$ пакетів/с

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.7

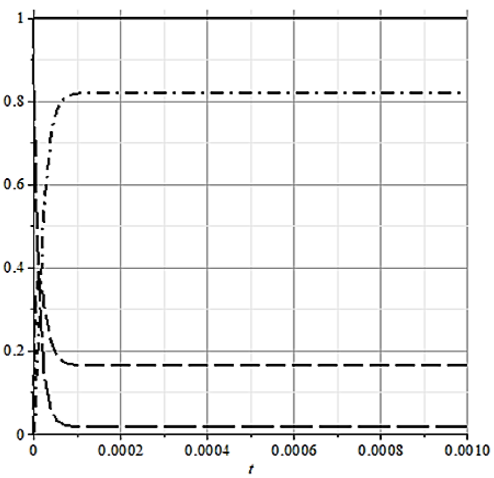

Рис. 5. Залежність імовірностей станів від часу при $\lambda = 83 \cdot 10^3$пакетів/с

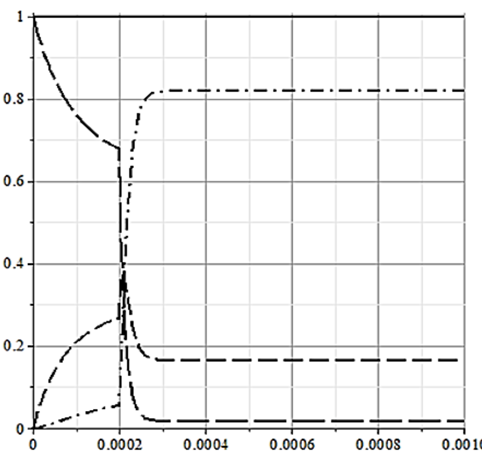

Рис. 6. Залежність імовірностей станів від часу при наявності стрибків інтенсивності надходження пакетів

Варто відзначити, що за результатами розрахунків видно, що стаціонарний режим визначається тільки параметрами системи після стрибка і не залежить від параметрів системи перед стрибком. На рис. 7 наведені результати розрахунку імовірностей станів при наявності двох стрибків. Так у момент $t = 0.0002$ с відбувається збільшення інтенсивності вхідного потоку від $\lambda = 2 \cdot 10^3$ пакетів/с до $\lambda = 8.3 \cdot 10^3$ пакетів/с, а в момент $t = 0.0003$ с потік знижується до початкового рівня. При цьому величини імовірностей станів у момент високої інтенсивності потоків залежать від тривалості стрибка. В стаціонарному стані після відновлення системи ці імовірності визначаються тільки параметрами системи після всіх стрибків.

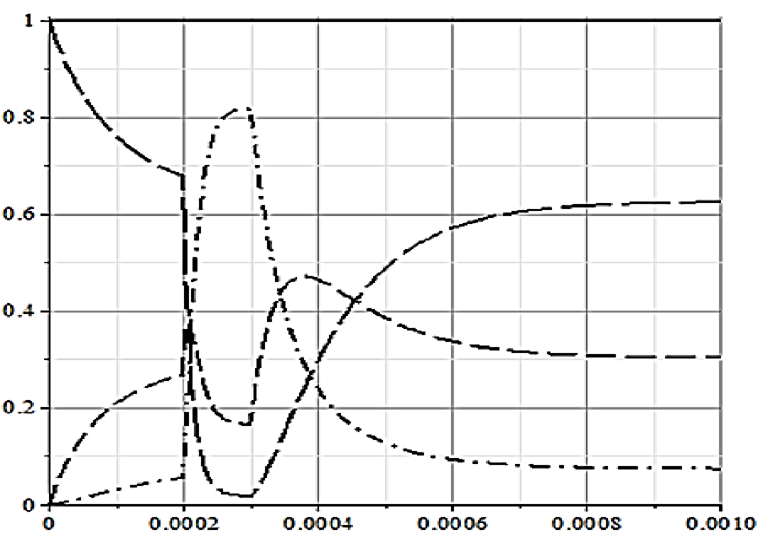

Рис. 7. Імовірності станів при наявності двох стрибків

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.7

Висновки

В даній роботі проведено дослідження перехідного режиму роботи системи масового обслуговування $M|M|2$. Така система розглядається як модель комутатора без буфера з двома каналами передачі даних по 100 Мбіт/с кожний. Новизна роботи полягає у застосуванні аналітичного метода до цієї системи, що дозволяє проводити аналіз системи масового обслуговування $M|M|2$ при постійних і стрибкоподібних інтенсивностях надходження та обслуговування потоків інформації. Метод заснований на знаходженні фундаментальної матриці системи рівнянь Колмогорова як для випадку постійних інтенсивностей потоків, так і для інтенсивностей потоків, що змінюються стрибком в певний момент часу, та дозволяє знаходити імовірність втрати пакетів. Результати чисельних розрахунків показали, що після відновлення системи, тобто в останньому стаціонарному режимі, імовірності станів системи визначаються тільки параметрами системи після всіх стрибків інтенсивностей потоків інформації.

Список використаної літератури

1. Alfa A.S.. Queueing Theory for Telecommunications: Discrete Time Modelling of a Single Node System (1st. ed.). Springer Publishing Company, Incorporated, XIV, 2010, 238 p.
2. Lakatos L., Szeidl L., Telek M.. Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications. Springer International Publishing, 2019. 559 p.
3. Harrison P. G. Transient Behaviour of Queueing Networks. *Journal of Applied Probability*. 1981. V. 18. № 2. P. 482–490.
4. Krishnamoorthy A., Sreenivasan C. An M/M/2 Queueing System with Heterogeneous Servers Including One with Working Vacation. *International Journal of Stochastic Analysis*. 2012, 16 p. https://doi.org/10.1155/2012/145867.
5. Kumar B.K., Pavai M.S. Transient Analysis of an M/M/1 Queue Subject to Catastrophes and Server Failures. *Stochastic Analysis and Applications*. 2005. 23. P. 329–340.
6. Kumar B.K., Arivudainambi D. Transient Solution of an M/M/1 Queue with Catastrophes. *Computers & mathematics with applications*. 2000. 40. P. 1233–1240.
7. Amin S. A., Venkatesan D. SPC Techniques Using M/M/2 Queuing Model. Science, *Technology and Development*. 2019. 8. P. 517–525.
8. Gerardo R.. Transient analysis of Markovian queueing systems: a survey with focus on closedforms and uniformization. Vladimir Anisimov and Nikolaos Limnios. *Advanced Trends in Queueing Theory*. 2020. P.1–35..
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: ФизМатЛит, 2010. 560 с.

References

1. Alfa, A.S.. (2010). Queueing Theory for Telecommunications: Discrete Time Modelling of a Single Node System (1st. ed.). Springer Publishing Company, Incorporated, XIV, 238 p..
2. Lakatos, L., Szeidl, L., & Telek, M. (2019). Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications. Springer International Publishing.
3. Harrison, P. G. (1981). Transient Behaviour of Queueing Networks. *Journal of Applied Probability*, **18**, 2, 482–490.
4. Krishnamoorthy, A., & Sreenivasan, C. (2012). An M/M/2 Queueing System with Heterogeneous Servers Including One with Working Vacation. *International Journal of Stochastic Analysis*, 16 p. https://doi.org/10.1155/2012/145867.
5. Kumar, B.K., & Pavai M.S. (2005). Transient Analysis of an M/M/1 Queue Subject to Catastrophes and Server Failures. *Stochastic Analysis and Applications.* **23**, 329–340.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.7

6. Kumar, B.K., & Arivudainambi, D. (2000). Transient Solution of an M/M/1 Queue with Catastrophes. *Computers & mathematics with applications*. **40**, 1233–1240.
7. Amin, S.A., & Venkatesan, D. (2019). SPC Techniques Using M/M/2 Queuing Model. *Science, Technology and Development*. **8**, 517–525.
8. Gerardo, R. (2020).Transient analysis of Markovian queueing systems: a survey with focus on closedforms and uniformization. Vladimir Anisimov and Nikolaos Limnios. *Advanced Trends in Queueing Theory*. pp.1–35.
9. Gantmakher, F.R. (2010). Teoriya matrits. Moskva: FizMatLit.

Гнатушенко Володимир Володимирович — д.т.н., професор, завідувач кафедри інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» (м. Дніпро), e-mail: vvgnat@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3140-3788.

Витовтов Георгій Костянтинович – студент Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» (м. Дніпро), e-mail: georgii.vytvotv@gmail.com

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.7