УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
О.В. БІЛОВА
Український державний університет науки і технологій
І.В. ЩЕРБИНА
Дніпровський державний аграрно-економічний університет

ВРАХУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛІВ ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Актуальність та затребуваність аналітичних та чисельно-аналітичних підходів в задачах сучасної теорії пружності, пов'язаних з врахуванням нелінійності матеріалів, не викликає жодних сумнівів. Така поведінка притаманна композиційним матеріалам різних видів (армований бетон, склопластики). Нелінійність має бути врахована, наприклад, при складному навантаженні, впливі зовнішнього середовища, екстремальному згині конструкції та ін. З цієї точки зору дуже важливою для розвитку сучасних технологій проектування і будівництва є розробка аналітичних методів, оскільки вони одразу дозволяють побачити обґрунтовані наближені результати, а також можуть слугувати для перевірки чисельних розрахунків.

Автори у своїх попередніх роботах [1] вже розглядали плоскі та просторові задачі з урахуванням геометричної нелінійності. Потрібно зазначити, що запропонований підхід може бути застосований до розв'язання задач, в яких залишкові деформації відіграють значну роль (згин тонких пластин та оболонок). Дуже важливим моментом є верифікація отриманих результатів, оцінка адекватності та точності розроблених методів. Авторами роботи завжди приділялась особлива увага цим питанням. Запропонований А.В. Павленком та розвинутий його учнями підхід [2-4] багаторазово проходив апробацію на задачах різного рівня складності. Заснований на ідеях асимптотичного інтегрування за малим параметром, що пов'язаний з фізичними характеристиками матеріалу, метод дозволив звести задачі лінійної теорії пружності до послідовного розв'язування задач теорії потенціалу, що є найбільш розвинутим розділом математичної фізики. Застосування даного підходу дає змогу розв'язати ряд нових складних задач, серед переваг можна вказати і можливість аналізувати напружено-деформований стан багатошарових тіл з підкріплюючими елементами.

В запропонованій статті за допомогою розробленого авторами підходу розв'язуються задачі для фізично нелінійних матеріалів, в яких закони деформування не відповідають закону Гука, тобто залежність між напруженнями та деформаціями є нелінійною. Крім того, враховується циліндрична анізотропія матеріалу тіл взаємодії.

Ключові слова: асимптотичний метод, малий параметр, фізична нелінійність, циліндрична анізотропія, модельна задача.

T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA
Dnipro University of Technology
O. BILOVA
Ukrainian State University of Science and Technology
I. SCHERBINA
Dnipro State Agrarian and Economic University

CONSIDERATION OF NONLINEAR PROPERTIES OF MATERIALS IN MATHEMATICAL MODELING

The relevance and demand of analytical and numerical-analytical approaches in the problems of the modern theory of elasticity, related to taking into account the nonlinearity of materials, does not cause any doubts. This behavior is characteristic of composite materials of various types (reinforced concrete, fiberglass). Non-linearity must be taken into account, for example, with complex loading, the influence of the external environment, extreme bending of the structure, etc. From this point of view, the development of analytical methods is very important for the development of modern design and construction technologies, as they immediately allow you to see reasonable approximate results, and can also serve to check numerical calculations.

The authors in their previous works [1] already considered planar and spatial problems taking into account geometric nonlinearity. It should be noted that the proposed approach can be applied to solving problems in which residual deformations play a significant role (bending of thin plates and shells). A very important point is the verification of the obtained results, assessment of the adequacy and accuracy of the developed methods. The authors of the work

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-3

always paid special attention to these issues. Proposed by A.V. Pavlenko and the approach developed by his students [2-4] has been repeatedly tested on problems of different levels of complexity. Based on the ideas of asymptotic integration for a small parameter related to the physical characteristics of the material, the method made it possible to reduce the problems of the linear theory of elasticity to the sequential solution of the problems of the potential theory, which is the most developed branch of mathematical physics. The application of this approach makes it possible to solve a number of new complex problems, among the advantages it is possible to specify the possibility of analyzing the stress-strain state of multilayer bodies with reinforcing elements.

In the proposed article, using the approach developed by the authors, problems are solved for physically nonlinear materials in which the laws of deformation do not correspond to Hooke's law, that is, the dependence between stresses and deformations is nonlinear. In addition, the cylindrical anisotropy of the material of the interaction bodies is taken into account.

Keywords: asymptotic method, small parameter, physical nonlinearity, cylindrical anisotropy, model problem.

Постановка проблеми

Загальні співвідношення нелінійної теорії пружності моделюють настільки складні процеси, що в інженерній практиці ними користуються не часто, оскільки виникає потреба в обґрунтуванні постановки задач, а після застосування чисельних методів у верифікації результатів. У зв'язку з цим велике значення має розробка наближених чисельно-аналітичних та аналітичних підходів, що враховують особливості поведінки окремих видів конструкцій та їх елементів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Особливості фізично нелінійної теорії пружності були сформульовані Р. Каудерером, який отримав на її основі розв'язання широкого кола задач. Свій подальший розвиток фізично нелінійна теорія отримала в роботах Г. А. Генієва, А. А. Ільюшина, Л. М. Качанова та інших вчених. Метою досліджень останніх років є врахування складних властивостей матеріалів, що наближає математичну модель до реальних задач [4-8]. Наприклад, в [4-8] запропоновані методи розв'язання контактних задач з врахуванням складних властивостей матеріалів (включення, нелінійність, в'язкопружність, анізотропія). Узагальнений авторами та заснований на ідеях асимптотичного інтегрування за малим параметром, що пов'язаний з фізичними характеристиками матеріалу, метод дозволив звести задачі лінійної теорії пружності (в'язкопружності) до послідовного розв'язування задач теорії потенціалу. Розвиток та поширення класів задач та методів їх розв'язання із урахуванням фізично нелінійних особливостей матеріалів висвітлено в роботах [6-10].

Мета дослідження

Зазвичай в складних випадках розв'язання задач асимптотичним методом обчислюється тільки перше наближення, іноді друге. Головний зміст другого наближення – це краще зрозуміти перше. Але вже після першого етапу обчислень метод дає задовільні результати. Такий висновок щодо точності запропонованого підходу неодноразово доводився на класичних прикладах, що дозволяють порівняння. Мета цієї роботи – розвинути метод збурення, ефективність якого вже неодноразово доводилась, на випадок анізотропних матеріалів з фізичною нелінійністю.

Викладення основного матеріалу дослідження

У роботі [5] метод застосовано до плоских задач, де враховується криволінійна анізотропія матеріалу. В якості модельної розглянута задача про одновісне розтягнення анізотропної пластини з круговим отвором. Контур отвору вільний від зовнішніх зусиль, а на нескінченності на пластину діють розтягуючи зусилля з інтенсивністю p. Загальний розв'язок задачі відносно напружень має вигляд

$$\sigma_r = \frac{p}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{p}{2}\left\{1-\frac{1}{r}-\varepsilon\left(1+\varepsilon^{-1/2}\right)\left(\frac{1}{r^{(1-\varepsilon)}}-\frac{1}{r}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right\}\cos 2\theta,$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-3

$$\sigma_\theta = \frac{p}{2}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{p}{2}\left\{1+\left(1+\varepsilon^{-1/2}\right)\frac{1}{r^{\left(1+\varepsilon^{-1}\right)}}+\varepsilon\left(\left(1+\varepsilon^{-1/2}\right)\frac{1}{r^{\left(1+\varepsilon^{-1}\right)}}-\frac{1}{r^{(1-\varepsilon)}}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right\}\cos 2\theta ,$$

$$\tau_r = -\frac{p}{2}\left\{1-\varepsilon^{1/2}\left[\left(1+\varepsilon^{-1/2}\right)\frac{1}{r^{\left(1+\varepsilon^{-1}\right)}}-\frac{1}{r}+\varepsilon\left(1+\varepsilon^{-1/2}\right)\left(\frac{1}{r^{\left(1+\varepsilon^{-1}\right)}}-\frac{1}{r^{(1-\varepsilon)}}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right]\right\}\sin 2\theta .$$

де ε – малий параметр. Останні формули – це перші члени розвинення точного розв'язку в ряд за степенями ε. На контурі отвору криволінійно-анізотропної пластини напруження мають вигляд:

$$\sigma_r = 0 ,\quad \tau_r = 0 ,\quad \sigma_\theta = p-\frac{p}{2}\left[\left(2+\varepsilon^{-1/2}\right)+\varepsilon\left(\varepsilon^{-1/2}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right]\cos 2\theta .$$

$$\text{При}\quad \theta=\frac{\pi}{2}\quad \left(\sigma_\theta\right)_{\max} = p+\frac{p}{2}\left[\left(2+\varepsilon^{-1/2}\right)+\varepsilon\left(\varepsilon^{-1/2}\right)+O\left(\varepsilon^2\right)\right].$$

У таблиці 1 наведені порівняння нульового наближення, отриманого запропонованим методом, з відомим точним результатом для максимального напруження на контурі отвору. При цьому похибка для $\left(\sigma_\theta\right)_{\max}$ на контурі $(\xi=0)$ не перебільшує 1% при $\varepsilon=1/4$ и буде менше $0{,}3\%$ при $\varepsilon=1/9$.

Таблиця 1

Порівняння асимптотичного та точного розв'язків
для максимального напруження на контурі отвору

ε	Відомий розв'язок	Точний розв'язок	Асимптотичний розв'язок	Похибка
1/3 (ізотропний матеріал)	3p	3p	2,85p	≈ 5%
1/4	–	3,22p	3,25p	≈ 0,93%
1/9	–	3,658p	3,667p	≈ 0,24%

Навіть в найбільш несприятливому для запропонованого підходу випадку ізотропного матеріалу (параметр ε найбільший) похибка не перебільшує 5%.

Ефективність запропонованого підходу, достатньо висока точність результатів привела до ідеї узагальнення методу на випадок нелінійних матеріалів, зокрема для таких, де має місце відхилення від закону Гука. Вони відіграють значну роль в сучасній техніці. Це можуть бути в'язкопружнопластичні матеріали, або деякі змодельовані матеріали зі швидкою зміною властивостей та ін. Зв'язок між деформаціями та напруженнями при цьому може бути різноманітним, і відповідні задачі механіки, як правило, приводять до нездоланних математичних труднощів. В той же час, застосування таких матеріалів потребує розробки методів математичного моделювання для розв'язування практично важливих задач та виявленню додаткових резервів міцності матеріалу.

Фізична нелінійність матеріалу може по різному відображатися у виразах зв'язку деформацій та напружень. Класичний випадок, коли нелінійна частина записана у явному вигляді у дотичних напруженнях:

$$\sigma_{11} = A_1 e_{11}, \sigma_{22} = A_2 e_{22}, \sigma_{12} = A_{12}\left(e_{12}+C_2 e_{12}^{\kappa}\right), \qquad (\kappa>1)$$

де C_2 – деяка стала.

Узагальнення методу збурень було розроблено для випадку, коли закон між напруженнями та деформаціями записаний наступними аналітичними залежностями:

$$\sigma_{11} = A_1(u_x)^{\kappa},\quad \sigma_{22} = A_2(\vartheta_y)^{\kappa},\quad \delta_{12} = A_{12}(u_y+\vartheta_x)^{\kappa}, \tag{1}$$

де A_1, A_2 $\left(A_{12}\right)$ – сталі матеріалу, аналоги модулів пружності (зсуву) в лінійному ортотропному

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-3

пружному матеріалі вздовж головних напрямків анізотропії, що співпадають з декартовими координатами x, y; κ – стала.

Після підстановки у рівняння рівноваги виразів (1) маємо

$$(u_x)_x^\kappa + \varepsilon_0 (u_y + \vartheta_x)_y^\kappa = 0, \quad \varepsilon_0 (u_y + \vartheta_x)_x^\kappa + q(\vartheta_y)_y^\kappa = 0,$$
$$(\varepsilon_0 = A_{12} / A_1, q = A_2 / A_1).$$

Питання про визначення напружено-деформованого стану пружного фізично нелінійного ортотропного тіла зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги і сумісності деформацій при відповідних крайових умовах.

Для реальних ортотропних матеріалів $\varepsilon_0 < 1$ і цей параметр можна розглядати як малий.

Врахування криволінійної анізотропії викликає додаткові труднощі. Розглянуто напружено-деформований стан пластинки з криволінійною анізотропією, головні напрямки якої співпадають з криволінійними ізометричними координатами ξ, η :

$$x = \mathrm{Re}[\omega(\zeta)] = x(\xi, \eta),\ y = \mathrm{Im}[\omega(\zeta)] = y(\xi, \eta), z = \omega(\zeta),$$
$$(z = x + iy, \zeta = e^{\xi + i\eta}, i = \sqrt{-1}) \tag{2}$$

Для випадку полярних координат (циліндрична анізотропія) маємо

$$\omega(\zeta) = R\zeta, x = \mathrm{Re}^\xi \cos\eta, y = \mathrm{Re}^\xi \sin\eta; H = \mathrm{Re}^\xi,$$
$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \xi} = 1, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, R = const. \tag{3}$$

H – параметр Ламе.

Враховуючи залежності (1) та рівняння

$$e_{11} = \frac{1}{\mathrm{Re}^\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right), e_{22} = \frac{1}{\mathrm{Re}^\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u\right), e_{12} = \frac{1}{\mathrm{Re}^\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v\right),$$

одержимо

$$\sigma_{11} = A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^\kappa, \sigma_{22} = A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u\right)^\kappa,$$
$$\sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v\right)^\kappa, \tag{4}$$

Тоді рівняння рівноваги набувають вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^\kappa + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - v\right)^\kappa - q\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u\right)^\kappa + (1-\kappa)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^\kappa = 0,$$
$$q\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u\right)^\kappa + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v\right)^\kappa - \varepsilon_0 (2-\kappa)\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v\right)^\kappa = 0. \tag{5}$$

Після розщеплення напружено-деформованого стану на дві складові з різними властивостями у нульовому наближенні за малим параметром ε_0 маємо

$$\left(U_{\xi_1}^{1,0}\right)_{\xi_1}^\kappa + \left(U_{\eta_1}^{1,0}\right)_{\eta_1}^\kappa - q\left(V_{\eta_1}^{1,0}\right)^\kappa = 0, q\left(V_{\eta_1}^{1,0}\right)_{\eta_1}^\kappa = 0$$

$$\sigma_{11}^{1,0} = \varepsilon_0^{-\frac{\kappa^2}{1+\kappa}} A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi_1}\left(U_{\xi_1}^{1,0}\right)^\kappa, \sigma_{22}^{1,0} = \varepsilon_0{}^{-\kappa} A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi_1}\left(V_{\eta_1}^{1,0}\right)^\kappa,$$

$$\sigma_{12}{}^{1,0} = \varepsilon_0{}^{-\kappa} A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi_1}\left(U_{\eta_1}^{1,0}\right)^\kappa$$

$$\left(U_{\xi_2}^{2,0}\right)_{\xi_2}^\kappa = 0, q\left(V_{\eta_2}^{2,0}\right)_{\eta_2}^\kappa + \left(V_{\xi_2}^{2,0}\right)_{\xi_2}^\kappa = 0,$$

$$\sigma_{11}^{2,0} = \varepsilon_0{}^{-\kappa} A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi_2}\left(U_{\xi_2}^{2,0}\right)^\kappa, \sigma_{22}^{2,0} = \varepsilon_0^{-\frac{\kappa^2}{1+\kappa}} A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi_2}\left(V_{\eta_2}^{2,0}\right)^\kappa,$$

$$\sigma_{12}{}^{2,0} = \varepsilon_0{}^{-\kappa} A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi_2}\left(V_{\xi_2}^{2,0}\right)^\kappa.$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-3

Вважаючи $\kappa = 1 - \varepsilon_1$, де ε_1 – ще один малий параметр, введемо нові незалежні змінні

$$\xi_1^* = \xi_1 + \phi_1(\xi_1, \eta_1), \quad \eta_1^* = \eta_1 + \Psi_1(\xi_1, \eta_1), \tag{6}$$

Після знаходження функцій U, V, φ, ψ у вигляді рядів за параметром ε_1 у нульовому та першому наближеннях, як і для лінійно пружних матеріалів, приходимо до інтегрування рівнянь Лапласа відносно основних функцій. Доведена можливість постановки крайових задач для основних функцій.

Якщо напружено-деформований стан не залежить від координати η, тоді рівняння (5) набувають вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^{\kappa} - q\left(u\right)^{\kappa} + \left(1-\kappa\right)\left(\frac{du}{d\xi}\right)^{\kappa} = 0, \\ &\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dv}{d\xi} - v\right)^{\kappa} + \left(2-\kappa\right)\left(\frac{dv}{d\xi} - v\right)^{\kappa} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

При цьому

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^{\kappa}, \sigma_{22} = A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi} u, \\ &\sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi}\left(\frac{dv}{d\xi} - v\right)^{\kappa}. \end{aligned} \tag{8}$$

Якщо дотичні напруження дорівнюють нулю, тоді система (7) переходить в одне рівняння

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^{\kappa} - q\left(u\right)^{\kappa} + \left(1-\kappa\right)\left(\frac{du}{d\xi}\right)^{\kappa} = 0\,. \tag{9}$$

Розшукуючи u у вигляді рядів за параметром ε_1, одержимо, що в кожному наближенні треба розв'язувати звичайне лінійне диференціальне рівняння, у правій частині якого містяться відомі функції, знайдені в попередніх наближеннях.

Якщо переміщення $u = 0$, тоді система (7) переходить в рівняння

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dv}{d\xi} - v\right)^{\kappa} + \left(2-\kappa\right)\left(\frac{dv}{d\xi} - v\right)^{\kappa} = 0\ , \tag{10}$$

а співвідношення (8) мають вигляд

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi}\left(\frac{dv}{d\xi} - v\right)^{\kappa}.$$

Загальний розв'язок рівняння (10) легко знаходиться:

$$v = -C^{\frac{1}{\kappa}}\frac{\kappa}{2}e^{-\left(\frac{2}{\kappa}-1\right)\xi} + C_1 e^{\xi},$$

де C, C_1 – довільні сталі, що визначаються з крайових умов.

Розглянуто приклад про напружено-деформований стан ортотропної пластини з циліндричною анізотропією, що послаблена круговим отвором радіусу R, при всебічному розтягуванні на нескінченності зусиллями інтенсивності p. Контур отвору вільний від зовнішнього навантаження. Знайдено розв'язки для переміщень та напружень у нульовому та першому наближеннях. Зокрема, на контурі отвору $(\xi = 0)$ $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$

$$\sigma_{22} = p\left[1 + \sqrt{q} - \varepsilon_1\left(\frac{1+\sqrt{q}}{2} - \frac{\sqrt{q}}{4}\ln q\right) + o\left(\varepsilon_1^2\right)\right],$$

а при $q = 0$,

$$\sigma_{22} = p\left[2 - \varepsilon_1 + o\left(\varepsilon_1^2\right)\right].$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-3

Якщо $\varepsilon_1 = 0$, то приходимо до лінійної задачі і одержуємо класичне для цього випадку значення концентрації напружень, що дорівнює двом.

У випадку, коли на контурі отвору $(\xi = 0)$ задані дотичні напруження $\sigma_{12} = T_0$, а на нескінченності напруження дорівнюють нулю, дотичне напруження та компонента зміщення v визначаються з формул

$$\sigma_{12} = T_0 e^{-2\xi}, v = -R\left(\frac{T_0}{A_{12}}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\kappa}{2} e^{-\left(\frac{2}{\Re}-1\right)\xi}.$$

Якщо пластина має вигляд кільця, на внутрішньому контурі якого $(\xi = 0)$ $\sigma_{12} = T_0$, а на зовнішньому $(\xi = \xi_0)$ $v = 0$, маємо

$$\sigma_{12} = T_0 e^{-2\xi}, v = R\left(\frac{T_0}{A_{12}}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{\kappa}{2} e^{\xi}\left(e^{-\frac{2}{\kappa}\xi} - e^{-\frac{2}{\kappa}\xi_0}\right).$$

Коли на внутрішньому контурі кільця $(\xi = 0)$ задане переміщення $v = v_0$, а на зовнішньому контурі $(\xi = \xi_0)$ $v = 0$, тоді розв’язок набуває вигляду

$$v = \frac{v_0 e^{\xi}}{e^{-\frac{2}{\kappa}\xi_0} - 1}\left(e^{-\frac{2}{\kappa}\xi_0} - e^{-\frac{2}{\kappa}\xi}\right), \sigma_{12} = A_{12}\left(2v_0 / \kappa R\left(e^{-\frac{2}{\kappa}\xi_0} - 1\right)\right)^{\kappa} e^{-2\xi}.$$

Висновки

Наведені розв'язки модельних задач та виконані можливі граничні переходи доводять ефективність запропонованого узагальнення метода збурень на випадок врахування нелінійних властивостей матеріалів.

Список літератури

1. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В., Шпорта А.Г. Математичне моделювання в задачах геометрично нелінійної теорії пружності. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2021. Т.3. №2.1.С. 107-117.
2. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. К: Вища школа, 1991.131 с.
3. Кагадий Т.С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов. Дніпропетровск: РИК НГА України, 1998. 260 с.
4. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні питання математичного моделювання.* 2020. Т.3. № 2.1. С. 107-116.
5. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В. Застосування методу малого параметру при моделюванні задач теорії в΄язкопружності. *Вісник Херсонського національного університету.* 2019. № 2(69) .Ч.3. С. 69-76.
6. Білова О.В., Кагадій Т.С., Щербина І.В. Аналитическое решение плоских задач о передаче нагрузки. *Вісник Запорізького Національного Університету, серія ф.-м. науки.* 2017. № 1. С. 168-175.
7. Кіт Г. С. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. Львів: Ін-т прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 2000. Т. 1. 401 с.
8. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / ред.: І. О. Луковський, Г. С. Кіт, Р. М. Кушнір. Львів : Ін-т приклад. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. 412 с.
9. Клиндухов В.В. Вдавливание осесимметричного штампа в неоднородный по глубине слой. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2006. № 1. С. 5–9.
10. Wriggers P., Nackenhorst U. Analysis and Simulation of Contact Problems. LNACM Vol. 27, Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. 408 p.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-3

11. Sofonea M., Matei A. Mathematical Models in Contact Mechanics. New York: Cambridge University Press, 2012. 295 p.

References

1. Kahadii, T.S., Bilova, O.V., Shcherbyna, I.V., & Shporta, A.H. (2021). Matematychne modeliuvannia v zadachakh heometrychno neliniinoi teorii pruzhnosti. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. **3** (2.1), 107-117.
2. Manevich, L. I., & Pavlenko, A. V. (1991). Asimptoticheskiy metod v mikromehanike kompozitsionnyih materialov. K: Vischa shkola.
3. Kagadiy, T.S. (1998). Metod vozmuscheniy v mehanike uprugih (vyazkouprugih) anizotropnyih i kompozitsionnyih materialov. DnIpropetrovsk: RIK NGA UkraYini.
4. Kahadii, T.S., Shporta, A.H., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2020). Napruzheno-deformovanyi stan sharuvatoi osnovy z pidkripliuiuchym elementom. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia. KhNTU*. **3** (2.1), 107-116.
5. Kahadii, T.S., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2019). Zastosuvannia metodu maloho parametru pry modeliuvanni zadach teorii v´iazkopruzhnosti. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho universytetu*. **2** (69). Ch.3, 69-76.
6. Bilova, O.V., Kahadii, T.S., & Shcherbyna, I.V. (2017). Analytycheskoe reshenye ploskykh zadach o peredache nahruzky. *Visnyk Zaporozhskoho Natsionalnoho Universytetu, seriia f.-m. nauky*. **1**, 168-175.
7. Kit, H. S. (2000). Matematychni problemy mekhaniky neodnoridnykh struktur. Lviv: In-t prykl. probl. mekh. i mat. NAN Ukrainy. T. 1.
8. Matematychni problemy mekhaniky neodnoridnykh struktur / red.: Lukovskyi, I. O., Kit, H. S., & Kushnir, R. M. (2014). Lviv : In-t pryklad. problem mekhaniky i matematyky im. Ya. S. Pidstryhacha NAN Ukrainy.
9. Klinduhov, V.V. (2006). Vdavlivanie osesimmetrichnogo shtampa v neodnorodnyiy po glubine sloy. *Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela*. **1**, 5–9.
10. Wriggers, P., & Nackenhorst, U. (2006). Analysis and Simulation of Contact Problems. LNACM Vol. 27, Berlin–Heidelberg: Springer.
11. Sofonea, M., & Matei, A. (2012). Mathematical Models in Contact Mechanics. New York: Cambridge University Press.

Кагадій Тетяна Станіславівна - доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», e-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971

Білова Оксана Вікторівна - кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики Українського державного університету науки і технологій, e-mail: okbelova00@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164

Щербина Ірина Володимирівна - кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри віщої математики і фізики Дніпровського державного аграрно-економічного університету, e-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326

Шпорта Анна Григорівна - кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка»державний вищий навчальний заклад НТУ «Дніпровська політехніка», e-mail: shportaanna@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1260-7358

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-3