УДК 004.08

В.В. ГРИЦИК
Національний університет "Львівська політехніка"

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕОРІЇ ЗОБРАЖЕНЬ: МНОЖИНИ ТОЧОК І ОПЕРАЦІЙ НАД НИМИ

Впродовж десятиліть розпізнавання образів і опрацювання зображень, зокрема, залишається актуальною задачею. На сьогодні ми маємо добре пророблений теоретичний фундамент базових понять, операцій і потребу формалізації вхідної (початкової) інформації, що допускає ефективне застосування теорії розпізнавання. Для розв'язку задачі, першим кроком, проведемо огляд понять та операцій алгебри зображень. Формалізм пов'язаний з побудовою архітектури системи обробки зображення полягає в тому, що атрибути пікселя можуть бути описані на межі арифметики і математичної морфології. У роботі лаконічно розглянуто алгебраїчне представлення множин точок і операцій над ними для уніфікованого застосування при подальшій роботі із зображеннями, включаючи а) синхронізацію українсько-англійських відповідників; б) забезпечення представлення неперервності відображення простору точок за допомогою математичного апарату для подальших досліджень. Алгебраїчна теорія представляє мову зображень як належним чином реалізований стандарт обробки зображень, що може значно зменшити зусилля для вивчення та розвитку проблем, пов'язаних з комп'ютерним зором. Оскільки, основа цієї мови суто математична і не залежить від майбутньої архітектури комп'ютера чи мови програмування, то ефективність цього підходу у розробці та навчанні студентів адаптувати алгебраїчну теорію зображень як стандартне середовище для обробки зображень є незаперечною. Додатковими перевагами алгебричної теорії зображень є: операції з елементарною алгеброю – невеликі за кількістю, прості і дають можливість представити метод перетворення зображень у легкозасвоюваній формі; алгебраїчні операції та операнди забезпечують можливість виразити всі перетворення зображення в зображення; теореми, що регулюють алгебру та комп'ютерні програми, засновані на позначеннях, підпорядковуються як машинно-залежним, так і машинно-незалежним методам оптимізації; алгебраїчне подання забезпечує більш глибоке розуміння маніпуляцій з операціями над зображенням через стислість опису (метод написання / сприйняття), що робить видимими оптимальні рішення; адаптованість до мов програмування дозволяє замінити надзвичайно короткі та стислі алгебраїчні вирази еквівалентними блоками коду, а отже, збільшує продуктивність програміста; алгебра забезпечує місткі математичну структуру, яку можна використовувати, пов'язуючи проблеми обробки зображень з іншими математичними областями; без алгебраїчного подання рішення програміст ніколи не виграє від містка, що існує між мовою програмування та різноманітністю математичних структур, теорем та тотожностей, пов'язаних з математичною теорією; немає конкуруючих позначень, які б адекватно забезпечували всі ці переваги.

Ключові слова: розпізнавання зображень, сегментація зображень, комп'ютерний зір.

В.В. ГРИЦИК
Национальный университет "Львовская политехника"

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕОРИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ: МНОЖЕСТВА ТОЧЕК И ОПЕРАЦИЙ НАД НИМИ

Десятилетия распознавание образов и обработка изображений остаются актуальной проблемой. Сегодня ми имеем хорошо проработанный теоретический фундамент базовый понятий, операций и необходимость формализации входной (начальной) информации, которая допускает эффективное использование теории распознавания. Для решения этой задачи первым шагом, нужно провести анализ понятий и операций алгебры изображений. Формализм, который связан с построением архитектуры системы обработки изображения, состоит в том, что атрибуты пикселя могут быть описаны на границе математики и морфологии. В работе лаконично рассмотрено алгебраическое представление множества точек и операций над ними для унифицированного использования при работе с изображениями, включая синхронизацию украино-английских соответствий и обеспечения представления непрерывности отображения пространства точек с помощью математического аппарата для последующих исследований. Алгебраическая теория представляет язык изображений как должным образом реализованный стандарт обработки изображений, что может значительно уменьшить усилия для изучения и развития проблем, связанных с компьютерным зрением. Поскольку основа этого языка чисто математическая и не зависит от будущей архитектуры компьютера или

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.10

языка программирования, то эффективность этого подхода в разработке и обучении студентов адаптировать алгебраическую теорию изображений как стандартное среду для обработки изображений является неоспоримым. Дополнительными преимуществами алгебраической теории представлений являются: операции с элементарной алгеброй – небольшие по количеству, простые и дают возможность представить метод преобразования изображений в легкоусвояемой форме; алгебраические операции и операнды обеспечивают возможность выразить все преобразования изображения в изображения; теоремы, регулирующие алгебру и компьютерные программы, основаные на обозначениях, подчиняются как машинно-зависимым, так и машинно-независимым методам оптимизации; алгебраическое представление обеспечивает более глубокое понимание манипуляций с операциями над изображением через краткость описания (метод написания / восприятия), что делает видимыми оптимальные решения; адаптированость к языкам программирования позволяет заменить чрезвычайно короткие и сжатые алгебраические выражения эквивалентными блоками кода, а следовательно, увеличивает производительность программиста; алгебра обеспечивает емкую математическую структуру, которую можно использовать, связывая проблемы обработки изображений с другими математическими областями; без алгебраического представления решения программист никогда не выиграет от мостика, существующего между языком программирования и разнообразием математических структур, теорем и тождеств, связанных с математической теорией; нет конкурирующих обозначений, которые бы адекватно обеспечивали все эти преимущества.

Ключевые слова: распознавание изображений, сегментация изображений, роботизированное зрение.

V.V. HRYTSYK
Lviv Polytechnic National University

RESEARCH OF IMAGE THEORY: SETS OF POINTS AND OPERATIONS ON THEM

For decades, pattern recognition and image processing, in particular, has remained an urgent task. Today we have a well-developed theoretical foundation of basic concepts, operations and the need to formalize the input (initial) information, which allows the effective application of the theory of recognition. To solve the problem, the first step is to review the concepts and operations of image algebra. The formalism associated with the construction of the architecture of the image processing system is that the attributes of the pixel can be described at the boundary of arithmetic and mathematical morphology. The paper succinctly considers the algebraic representation of sets of points and operations on them for unified application in further work with images; including a) synchronization of Ukrainian-English equivalents; b) providing a representation of the continuity of the reflection of the space of points using a mathematical apparatus for further research. Algebraic theory presents the language of images as a properly implemented standard of image processing, which can significantly reduce the effort to study and develop problems related to computer vision. Since the basis of this language is purely mathematical and does not depend on the future computer architecture or programming language, the effectiveness of this approach in developing and teaching students to adapt algebraic image theory as a standard environment for image processing is undeniable. Additional advantages of algebraic image theory are: the operations of elementary algebra are small in number, simple, and provide an opportunity to present a method of transforming images in an easily digestible form; algebraic operations and operands provide the ability to express all image-to-image transformations; theorems governing algebra and computer programs based on notation are subject to both machine-dependent and machine-independent optimization techniques; algebraic representation provides a deeper understanding of the manipulation of operations on the image through the brevity of the description (method of writing / perception), which makes visible the optimal solutions; notational adaptability to programming languages allows the substitution of extremely short and concise algebraic expressions for equivalent blocks of code, and therefore increases the productivity of the programmer; algebra provides a rich mathematical structure that can be exploited by linking image processing problems with other mathematical areas; without an algebraic representation of the solution, the programmer will never benefit from the bridge that exists between the programming language and the variety of mathematical structures, theorems, and identities associated with mathematical theory; there are no competing designations that adequately provide all these advantages.

Keywords: pattern recognition, image segmentation, computer vision.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.10

Постановка задачі

Лаконічно/ефективно висвітити алгебричне представлення множин точок і операцій над ними для уніфікованого застосування при подальшій роботі із зображеннями, включаючи а) синхронізацію українсько-англійських відповідників; б) забезпечення представлення неперервності відображення простору точок за допомогою математичного апарату для подальших досліджень.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Впродовж десятиліть опрацювання образів і зображень, зокрема, залишається актуальною задачею [25, 26]. Підґрунтям до цього є, по-перше, те, що візуальний спектр – це основне джерело інформації; по-друге те, що технології постійно покращуються (спочатку бінарні зображення, потім градації сірості, потім кольорові, потім кольорові з поглибленою палітрою, а при переході на одноатомні процесори ситуація знову кардинально зміниться). Проблема синхронізації роботи розподілених по усьому світу команд є лише додатковим аргументом необхідності уніфікації представлення множин та операцій над ними.

Теоретичним початком можемо прийняти винахід регулярних виразів у 1952 році, з подальшим трансформуванням у алгебру Кліні (Stephen Cole Kleene). Хоча ідея побудови концепції уніфікованої теорії для різних понять і операцій, що використовуються при обробці зображень і сигналів, вперше згадана в роботі (Unger, 1958) [1] «Розпаралелення алгоритмів обробки і аналізу зображень на ЕОМ з клітинною архітектурою». Спроби алгебричного підходу до обробки зображень знайшли відображення у теорії образів У. Гренандера (алгебричне представлення операцій обробки і аналізу зображень), та алгебрі Г. Рітера (алгебричне представлення операцій обробки і аналізу зображень). У 1961 році видана монографія Глушкова «Синтез цифровых автоматов». Базовою ідеєю останнього була можливість застосування алгебричного апарату для формалізації таких об'єктів, якими є компоненти ЕОМ, схеми та програми. Глушков побудував необхідний математичний апарат та показав, що компоненти ЕОМ можуть бути репрезентовані як математичні вирази. У 1968 році українським вченим Глушковим доведена фундаментальна теорема про регуляризацію (зведення до структурованої форми) довільного алгоритму, зокрема програми, чи мікропрограми. Після цього в Україні розвинувся цілий напрямок, зокрема Івахненко О. Г. [26], Вінцюк Т. К. та ін. Таким чином, на сьогодні ми маємо добре пророблений теоретичний фундамент базових понять, операцій і потребу формалізації вхідної (початкової) інформації, що допускає ефективне застосування теорії розпізнавання. Окрім того, автор розглядає можливість розширення уніфікації [25, 26] на різні області застосування.

Поняття алгебри зображень.

Для розв’язку поставленої задачі, першим кроком, проведемо огляд понять та операцій алгебри зображень.

Формалізм, пов'язаний з побудовою архітектури системи обробки зображення, полягає в тому, що атрибути пікселя можуть бути описані на межі арифметики і математичної морфології.

У широкому сенсі, алгебра зображення – це математична теорія пов'язана з перетворенням й аналізом зображень. Математична морфологія – це розділ обробки зображення пов'язаний з фільтрацією зображення й аналізу структурних елементів.

Математична морфологія виросла з ранньої роботи Мінковського і Хадвигера [3-4], і увійшла у сучасну епоху завдяки роботі Matheron і Серра Еколь у Фонтенбло, Франція [5-8]. Matheron і Серра не тільки сформулювали сучасні уявлення про морфологічні перетворення зображення, а також спроектували і побудували систему

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.10

аналізатора текстури. З тих перших днів, морфологічні операції були застосовані від низького рівня до високого рівня проблеми із задачами комп’ютерного зору. Серед наступної хвилі наукових робіт з морфологічної обробки зображень можна відмітити Crimmins і Браун [9], Haralick і співавт. [10, 11], Марагос і Шефер [12-14], Девідсон [15-16, 23], Догерті [17], Goutsias [18, 19], Коскінен і Астола [20], і Стернберг [21, 22] та ін.

Алгебрична теорія представляє мову зображень, як правильно реалізований стандарт обробки зображень, який зможе значно зменшити зусилля на вивчення і розробку задач пов’язаних із комп’ютерним зором [24]. Оскільки основа цієї мови є суто математична і не залежить від майбутньої архітектури комп'ютера або мови програмування, то ефективність розглядуваного підходу при розробках і навчанні студентів адаптації алгебричної теорії зображень в якості стандартного середовища для обробки зображень є беззаперечною.

Незважаючи на спільність мови та економії, існує безліч інших причин, широкого використання алгебраїчного підходу до вивчення комп’ютерного зору в якості основного компоненту при розробці всіх систем обробки зображень. І головною причиною серед них є передбачуваний вплив алгебричного стандарту на майбутню технологію обробки зображень. У цьому досліджуваний підхід можна порівняти з впливом на наукові міркування та просування науки через порівняння різних систем числення (наприклад, римської, сирійської, єгипетської, китайської та ін. систем) із загальноприйнятою зараз індоарабською системою числення та позначень.

Додатковими перевагами, які надає використання в навчанні алгебраїчної теорії зображень, є:

• операції елементарної алгебри є невеликі за кількістю, прості та надають можливість представити метод перетворення зображень у легко засвоюваній формі;

• алгебричні операції та операнди забезпечують можливість вираження усіх перетворень зображення в зображення;

• теореми, що регулюють алгебру та комп'ютерні програми, що складають на основі позначень, піддаються як машинозалежним, так і машинонезалежним методикам оптимізації;

• алгебраїчне представлення забезпечує глибше розуміння маніпулювання операціями над зображенням через стислість опису (способу запису/сприйняття), що робить видимими оптимальні рішення;

• нотаційна адаптованість до мов програмування дозволяє проводити підміну надзвичайно коротких і стислих алгебраїчних виразів для еквівалентних блоків коду, і тому збільшує продуктивність програміста;

• алгебра забезпечує багату математичну структуру, яку можна експлуатувати пов'язавши проблеми обробки зображень з іншими математичними областями;

• без алгебраїчного представлення розв’язку програміст ніколи не отримає користі від мосту, що існує між мовою програмування та різноманітністю математичної структури, теорем та тотожностей, що пов'язані з математичною теорією;

• не існує конкуруючих позначень, які адекватно забезпечують усі ці переваги.

Дослідження множини точок

Множина точок – це просто топологічний простір. Таким чином, множина точок складається з двох складових: сукупність об’єктів, що називаються точками, і топологія, яка передбачає такі поняття як близькість двох точок, зв’язність підмножини множини точок, окіл точки, граничні точки, криві, дуги, плями. Множини точок, зазвичай, позначаються великими літерами, наприклад: W, X, Y, Z.

Точки (елементи множин точок), зазвичай, позначаються малими літерами, наприклад: $x, y, z \in W$. Зауважимо, що коли $x \in \mathbb{R}^n$, то x є формою: $x =$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.10

$(x_1, x_2, \dots, x_n,)$, де для кожного $i = 1,2, \dots, n$, x_i позначає дійсне число, яке називається i-ю координатою x.

Найпоширеніші набори точок, що виникають при обробці зображень – це дискретні (discrete – перервні, окремі, розрізнені) підмножини *n*–вимірного Евклідового простору $\mathbb{R}^n$ $(n = 1,2,3)$ разом з дискретною топологією.

Означення.

Топологія – це механізм неперервного відображення, що деформує простір не розриваючи його.

Означення.

Алгебрична топологія (застаріла назва – комбінаторна топологія) – це розділ топології, що вивчає топологічні простори шляхом зіставлення їх алгебричних об'єктів, та поведінку цих об'єктів під дією різних топологічних операцій.

Зауважимо, що окрім Евклідового простору використовують й інші топології, такі як топологія фон Неймана та odd-even product topology (непарний/випадковий продукт), топологія також часто використовуються в комп'ютерному зорі.

Означення.

Часткова топологія (Partition topology) – це топологія, що дозволяє представити довільну множину X за допомогою підмножин P. Ці підмножини формують базис для топології.

Часткова топологія включає два підходи:

- (**The odd–even topology**) – це топологія де $X \in N, P = \{2k-1, 2k\}: k \in N$, тобто $P = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \dots\}$. У цьому випадку топологію з базисом Р називають (**The odd–even topology**).
- (**The deleted integer topology**) – ця топологія визначається через $X \in \cup_{n \in N} (n-1, n) \subset \mathbb{R}$,ез та $P = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \dots\}$.

Тривіальним випадком дискретної топології є випадок, коли кожна точка $x \in X$ є точкою підмножини P.

Немає обмежень у формі використовуваних дискретних підмножин $\mathbb{R}^n$, у програмах для вирішення проблем комп'ютерним зором. Множини точок можуть бути довільних форм. Зокрема, форми можуть бути прямокутними, круглими, плямистими, змієподібними. Деякі з найбільш доречних множин точок – це множина цілих точок $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^1$, *n*-вимірна решітка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$:

$$(\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{Z} \; for \; i = \overline{1, n}\}) .$$

Множини, що найбільш часто зустрічаються мають значення *n=2* та *n=3*, а також прямокутна підмножина $\mathbb{Z}^2$. Дві множини, що найбільш часто зустрічаються мають вид:

$$X = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le x_1 \le m-1, \qquad 0 \le x_2 \le n-1\}$$

Та

$$X = \mathbb{Z}_m^+ \times \mathbb{Z}_n^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \le x_1 \le m, \; 1 \le x_2 \le n\}.$$

Слідуючи стандартній практиці і представляючи точки прямокутних множин (перебираючи точки у матричній формі) відобразимо на рис. 1 графічне представлення множини точок $X = \mathbb{Z}_m^+ \times \mathbb{Z}_n^+$.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.10

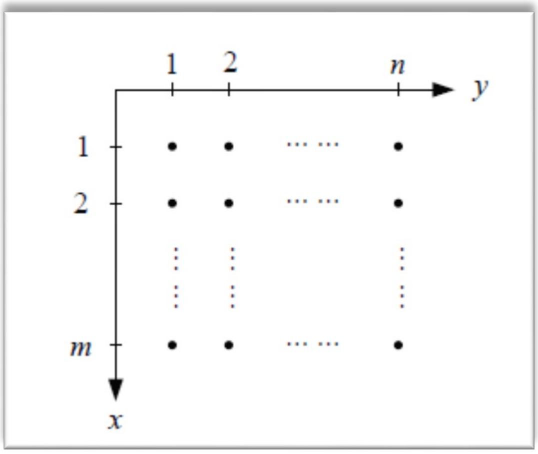

Рис. 1. Прямокутна множина точок $X = \mathbb{Z}_m^+ \times \mathbb{Z}_n^+$

Точкові операції (операції над точками)

В більшості випадків множини точок – це окремі підмножини векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тому, ці множини точок успадковують звичайні операції елементарного векторного простору. Отже, для прикладу, якщо

$$X \subset \mathbb{Z}^n \text{ або } X \subset \mathbb{R}^n,$$

де $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n): x_i, y_i \in X$, тоді сума точок x та y визначається як:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

а множення і додавання скаляра $k \subset \mathbb{Z}$ або $k \subset \mathbb{R}$, буде визначено як

$$k \cdot x = (k \cdot x_1, \dots, k \cdot x_n)$$

та

$$k + x = (k + x_1, \dots, k + x_n),$$

відповідно. Віднімання, також, визначається у відповідний спосіб.

Додатково до стандартних операцій векторного простору, алгебра зображень також включає три базових типи множення точок:

- Добуток Адамара (*Hadamard product*) – бінарна операція між двома матрицями однакової розмірності, у результаті виконання якої утворюється нова матриця, в якій кожний елемент *ij* – це добуток елементів *ij* початкових матриць:

$$A_{ij} \circ B_{ij} = (A \circ B)_{ij}$$

Приклад добутку Адамара для двох матриць 2×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ab_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{12} \cdot b_{12} & a_{13} \cdot b_{13} \\ a_{21} \cdot b_{21} & a_{22} \cdot b_{22} & a_{23} \cdot b_{23} \end{pmatrix}$$

- Поперечний добуток (Векторний добуток) (*cross product* (or *vector product)*) для точок в просторі $\mathbb{Z}^3$ або $\mathbb{R}^3$. Результатом векторного добутку є вектор, перпендикулярний до обох вихідних векторів; його довжина дорівнює площі паралелограма, що утворений початковими векторами; вибір напрямку визначається так, щоб трійка з векторів-множників, узятих в такому ж порядку, як записано в добутку, і отриманого вектору була правою. Отже, для визначення векторного добутку потрібно задати орієнтацію простору, тобто вказати яка трійка векторів є правою, а яка лівою.

Векторний добуток позначається символом × і/або квадратними дужками, і/або жирним шрифтом:

$$\vec{u} \times \vec{v} = [\vec{u}, \vec{v}] = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.10

- Скалярний добуток (*dot product, scalar product*) – бінарна операція над векторами, результатом якої є скаляр (число, що рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними); скалярний добуток двох геометричних векторів $\vec{u}\cdot\vec{v}$ визначається за формулою:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\alpha,\beta)$$

$x\cdot y = (x_1\cdot y_1,\dots,x_n\cdot y_n)$,
$x\times y = (x_2\cdot y_3 - x_3\cdot y_2, x_3\cdot y_1 - x_1\cdot y_3, x_1\cdot y_2 - x_2\cdot y_1)$,

і
$x \bullet y = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \dots + x_n\cdot y_n$
відповідно.
• - *буллет оператор (оператор куля);*
· - *дот оператор (оператор точка)*
∘ *композитна функція оператор; /circle*

Зауважимо, що сума двох точок, добуток Адамара та векторний (поперечний) добуток – це двійкові операції, які приймають за вхід дві точки і виробляють ще одну точку. Тому, ці операції можна розглядати як відображення $X\times X\to X$ для $\forall X$. І, навпаки, двійкова операція точкового добутку є скалярним, а не іншим вектором?. Для прикладу, відображення $X\times X\to F$, де F позначає відповідне поле скалярів. Ще одним відображенням, що асоціюється з метричним простором, є функція відстані $X\times X\to R$, яка присвоює кожній парі точок x і y (відстань від x до y). Найпоширенішими функціями відстані, що виникають при обробці зображення, є евклідова відстань, міський блок або діамантова відстань і відстань шахової дошки, які визначаються як

$$d(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$p(x,y) = \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|\,,$$
$$\delta(x,y) = max\{|x_k - y_k| : 1\le k\le n\}\,,$$

відповідно.

Відстань зручно обчислюється в термінах точкових правил (norm). Подаємо три найбільш поширені правила.

Правило (norm) зі стандарту L^p:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Правило (norm) зі стандарту L^∞:

$$\|x\|_\infty = \bigvee_{i=1}^{n}|x_i|\,,$$

де

$$\bigvee_{i=1}^{n}|x_i| = max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$$

Правило Евклідової відстані (*Euclidean norm*):

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.10

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Таким чином,

$$d(x,y) = \|x - y\|_2.$$

Подібно до визначення відстані методом міських блоків можна обчислити відстань використовуючи формулу $p(x,y) = \|x - y\|_1$ і відстань за правилом шахової дошки (chessboard distance) використовуючи $\delta(x,y) = \|x - y\|_\infty$.

Зауважимо, що p-правило (p-norm) точки x є унарною (одинарною, такою що містить один компонент) операцією, що називається функцією $\| \quad \|_\infty : X \to \mathbb{R}$.

Висновки

У роботі проведено огляд понять та операцій алгебри зображень. Побудова архітектури системи обробки зображення представлена так, що атрибути пікселя можуть бути описані на межі арифметики і математичної морфології. У роботі лаконічно представлено алгебраїчне представлення множин точок і операцій над ними для уніфікованого застосування при подальшій роботі із зображеннями; включаючи а) синхронізацію українсько-англійських відповідників; б) забезпечення представлення неперервності відображення простору точок за допомогою математичного апарату для подальших досліджень.

Список використаної літератури

1. Unger S. A computer oriented toward spatial problems. *Proceedings of the IRE*. 1958. Vol. 46, pp. 1144–1750.
2. G.X. Ritter, “Recent developments in image algebra,” in*Advances in Electronics and Electron Physics*, vol. 80, Academic Press, New York, 1991, pp. 243–308.
3. Cutting-edge facial recognition goes mainstream. *Reasearch*eu results magazine*. December 2017-January 2018. № 68. P. 39.
4. Minkowski H. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig-Berlin: Teubner Verlag, 1911.
5. Hadwiger H. Vorlesungen U¨ ber Inhalt, Oberflæche und Isoperimetrie. Berlin: Springer-Verlag, 1957.
6. Matheron G. Random Sets and Integral Geometry. New York: Wiley, 1975.
7. Serra J. Introduction a la morphologie mathematique. Booklet no. 3. Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique, Fontainebleau, France, 1969.
8. Serra J. Morphologie pour les fonctions a peu pres en tout ou rien. Technical report. Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique, Fontainebleau, France, 1975.
9. Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology. London: Academic Press, 1982.
10. Crimmins T., Brown W. Image algebra and automatic shape recognition. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1985, Jan. Vol. AES-21, pp. 60–69.
11. Haralick R., Sternberg S., Zhuang X. Image analysis using mathematical morphology: Part I. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1987, July. Vol. 9, pp. 532–550.
12. Haralick R., Shapiro L., Lee J. Morphological edge detection. *IEEE Journal of Robotics and Automation*. 1987, Apr. Vol. RA-3, pp. 142–157.
13. Maragos P., Schafer R. Morphological skeleton representation and coding of binary images. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1986, Oct. Vol. ASSP-34, pp. 1228–1244.
14. Maragos P., Schafer R. Morphological filters Part II : Their relations to median, order-statistic, and stack filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1987, Aug. Vol. ASSP-35, pp. 1170–1184.
15. Maragos P., Schafer R. Morphological filters Part I: Their set-theoretic analysis and

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.2.1.10

relations to linear shift-invariant filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1987, Aug. Vol. ASSP-35, pp. 1153–1169.
16. Davidson J., Talukder A. Template identification using simulated annealing in morphology neural networks. *Second Annual Midwest Electro-Technology Conference. (Ames, IA)*. IEEE Central Iowa Section. 1993, Apr., pp. 64–67.
17. Davidson J., Hummer F. Morphology neural networks: An introduction with applications. *IEEE Systems Signal Processing*. 1993. Vol. 12, no. 2, pp. 177–210.
18. Dougherty E. Unification of nonlinear filtering in the context of binary logical calculus, part ii: Gray-scale filters. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 1992, Nov. Vol. 2, pp. 185–192.
19. Schonfeld D., Goutsias J. Optimal morphological pattern restoration from noisy binary images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1991, Jan. Vol. 13, pp. 14–29.
20. Goutsias J. On the morphological analysis of discrete random shapes. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 1992, Nov. Vol. 2, pp. 193–216.
21. Koskinen L., Astola J. Asymptotic behaviour of morphological filters. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 1992, Nov. Vol. 2, pp. 117–136.
22. Sternberg S. R. Language and architecture for parallel image processing. *Proceedings of the Conference on Pattern Recognition in Practice*. (Amsterdam), May 1980.
23. Sternberg S. Overview of image algebra and related issues. *Integrated Technology for Parallel Image Processing*. (S. Levialdi, ed.), London: Academic Press, 1985.
24. Davidson J. Lattice Structures in the Image Algebra and Applications to Image Processing. PhD thesis, University of Florida, Gainesville, FL, 1989.
25. Hrytsyk V., Grondzal A., Bilenkyj A. Augmented Reality for People with Disabilities. Proceedings of the International Conference on Computer Sciences and Information Technologies, CSIT'2015 (Lviv, 2015, September 14–17). Lviv: Polytechnic National University, 2015. P. 188–191.
26. Cutting-edge facial recognition goes mainstream. *Reasearch*eu results magazine*. December 2017-January 2018. № 68. P. 39.

Reference

1. Unger, S. (1958). A computer oriented toward spatial problems. *Proceedings of the IRE*. Vol. 46, 1144–1750.
2. G.X. Ritter, "Recent developments in image algebra," in*Advances in Electronics and Electron Physics*, vol. 80, Academic Press, New York, 1991, pp. 243–308.
3. Cutting-edge facial recognition goes mainstream. *Reasearch*eu results magazine*. December 2017-January 2018, p. 68.
4. Minkowski, H. (1911). Gesammelte Abhandlungen. Leipzig-Berlin: Teubner Verlag.
5. Hadwiger, H. (1957). Vorlesungen U¨ ber Inhalt, Oberflæche und Isoperimetrie. Berlin: Springer-Verlag.
6. Matheron, G. (1975). Random Sets and Integral Geometry. New York: Wiley.
7. Serra, J. (1969). Introduction a la morphologie mathematique. Booklet no. 3. Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique, Fontainebleau, France.
8. Serra, J. (1975). Morphologie pour les fonctions a peu pres en tout ou rien. Technical report. Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique, Fontainebleau, France.
9. Serra, J. (1982). Image Analysis and Mathematical Morphology. London: Academic Press.
10. Crimmins, T., & Brown, W. (1985). Image algebra and automatic shape recognition. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. Jan. Vol. AES-21, 60–69.
11. Haralick, R., Sternberg, S., & Zhuang, X. (1987). Image analysis using mathematical

morphology: Part I. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. July. Vol. 9, 532–550.

12. Haralick, R., Shapiro, L., & Lee, J. (1987). Morphological edge detection. *IEEE Journal of Robotics and Automation*. Apr. Vol. RA-3, 142–157.
13. Maragos, P., & Schafer, R. (1986). Morphological skeleton representation and coding of binary images. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Oct. Vol. ASSP-34, 1228–1244.
14. Maragos, P., & Schafer, R. (1987). Morphological filters Part II : Their relations to median, order-statistic, and stack filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Aug. Vol. ASSP-35, 1170–1184.
15. Maragos, P., & Schafer, R. (1987). Morphological filters Part I: Their set-theoretic analysis and relations to linear shift-invariant filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Aug. Vol. ASSP-35, 1153–1169.
16. Davidson, J., & Talukder, A. (1993). Template identification using simulated annealing in morphology neural networks. *Second Annual Midwest Electro-Technology Conference*. *(Ames, IA)*. IEEE Central Iowa Section. Apr., pp. 64–67.
17. Davidson, J., & Hummer, F. (1993). Morphology neural networks: An introduction with applications. *IEEE Systems Signal Processing*. Vol. 12, no. 2, 177–210.
18. Dougherty, E. (1992). Unification of nonlinear filtering in the context of binary logical calculus, part ii: Gray-scale filters. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Nov. Vol. 2, 185–192.
19. Schonfeld, D., & Goutsias, J. (1991). Optimal morphological pattern restoration from noisy binary images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Jan. Vol. 13, 14–29.
20. Goutsias, J. (1992). On the morphological analysis of discrete random shapes. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Nov. Vol. 2, 193–216.
21. Koskinen, L., & Astola, J. (1992). Asymptotic behaviour of morphological filters. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Nov. Vol. 2, 117–136.
22. Sternberg, S. R. (1980). Language and architecture for parallel image processing. *Proceedings of the Conference on Pattern Recognition in Practice*. (Amsterdam). May.
23. Sternberg, S. (1985). Overview of image algebra and related issues. *Integrated Technology for Parallel Image Processing*. (S. Levialdi, ed.), London: Academic Press.
24. Davidson, J. (1989). Lattice Structures in the Image Algebra and Applications to Image Processing. PhD thesis, University of Florida, Gainesville, FL.
25. Hrytsyk, V., Grondzal A., & Bilenkyj A. (2015). Augmented Reality for People with Disabilities. Proceedings of the International Conference on Computer Sciences and Information Technologies, CSIT'2015 (Lviv, 2015, September 14–17). Lviv: Polytechnic National University, pp. 188–191.
26. Cutting-edge facial recognition goes mainstream. *Reasearch*eu results magazine*. December 2017-January 2018. No. 68. P. 39.

ГРИЦИК Володимир Володимирович – д.т.н., професор Національного університету «Львівська політехніка». E-mail: volodymyrhrytsyk@gmail.com, Orchid ID: 0000-0002-7681-2211