

Є. В. ВЕСКОВ

Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

С. О. ДОВГИЙ

Інститут прикладних систем управління Національної академії наук України

Д. О. РЕДЧИЦЬ

Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України

Інститут прикладних систем управління Національної академії наук України

Дніпровський державний технічний університет

ПОРІВНЯННЯ СХЕМ АПРОКСИМАЦІЇ КОНВЕКТИВНИХ ДОДАНКІВ В РІВНЯННЯХ НАВ'Є-СТОКСА В ПРОГРАМНОМУ КОМПЛЕКСІ OPENFOAM

Ламінарне вихроутворення за круглим циліндром є типовим тестом для перевірки чисельних методів. Кількісні результати чисельного моделювання при великих числах Рейнольдса залишаються чутливими до методу апроксимації конвективних доданків. CFD програмні комплекси з відкритим кодом пропонують широкий вибір схем апроксимації конвективних доданків за допомогою яких можливо знайти компроміс між чисельною дифузєю, дисперсією, стійкістю та обмеженістю. Метою цього дослідження є оцінка впливу схем апроксимації конвективних доданків, доступних в OpenFOAM, на точність визначення аеродинамічних коефіцієнтів, частоти вихроутворення та структури сліду у випадку двовимірного обтікання кругового циліндру нестисливою рідиною з числом Рейнольдса. $Re = 200$. Течія моделюється за допомогою розв'язувача нестационарних нестисливих процесів `pimpleFoam` на структурованій O – подібній сітці з перевіркою незалежності сітки від розміру комірок та кроку за часом. Проведено порівняння ряду чисельних схем апроксимації конвективних доданків, таких як `linearUpwind`, `limitedLinear`, `cubic`, `limitedCubic`, `MUSCL` та `SuperBee`, включаючи їх векторні (' V ') варіанти. Досліджується вплив обмежувачів градієнтів на розв'язок. Ефективність оцінюється шляхом порівняння коефіцієнтів опору та підйомної сили, числа Струхала та якісної оцінки контурів завихреності з відомими експериментальними та чисельними даними. Результати показують, що тип чисельної схеми суттєво впливає на точність рішення. Значення аеродинамічних коефіцієнтів, отримані за допомогою схем з високою роздільною здатністю `MUSCLV` та `SuperBeeV`, значно перевищують експериментальні, використання схем `limitedLinear` та `limitedCubic` призводить до заниження значень аеродинамічних коефіцієнтів внаслідок схемної в'язкості. Однак використання векторних обмежувачів покращило точність. Серед протестованих чисельних схем `linearUpwind` та `linearUpwindV` надають найкращий баланс між точністю, стійкістю та якістю моделювання вихрового сліду. Крім того, ці схеми, здатні моделювати плавні, неспотворені контури завихреності, тоді як інші внесли значні нефізичні спотворення. Отримані результати підкреслюють критичну роль схеми апроксимації конвективних доданків в течіях з домінуванням вихрів. В роботі надано практичні рекомендації для надійного моделювання течій нестисливої рідини за допомогою OpenFOAM.

Ключові слова: схеми конвективного переносу, OpenFOAM, вихроутворення.

Ye. V. VIESKOV

National University "Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic"

S. O. DOVGYI

Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine

D. O. REDCHYTS

Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine

Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine

Dniprovsky State Technical University

COMPARISON OF DISCRETISATION SCHEMES FOR CONVECTION TERMS IN THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN OPENFOAM SOFTWARE

Laminar vortex shedding behind a circular cylinder is a canonical benchmark for validating numerical methods, yet quantitative predictions at moderate Reynolds numbers remain sensitive to the discretization of convective terms. In open-source CFD frameworks, the wide choice of advection schemes introduces a trade-off between numerical diffusion, dispersion, stability, and boundedness. The objective of this study is to evaluate how different advection discretization schemes available in OpenFOAM influence the accuracy of force coefficients, shedding frequency, and wake structures for two-dimensional incompressible flow past a circular cylinder at Reynolds number $Re = 200$. The flow is simulated using the transient incompressible solver `pimpleFoam` on a structured O -type grid, with mesh and time-step independence verification. A consistent computa-

tional setup is employed while comparing a range of schemes, including linearUpwind, limitedLinear, cubic, limitedCubic, MUSCL, and SuperBee, including their vector-based ('V') variants. The influence of gradient limiters on the solution is studied. The performance is assessed by comparing drag and lift coefficients, Strouhal numbers (St), and the qualitative resolution of vorticity contours against established experimental and numerical data. The results indicate that the choice of scheme profoundly impacts solution fidelity. High-resolution schemes such as MUSCLV and SuperBeeV yielded force coefficients that deviated significantly from reference values, while standard limitedLinear and limitedCubic schemes resulted in under-predictions due to excessive numerical diffusion. However, the use of vector-based limiters noticeably improved accuracy.

Among the tested numerical schemes, linearUpwind and linearUpwindV offers the most consistent balance between accuracy, stability, and smooth wake resolution. Furthermore, these were the only schemes capable of resolving smooth, undistorted vorticity contours in the wake, whereas others introduced significant unphysical distortions. These results highlight the critical role of advection scheme selection in vortex-dominated flows. The paper provides practical recommendations for reliable modeling of incompressible fluid flows using OpenFOAM.

Keywords: advection schemes, OpenFOAM, vortex shedding.

Постановка проблеми

Круговий циліндр розміщено в круговій обчислювальній області з центром у початку декартової системи координат як показано на рис. 1. Граничні умови також показано на рис. 1. Оскільки ця обчислювальна область є круговою, розмір області можна визначити через її діаметр, D . Отже, відстань границі від центру циліндра визначається як $D/2$, тобто $D = 50d$, де $d = 1$ м – діаметр циліндру.

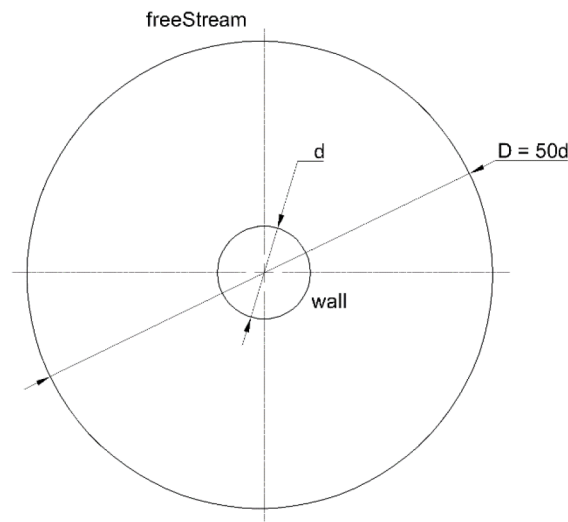


Рис. 1. Обчислювальна область і граничні умови

Течія є нестисливою, ламінарною, ньютонівською і описується рівняннями Нав'є-Стокса [1; 2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{U}. \tag{2}$$

На стінці циліндру застосовано граничну умову прилипання для швидкості та умова Неймана для тиску:

$$\mathbf{U} = 0; \nabla p \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{3}$$

На границі розрахункової області застосовується умова потоку, що набігає [3; 1]. Ця умова є умовою змішаного типу [4]:

$$\mathbf{U} = v_u \mathbf{U}_\infty + (1 - v_u) \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}; \quad \mathbf{p} = v_p p_\infty + (1 - v_p) \nabla p \cdot \mathbf{n}; \tag{4}$$

де U_∞ – швидкість незбуреного потоку, м/с; t – час, с; p – тиск, Па; p_∞ – тиск у незбуреному потоці, Па; ρ – густина, кг/м³; μ – динамічна в'язкість, Па · с; ν – кінематична в'язкість, м²/с;

n – зовнішня нормаль до поверхні; $v_u = 0.5(1 - (U \cdot n/|U|))$, $v_p = 0.5(1 + (U \cdot n/|U|))$ – змішувальні функції для швидкості і тиску відповідно [4]. Для вхідного потоку $U \cdot n < 0$, $v = 1$. Для вихідного потоку $U \cdot n > 0$, $v = 0$. Для $|U| = 0$, $v = 0.5$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Обтікання циліндра нескінченної довжини потоком в'язкої нестисливої рідини – класична задача гідродинаміки. Незважаючи на просту геометрію, обтікання циліндра демонструє безліч явищ відносно невеликого діапазону чисел Рейнольдса, які також зустрічаються в більш складних випадках. Прикладами є відрив потоку через несприятливі градієнти тиску, з розвитком нестационарної вихрової доріжки Кармана та виникнення турбулентності в сліді [5].

Ця задача має важливе значення для багатьох практичних застосувань, наприклад, проектування опор мостів, перископів, димоходів, веж, щогл, кабелів і антен. Знання про нестационарні навантаження, пов'язані з течією, на такі конструкції має вирішальне значення для гідро- та аеродинамічного проектування [6].

Одним з найважливіших аспектів чисельного моделювання є дискретизація конвективних доданків в рівняннях Нав'є-Стокса. Вибір схеми адвекції суттєво впливає на точність, стабільність та обчислювальну вартість моделювання [1; 4; 7].

М. Сандір [8] провів дослідження впливу чисельних схем на розрахунок ударного тиску в течіях з вільною поверхнею за допомогою розв'язувача *interFoam*, який є складовою частиною *OpenFOAM* [8]. Оцінка ефективності проводилася з точки зору відсоткової похибки, нормалізованої середньоквадратичної похибки та нормалізованої середньої абсолютної похибки. У дослідженні оцінювалися різні схеми апроксимації конвективних членів, включаючи *linear*, *linearUpwind*, *limitedLinear* (з коефіцієнтами, такими як 0,2 та 0,4), *Minmod*, *vanLeer*, *MUSCL*, *UMIST*, *SuperBee* та їх векторні варіанти (наприклад, *MinmodV*, *vanLeervV*). Результати підкреслюють, що вибір чисельної схеми безпосередньо впливає як на локальні екстремуми (піковий тиск), так і на загальну точність рішення, підкреслюючи чутливість до методів дискретизації конвективних доданків в нестационарних багатофазних задачах.

С. Лікі та ін. [9] порівнювали схеми обмеження градієнтів в *OpenFOAM*, застосовуючи їх до методів штучної стисливості для нестисливих потоків зі змінною густиною на 3D неструктурованих сітках [9]. У роботі відзначалися недоліки в реалізації методів обмеження градієнтів в *OpenFOAM*. Авторами було розроблено нові версії обмежувачів градієнтів.

Й. Лю та ін. [10] реалізували в *OpenFOAM* дворідинну модель з кінетичною теорією гранулярного потоку для моделювання шару бульбашкового кипіння [10]. П'ять схем TVD – *limitedLinear*, *Sweby*, *vanLeer*, *SuperBee* та *MUSCL* – були протестовані для дискретизації конвективних доданків у рівняннях фазової швидкості та об'ємної частки твердої речовини. Крім того, автори продемонстрували, що градієнтна схема *faceLimited* збільшує числову дифузію, тоді як градієнтні обмежувачі *cellLimited* та *cellMDLimited* пропонують кращий баланс між точністю та стабільністю.

Л. Ку та ін. [11] використовували метод скінченного об'єму з методом дрібних кроків, з точністю другого порядку за простором та часом, для $Re = 50 \div 200$. Вони провели детальні дослідження чутливості розміру розрахункової області, незалежності рішення від розміру комірок сітки та кроку за часом для $Re = 100$. Вони дійшли висновку, що розмір обчислювальної області суттєво впливає на значення аеродинамічних коефіцієнтів.

Дж. Чої та ін. [12] застосували метод занурених границь (*immersed boundary method*) для моделювання 3D потоків нестисливої рідини, дискретизуючи рівняння Нав'є-Стокса за допомогою методу розщеплення потоку з низькою дифузійною та центральних різниць другого порядку. Автори використовували схеми TVD високого порядку точності та перевіряли свій метод на задачі обтікання кругового циліндру при $Re = 100$ та 200. Отримані результати розрахунків частоти вихроутворення та коефіцієнтів опору та підйомної сили демонструючи добру відповідність з іншими обчислювальними та експериментальними результатами.

К. Лю та ін. [13] розробили ефективний чисельний підхід, заснований на багатосіткових методах та методах з передумовленням для 3D стаціонарних та нестаціонарних нестисливих потоків. Розроблений алгоритм автори перевірили на задачі нестаціонарного ламінарного обтікання циліндру при $Re = 100, 150$ та 200 , і показали гарну відповідність числа Струхала та аеродинамічних коефіцієнтів з експериментальними даними.

Мета дослідження

Метою дослідження є порівняння різних схем дискретизації конвективних доданків в рівняннях Нав'є-Стокса, доступних у програмному забезпеченні з відкритим кодом OpenFOAM. Дослідження зосереджено на задачі обтікання кругового циліндра, з поглибленим аналізом вибраних схем конвективного переносу, доступних в OpenFOAM, які особливо актуальні для цього типу течії.

Виклад основного матеріалу дослідження

Методи дослідження. У програмному забезпеченні, яке використовує комірково-центрований метод скінченного об'єму [4; 1; 14] проблема дискретизації конвективних доданків $\nabla \cdot (\mathbf{U}\phi)$ у рівнянні переносу для скалярної величини ϕ зводиться до знаходження значення ϕ на грані (ϕ_f) з використанням інформації, доступної в сусідніх комірках.

Конвективний член $\nabla \cdot (\mathbf{U}\phi)$, значною мірою впливає на чисельну похибку через свої нелінійні та гіперболічні характеристики. У методі скінченного об'єму його дискретизація включає інтегрування за контрольним об'ємом та застосування теореми Гауса. Інтеграл по об'єму перетворюється на суму потоків через грані контрольного об'єму [1, 2, 4, 7]

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) dV \approx \sum_f (\mathbf{u}\phi)_f \cdot S_f = \sum_f F_f \phi_f, \quad (5)$$

де $F_f = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S}_f$ – об'ємний потік через грань f , а ϕ_f – значення величини, що переноситься в центрі грані.

В роботі розглядаються наступні схеми дискретизації конвективних потоків: `linearUpwind`, `linearUpwindV`, `limitedLinear`, `limitedLinearV`, `cubic`, `limitedCubic`, `limitedCubicV`, `quadraticUpwindFit`, `MUSCLV`, `SuperBeeV`.

– `linearUpwind` та `quadraticUpwindFit` – схеми проти потоку другого та четвертого порядку відповідно;

– `cubic` – центрально-різницева схема третього порядку;

– `limitedLinear` та `limitedCubic` – центрально-різницеві схеми другого та третього порядку відповідно, що задовольняють умові зменшення повної варіації (TVD);

– `MUSCL`, `SuperBee` – схеми високої роздільної здатності другого порядку, що задовольняють умові TVD.

Спеціалізовані версії вище наведених чисельних схем позначаються додаванням «V» до назви схеми. У V-схемах обмежувач потоку розраховується для напрямку найшвидшого зростання градієнту і застосовується у всіх координатних напрямках. V-схеми особливо важливі для точного розв'язання рівнянь переносу векторних величин, таких як поле швидкості \mathbf{U} , у моделюванні течії рідини [3; 4; 7; 15].

Математично, схему `linearUpwind` можна розглядати як комбінацію схеми проти потоку першого порядку та центрально-різницевої схеми. Значення на грані ϕ_f для `linearUpwind` формулюється як [1, 4, 14, 15]:

$$\phi_f = \phi_C + \mathbf{r} \cdot (\nabla)\phi_C, \quad (6)$$

де \mathbf{r} позначає вектор, що з'єднує центр комірки проти потоку C з центром грані f (де обчислюється значення ϕ), а $(\nabla)\phi_C$ – градієнт ϕ у центрі комірки проти потоку C .

Схема інтерполяції конвективних доданків на неструктурованій сітці наведена на рисунку 2.

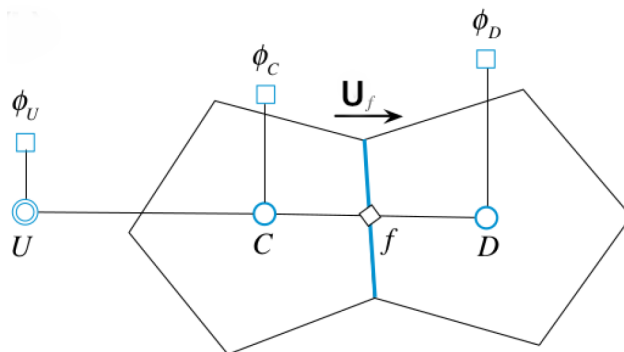


Рис. 2. Схема інтерполяції конвективних доданків на неструктурованій сітці

Схема `linearUpwind` в OpenFOAM у поєднанні з центральним диференціюванням для обчислення градієнта відповідає схемі Фромма [15], а не схемі другого порядку проти потоку (`Second Order Upwind`), як невірно зазначалося в документації OpenFOAM [14; 16].

Схема `limitedLinear` є комбінацією схеми першого порядку проти потоку та центрально-різницевої схеми [15].

Співвідношення градієнтів у сусідніх комірках r служить мірою локальної гладкості розв’язку. Значення на грані ϕ_f для `limitedLinear` виражається у формі [15]:

$$\phi_f = \begin{cases} \left(1 - \frac{2r}{k}(1-\lambda)\right)\phi_C + \frac{2r}{k}(1-\lambda)\phi_D & 0 < r < \frac{k}{2} \\ \lambda\phi_C + (1-\lambda)\phi_D & \frac{k}{2} \leq r \\ \phi_C & \text{elsewhere} \end{cases}, \quad (7)$$

де r запишеться як:

$$r = \frac{2(\nabla\phi)_C \cdot \mathbf{d}}{\phi_D - \phi_C} - 1 = \frac{2(\nabla\phi)_C \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}| |(\nabla\phi)_f|} - 1, \quad (8)$$

де $\lambda = \frac{d_{fD}}{d_{CD}} = \frac{\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_f}{\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C}$ – стандартний ваговий коефіцієнт лінійної інтерполяції; d_{fD} – модуль відстані вздовж лінії, що з’єднує поверхню комірки та центр комірки проти потоку; d_{CD} – модуль відстані вздовж лінії, що з’єднує центри комірок проти потоку та за потоком; $\mathbf{d} = \mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C$ – відстань між центрами комірок проти потоку та за потоком.

Коефіцієнт $k = 0$ у цій схемі визначається користувачем і контролює перехід від схеми проти потоку до лінійної схеми. Причому нижчі значення призводять до швидшого переходу, а $k = 0$ – до обмеженої центрально-різницевої схеми. Коефіцієнт $k = 1$ забезпечує відповідність умові TVD, що призводить до кращої збіжності рішення, тоді як коефіцієнт $k = 0$ спрямований на найкращу точність. Значення $k = 1$ часто рекомендується для забезпечення стійкості рішення. Коефіцієнт, k може приймати значення лише від 0 до 1 [15].

Схема `cubic` в OpenFOAM – це центрально-різницева схема третього порядку [3; 7]. Значення на грані ϕ_f визначається як:

$$\phi_f = \lambda\phi_C + (1-\lambda)\phi_C + \lambda(1-\lambda)(1-2\lambda)(\phi_D - \phi_C) - \lambda^2(\lambda-1)\nabla\phi_C - \lambda(1-\lambda)^2\nabla\phi_D. \quad (9)$$

Градієнти $\nabla\phi_C$, $\nabla\phi_D$ апроксимуються за допомогою центрально-різницевої схеми другого порядку, результуюча апроксимація ϕ на межі комірки зберігає точність полінома четвертого порядку [3; 7].

Значення ϕ_f для схем високої роздільної здатності, що задовольняють умові TVD можна записати у вигляді [1]

$$\phi_f = \phi_C + \frac{1}{2}\psi(r)(\phi_D - \phi_C), \tag{10}$$

де $\psi(r)$ – обмежувач потоку, що задовольняє умові TVD.

Для схеми `limitedCubic` він має наступний вираз [3]:

$$\psi(r) = \max\left(\min\left(\min\left(\frac{2r}{k}, \frac{\phi_f^{cubic} - \phi_U}{\phi_f^{CD} - \phi_U}\right), 2\right), 0\right). \tag{11}$$

Кубічна інтерполяція значення змінної в грані:

$$\phi_f^{cubic} = \lambda(\phi_C - 0.25(\mathbf{d} \cdot \nabla\phi_D)) + (1-\lambda)(\phi_D + 0.25(\mathbf{d} \cdot \nabla\phi_C)). \tag{12}$$

Центрально-різницева інтерполяція:

$$\phi_f^{CD} = \lambda\phi_C + (1-\lambda)\phi_D. \tag{13}$$

Інтерполяція проти потоку:

$$\phi_U = \begin{cases} \phi_C & \text{if } F_f > 0 \\ \phi_D, & \text{if } F_f < 0 \end{cases} \tag{14}$$

Для схем `MUSCL` та `SuperBee` значення змінної ϕ в центрі грані f контрольного об’єму обчислюється за допомогою стандартної формули інтерполяції TVD (10). Вираз для обмежувача потоку `MUSCL` запишемо як [1; 3]:

$$\psi(r) = \max(0, \min(2r, 0.5r + 0.5, 2)). \tag{15}$$

Обмежувач потоку `SuperBee` [1; 3]:

$$\psi(r) = \max(0, \min(1, 2r), \min(2, r)). \tag{16}$$

У V-схемах використовується вираз для r замість виразу (8) для скаляра [4]:

$$r = \frac{2(\nabla\phi)_C \cdot \mathbf{d} \cdot (\nabla\phi)_f}{|\mathbf{d}|(\nabla\phi)_f \cdot (\nabla\phi)_f} - 1. \tag{17}$$

V-схеми забезпечують більшу стійкість, ніж звичайні схеми з обмеженням компонентів. Вони можуть усунути коливання в розв’язках [4].

Усі вищезазначені схеми були протестовані з обмежувачами градієнта. Схема дискретизації градієнта відіграє важливу роль у розрахунку коефіцієнта градієнта r , що використовується в TVD схемах.

Для підвищення точності та стійкості схеми використовується схема обчислення градієнта `cellMDLlimited` [9; 10]. Розглянемо комірку з гранями $f=1, 2, \dots, N$. Обмежуючи градієнт у напрямку від центра комірки до центру цієї грані отримаємо [9]:

$$(\nabla\phi)_{i,f} = \begin{cases} (\nabla\phi)_{i,f-1} + \mathbf{d}_{i,j} \cdot \frac{\Delta_{i,max} - \Delta_{i,f}}{|\mathbf{d}_{i,j}|^2} & \text{if } \Delta_{i,f} > \Delta_{i,max} \\ (\nabla\phi)_{i,f-1} + \mathbf{d}_{i,j} \cdot \mathbf{d}_{i,j} \cdot \frac{\Delta_{i,max} - \Delta_{i,f}}{|\mathbf{d}_{i,j}|^2} & \text{if } \Delta_{i,f} < \Delta_{i,min} \\ (\nabla\phi)_{i,f-1} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{18}$$

де $\Delta_{i,f} = (\nabla\phi)_{i,f-1} \cdot \mathbf{d}_{i,j}$ – екстраполяція змінних на гранях f комірки i . $\Delta_{i,max} = \phi^{\max} - \phi_i$, $\Delta_{i,min} = \phi^{\min} - \phi_i$ – максимальне та мінімальне значення в сусідніх комірках.

Градiєнт `cellMDlimited` обчислюється iтеративно. Отже, обмежувач застосовується до градiєнта в кожному напрямку гранi окремо [9].

Коефiцiєнт обмеження нахилу ψ знаходиться в дiапазонi вiд нуля до одиницi, де значення 1 означає обмеження градiєнта для гарантування того, що екстрапольоване значення на гранi залишається в межах мiж мiнiмальним $\Delta_{i,\min}$ та максимальним $\Delta_{i,\max}$ значеннями у сусiднiх комiрках. Меншi значення дозволяють екстрапольованому значенню виходити за цi межi на величину, кратну рiзницi $\Delta_{i,\max} - \Delta_{i,\min}$ [14].

Схеми `linearUpwind`, `linearUpwindV`, `cubic`, `limitedCubic`, `quadraticUpwindFit` можуть задовольняти умовi TVD, якщо їх використовувати разом з обмежувачами градiєнтів. Greensheeds [4] довiв, що схема `linearUpwind` з обмеженням градiєнтів задовольняє умовi TVD.

Основнi рiвняння розв'язуються за допомогою алгоритму PIMPLE, який включає зв'язок тиску та швидкостi SIMPLE (напiвнеявний метод для рiвнянь, пов'язаних з тиском) з iтерацiйними корекцiями PISO (неявний метод тиску з розщепленням операторiв) [1; 4].

Структуровану сiтку O-типу розмiром 120×250 комiрок, побудовано за допомогою програмного забезпечення `blockMesh`, яке є частиною пакету `OpenFOAM` [14]. Для адекватного моделювання в'язких ефектiв у фiзичнiй областi вводиться дуже неоднорiдна сiтка з згущенням поблизу поверхнi цилiндра та в слiдi. Розмiр першої комiрки сiтки вiд поверхнi становить 0.0035 дiаметра, кiлькiсть точок у граничному шарi становить 40. Зовнiшня границя розташована на вiдстанi 50 дiаметрiв цилiндра.

Проведено перевiрку незалежностi розв'язку вiд роздiльної здатностi сiтки для числа Рейнольдса $Re = 200$ та схеми дискретизацiї конвективних доданкiв `linearUpwindV` з метою вибору оптимальної кiлькостi комiрок. Для цього було створено три окремi сiтки – грубу, середню та дрiбну. Залежнiсть значень аеродинамiчних коефiцiєнтiв та числа Струхала вiд кiлькостi комiрок сiтки наведено в Таблицi 1.

Коефiцiєнти опору та пiдйомної сили визначаються формулами:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S}; \quad (19)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S}. \quad (20)$$

Число Струхала являє собою безрозмiрну частоту вихроутворення:

$$St = \frac{fd}{U_\infty}, \quad (21)$$

де F_D – сила опору, Н; F_L – пiдйомна сила, Н; S – площа мiделя, m^2

Таблиця 1

Результати перевiрки незалежностi розв'язку вiд розмiру комiрок сiтки для $Re = 200$ з використанням схеми `linearUpwindV`

| Тип сiтки | Кiлькiсть комiрок сiтки | C_D | C_L | St |
|-----------|-------------------------|-------|-------|--------|
| Груба | 7500 | 1.3 | 0.57 | 0.1898 |
| Середня | 30 250 | 1.35 | 0.64 | 0.1948 |
| Точна | 121 000 | 1.36 | 0.66 | 0.1948 |

Перехід від середньої до дрібної сітки призводить до незначних відмінностей у коефіцієнті опору C_D та числі Струхаля St (табл. 3). Отже, для подальших обчислень було обрано сітку medium (табл. 3). Оптимальна кількість комірок сітки становить приблизно 30 250.

Перевірку незалежності розв'язку від кроку інтегрування за часом проведено для трьох різних кроків за часом: $\Delta t = 1/(40T_S)$, $\Delta t = 1/(80T_S)$, $\Delta t = 1/(160T_S)$. $T_S = d/(U_\infty St)$ – період вихроутворення.

У таблиці 2 наведено результати перевірки незалежності розв'язку від кроку за часом.

Таблиця 2

Результати перевірки незалежності розв'язку від кроку за часом при $Re = 200$ з використанням схеми `linearUpwindV`

| Крок за часом | C_D | C_L | St |
|-----------------------|-------|-------|--------|
| $\Delta t = 1/40T_S$ | 1.35 | 0.64 | 0.1948 |
| $\Delta t = 1/80T_S$ | 1.35 | 0.64 | 0.1948 |
| $\Delta t = 1/160T_S$ | 1.36 | 1.35 | 0.1948 |

На основі результатів перевірки незалежності розв'язку від кроку за часом було обрано крок $1/80T_S$.

Результати розрахунку обтікання циліндра нестисливою в'язкою рідиною при $Re = 200$ для різних схем дискретизації конвективних доданків наведено в таблиці 3. Результати експериментальних та чисельних досліджень інших авторів наведено в таблиці 4.

Згідно з результатами, наведеними в таблиці 4 та рис. 3–5 найкраще співпадіння з результатами експериментів та чисельних розрахунків, наведеними в Таблиці 5 надає схема `linearUpwindV` з обмежувачем градієнту `cellMDLlimited`, $\psi = 1$ (максимальне значення обмежувача). В таблиці 4 індексом (E) позначені джерела присвячені експериментальним дослідженням, індексом (N) – чисельним.

Зокрема, значення числа Струхаля $St = 0.195$ відповідає експериментальним вимірюванням А. Рошко та К. Х. К. Вільямсон [17; 18], а також чисельним результатам О. Позджич та Р. Грундман [5] та Дж. Чої та ін. [1210]. Аналогічну відповідність коефіцієнтів опору та підйомної сили було продемонстровано у роботі К. Лю та ін. [13], що підтверджує коректність обраної просторово-часової дискретизації та розмірів розрахункової області.

Схожі результати демонструють схеми `linearUpwind`, `cellMDLlimited`, $\psi = 1$ та `cubic`, `cellMDLlimited`, $\psi = 1$. Але схема `cubic`, `cellMDLlimited`, $\psi = 1$ спотворює контури завихреності.

Схеми `limitedLinear` надають занижені значення аеродинамічних коефіцієнтів та числа Струхаля у поєднанні з обмежувачем градієнту `cellMDLlimited`, $\psi = 1$ та $\psi = 0.5$. При $\psi = 0$ (обмежувач градієнту повністю вимкнено) значення аеродинамічних коефіцієнтів та числа Струхаля гарно узгоджуються з експериментальними і чисельними результатами. Спостерігаються невеликі спотворення контурів завихреності. Зміна коефіцієнта k в межах $0.5 \div 1$ не має суттєвого впливу на розв'язок.

Подібний ефект відзначав М. Сандір [8], який показав суттєву залежність пікових значень тиску від вибору схеми апроксимації конвективних доданків в задачі руйнування дамби. Використання векторних обмежувачів в схемах `limitedLinearV`, `limitedCubicV` частково зменшує цей ефект, що узгоджується з висновками К. Гріншилдса і Г. Веллера [4].

Й. Лю та О. Хінріхсен [10] рекомендували використовувати обмежувачі градієнтів `cellLimited` та `cellMDLlimited` разом зі схемою `limitedLinearV` для чисельного моделювання гранулярних течій (течій сипучого середовища). Але в даній роботі виявлено, що у випадку обтікання кругового циліндра ламінарним потоком нестисливої рідини TVD схеми дають найкращі результати без обмежувачі градієнтів.

Таблиця 3

Результати розрахунку обтікання циліндра нестисливою в'язкою рідиною при $Re = 200$ для схем дискретизації конвективних доданків з обмежувачами градієнтів та без них

| Схема дискретизації конвективних доданків | Схема обмеження градієнтів | C_D | C_L | St |
|---|------------------------------|-------|-------|--------|
| linearUpwind | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.36 | 0.66 | 0.1948 |
| linearUpwindV | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.35 | 0.64 | 0.1948 |
| Cubic | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.36 | 0.66 | 0.1948 |
| limitedLinear, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.30 | 0.56 | 0.1898 |
| limitedLinear, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 0.5$ | 1.30 | 0.56 | 0.1898 |
| limitedLinear, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 0$ | 1.34 | 0.63 | 0.1948 |
| limitedLinear, $k = 0.5$ | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.30 | 0.57 | 0.1898 |
| limitedLinear, $k = 0.5$ | cellMDLlimited, $\psi = 0.5$ | 1.34 | 0.63 | 0.1948 |
| limitedLinear, $k = 0.5$ | cellMDLlimited, $\psi = 0$ | 1.34 | 0.63 | 0.1948 |
| limitedLinearV, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.34 | 0.63 | 0.1948 |
| limitedLinearV, $k = 0.5$ | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.34 | 0.63 | 0.1948 |
| limitedCubic, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.36 | 0.66 | 0.1898 |
| limitedCubic, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 0.5$ | 1.36 | 0.66 | 0.1898 |
| limitedCubic, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 0$ | 1.36 | 0.66 | 0.1898 |
| limitedCubicV, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.36 | 0.66 | 0.1948 |
| limitedCubicV, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 0.5$ | 1.36 | 0.66 | 0.1948 |
| limitedCubicV, $k = 1$ | cellMDLlimited, $\psi = 0$ | 1.36 | 0.66 | 0.1948 |
| MUSCLV | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.41 | 0.71 | 0.1948 |
| MUSCLV | cellMDLlimited, $\psi = 0.5$ | 1.45 | 0.67 | 0.2147 |
| MUSCLV | cellMDLlimited, $\psi = 0$ | 1.36 | 0.66 | 0.1948 |
| SuperBeeV | cellMDLlimited, $\psi = 1$ | 1.42 | 0.64 | 0.2147 |
| SuperBeeV1 | cellMDLlimited, $\psi = 0.5$ | 1.45 | 0.67 | 0.2197 |
| SuperBeeV | cellMDLlimited, $\psi = 0$ | 1.36 | 0.66 | 0.1948 |

Таблиця 4

Результати експериментальних досліджень та чисельного моделювання обтікання циліндра нестисливою в'язкою рідиною при $Re = 200$

| Джерела | C_D | C_L | St |
|---|-------|------------|-------|
| А. Рошко (1954) ^(E) [17] | – | – | 0.19 |
| К. Норберг (2003) ^(E) [6] | – | ± 0.45 | 0.19 |
| К. Х. К. Вільямсон (1989) ^(E) [18] | – | – | 0.197 |
| Дж. Чої та ін. (2007) ^(N) [12] | 1.36 | ± 0.64 | – |
| К. Лю та ін. (1998) ^(N) [13] | 1.31 | ± 0.69 | – |
| О. Позджич та Р. Ґрундман (2007) ^(N) [5] | 1.32 | ± 0.66 | 0.195 |

Подібну поведінку демонструють схеми limitedLinearV, але значення аеродинамічних коефіцієнтів і числа Струхала гарно узгоджуються з експериментальними і чисельними результатами для всіх значень ψ . Спостерігаються спотворення контурів завихреності менші ніж у схемах без векторного обмежувача.

Схеми limitedCubic та limitedCubicV надають значення аеродинамічних коефіцієнтів та числа Струхала, які перевищують експериментальні та чисельні значення, наведені в таблиці 6.

Контури завихреності спотворені, але для `limitedCubicV` вони виглядають більш природно. Найкращі результати отримані при $\psi = 0$, тобто без використання обмежувачів градієнтів.

Схеми `MUSCLV` та `SuperBeeV` суттєво завищують значення аеродинамічних коефіцієнтів та числа Струхала та спотворюють контури завихреності. Водночас, зафіксоване у цьому дослідженні завищення аеродинамічних коефіцієнтів при використанні схем `MUSCL` та `SuperBee` корелює з висновками Й. Лю та О. Хінріхсен [10]. Ці схеми мають надмірну штучну стискаємість, що

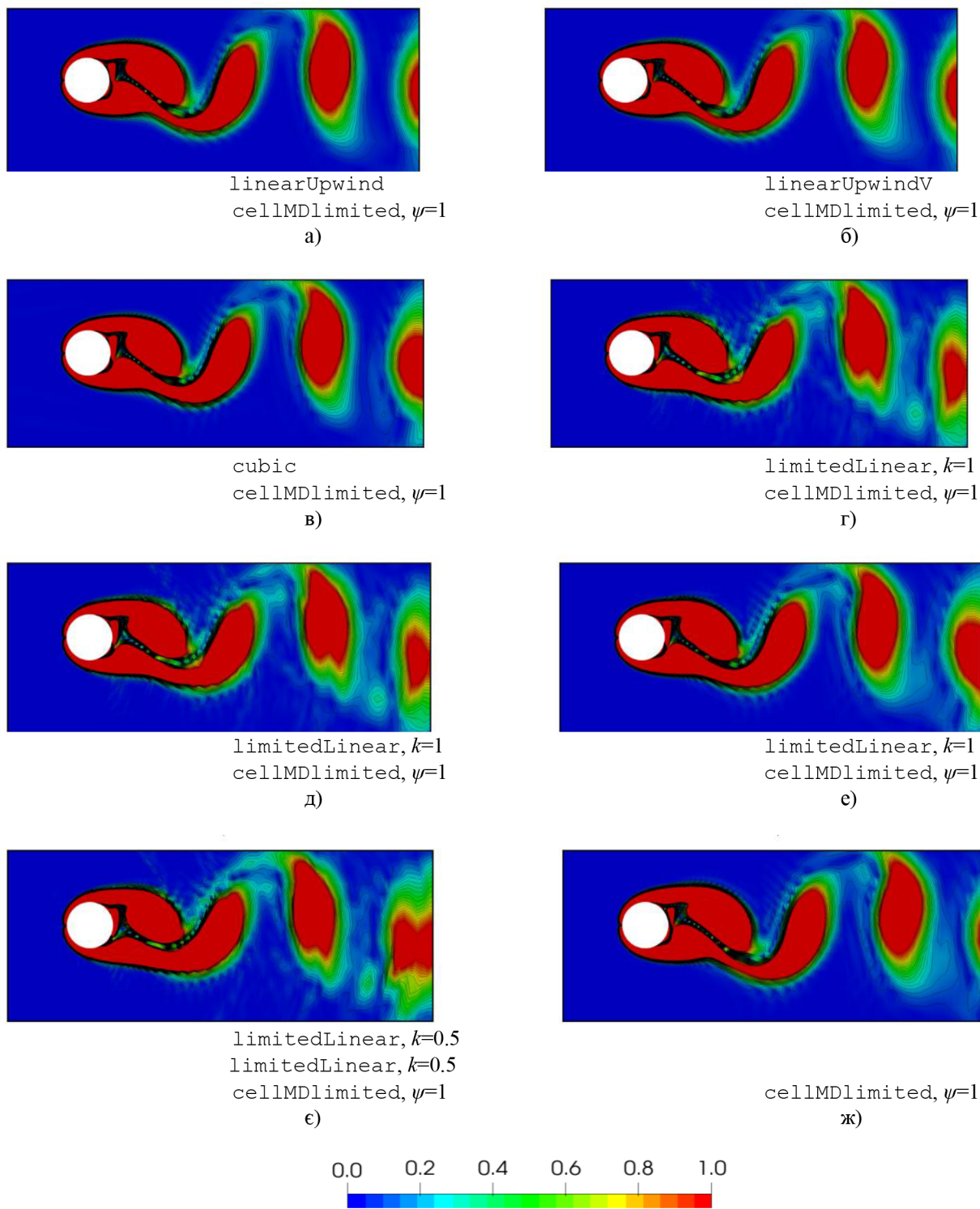


Рис. 3. Контури завихреності для схем `linearUpwind`, `cubic`, `limitedLinear`

в даному випадку призводить до спотворення форми вихорів та невірних обчислень аеродинамічних коефіцієнтів. Це свідчить про те, що для чисельного моделювання ламінарного обтікання кругового циліндра при малих числах Рейнольдса схеми MUSCLV та SuperBeeV є непридатними.

Висновки

Проведене дослідження показує, що вибір схеми апроксимації конвективних доданків суттєво впливає на точність моделювання утворення вихорів в OpenFOAM. Аналіз

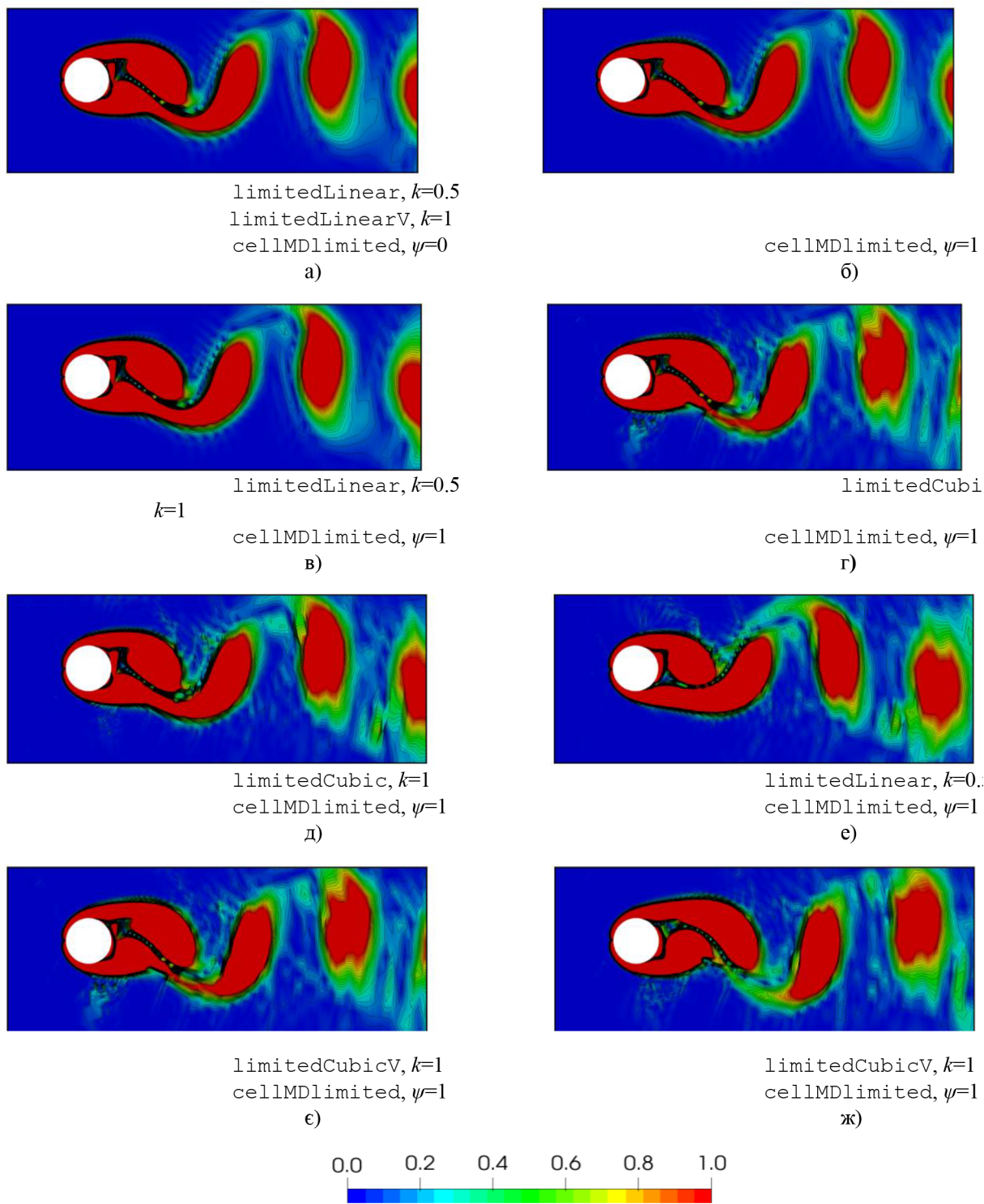


Рис. 4. Контури завихреності для схем limitedLinear, limitedCubic, limitedCubicV

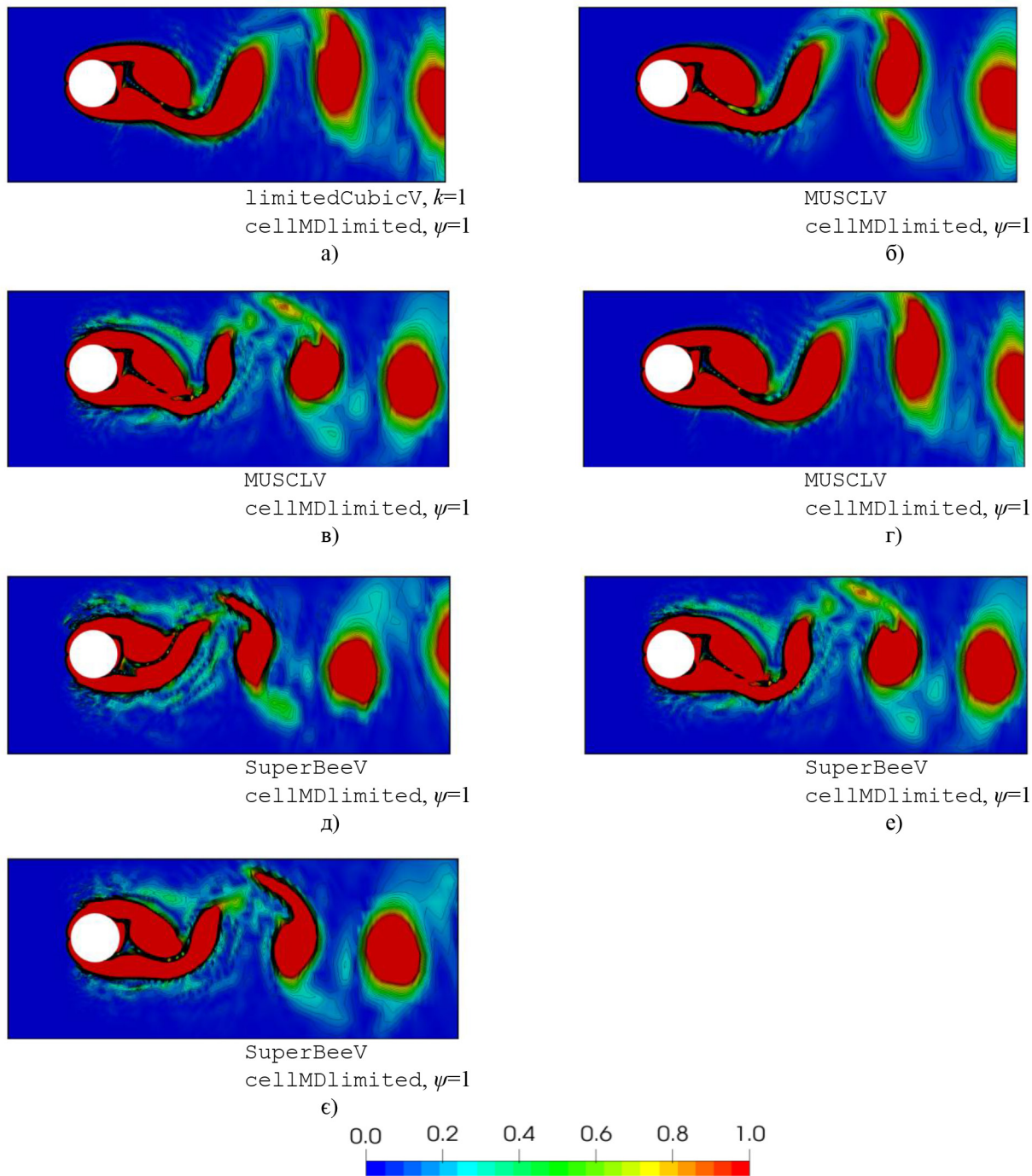


Рис. 5. Контури завихреності для схем MUSCLV, SuperBeeV

результатів показує, що коефіцієнти опору, підйомної сили та числа Струхалія, передбачені схемами MUSCLV та SuperBeeV, суттєво відрізняються від результатів експериментального та чисельного моделювання. Коефіцієнти опору, підйомної сили та числа Струхалія, отримані за допомогою схем limitedCubic та limitedLinear, нижчі за експериментальні та чисельні значення, що вказує на високу схемну в'язкість цих схем. Використання векторних обмежувачів потоку (схеми limitedCubicV та limitedLinearV) покращує результати чисельного моделювання. Вплив зміни k ($k = 0.5 \div 1$) у схемах limitedLinear незначний. Схеми апроксимації конвективних доданків linearUpwind та linearUpwindV передбачають подібні коефіцієнти опору, підйомної сили та числа Струхалія, що узгоджується з результатами експериментального та чисельного моделювання. Найкращі результати чисельного моделювання показують

схеми з обмежувачами потоку, що відповідають умові TVD без використання обмежувачів градієнтів. Плавні контурні лінії завихреності було отримано лише для схем `linearUpwind` та `linearUpwindV`. Інші схеми значно спотворюють контури завихреності. В результаті проведеного дослідження встановлено, що найбільш придатною схемою апроксимації конвективних доданків для чисельного моделювання вихрових течій в OpenFOAM є схема другого порядку проти потоку `linearUpwindV`.

Список використаної літератури

1. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab*. Switzerland : Springer International Publishing, 2016. 792 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16874-6>
2. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*. Longman House, Burnt Mill, Harlow Essex: Longman Scientific and Technical, 1995. 517 p.
3. *OpenFOAM v2506 C++ Source Code Guide*. URL: <https://api.openfoam.com/2506/> (access date: 22.01.2026)
4. Greenshields C., Weller H. *Notes on Computational Fluid Dynamics : General Principles*. Reading, UK: CFD Direct Ltd, 2022. 291 p. <https://books.google.com.ua/books?id=Ox0uzwEACAAJ>
5. Posdziech O., Grundmann R. A systematic approach to the numerical calculation of fundamental quantities of the two-dimensional flow over a circular cylinder. *Journal of Fluids and Structures*. 2007. Vol. 23. iss. 3. P. 479–499. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.09.004>
6. Norberg C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*. 2003. Vol. 17. № 1. P. 57–96. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(02\)00099-3](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(02)00099-3)
7. Ferziger J. H., Perić M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd ed. Berlin, Heilderberg, New York, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo: Springer, 2002. 442 с.
8. Çandır S. Investigation of numerical Schemes and their effects on impact pressures in numerical modelling : master's thesis : February 2022 / Middle East Technical University, 2022. 97 p.
9. Leakey S., Glennis V., Hewett C. Artificial compressibility with Riemann solvers: convergence of limiters on unstructured meshes. *OpenFOAM Journal*. 2022. T. 2. C. 31–47. DOI: <https://doi.org/10.51560/ofj.v2.49>
10. Liu Y., Hinrichsen O. CFD modeling of bubbling fluidized beds using OpenFOAM: Model validation and comparison of TVD differencing schemes. *Computers and Chemical Engineering*. 2014. Vol. 69. P. 75–88. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2014.07.002>
11. Qu L., Norberg C., Davidson L., Peng S. H., Wang F. Quantitative numerical analysis of flow past a circular cylinder at Reynolds number between 50 and 200. *Journal of Fluids and Structures*. 2013. Vol. 39. P. 347–370. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.02.007>
12. Choi J. I., Oberoi R. C., Edwards J. R., Rosati J. A. An immersed boundary method for complex incompressible flows. *Journal of Computational Physics*. 2007. Vol. 224. P. 757–784. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.10.032>
13. Liu C., Zheng X., Sung C. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *Journal of Computational Physics*. 1998. Vol. 139. iss. 1. P. 35–37. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5859>
14. *OpenFOAM® Documentation*. URL: <https://www.openfoam.com/documentation/overview> (access date: 22.01.2026)
15. Verma S. A large eddy simulation study of the effects of wind and slope on the structure of a turbulent line fire : Ph.D thesis. / Faculty of the Graduate School of the University of Maryland. University of Maryland, 2019. 210 p. URL: <https://drum.lib.umd.edu/items/02fc3fbd-daa5-4cf0-8ad4-292a9135ca05> (access date: 22.01.2026).

16. Greenshields C. OpenFOAM v12 User Guide. London : The OpenFOAM Foundation, 2024. URL: <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v12>. (access date: 22.01.2026).
17. Roshko A. On the development of turbulent of turbulent wake from vortex streets. *NACA-TR-1191*. Washington, D.C, 1954. URL: https://open.metu.edu.tr/bitstream/handle/11511/96268/Thesis_Revised_v1.pdf (access date: 22.01.2026).
18. Williamson C. H. K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*. 1989. Vol. 206. P. 579–627. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112089002429>

References

1. Moukalled, F., Mangani, L., & Darwish, M. (2016). *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab*. Switzerland : Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16874-6> [in English].
2. Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (1995). *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*. Longman House, Burnt Mill, Harlow Essex: Longman Scientific and Technical [in English].
3. *OpenFOAM v2506 C++ Source Code Guide*. Retrieved from <https://api.openfoam.com/2506/> [in English].
4. Greenshields, C., & Weller, H. (2022). *Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles*. Reading, UK: CFD Direct Ltd. <https://books.google.com.ua/books?id=Ox0uzwEACAAJ> [in English].
5. Posdziech, O., & Grundmann, R. (2007). A systematic approach to the numerical calculation of fundamental quantities of the two-dimensional flow over a circular cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, 23(3), 479–499. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.09.004> [in English].
6. Norberg, C. (2003). Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*, 17(1), 57–96. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(02\)00099-3](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(02)00099-3) [in English].
7. Ferziger, J. H., & Perić, M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Heilderberg, New York, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo : Springer. [in English].
8. Çandır, S. (2022). *Investigation of numerical Schemes and their effects on impact pressures in numerical modelling*. (Master's thesis). Middle East Technical University. Ankara. 97 p. URL: https://open.metu.edu.tr/bitstream/handle/11511/96268/Thesis_Revised_v1.pdf [in English].
9. Leakey, S., Glennis, V., & Hewett, C. (2022). Artificial compressibility with riemann solvers: convergence of limiters on unstructured meshes. *OpenFOAM Journal*, 2, 31–47. DOI: <https://doi.org/10.51560/ofj.v2.49> [in English].
10. Liu, Y., & Hinrichsen, O. (2014). CFD modeling of bubbling fluidized beds using OpenFOAM : Model validation and comparison of TVD differencing schemes. *Computers and Chemical Engineering*, 69, 75–88. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2014.07.002> [in English].
11. Qu, L., Norberg, C., Davidson, L., Peng, S.-H., & Wang, F. (2013). Quantitative numerical analysis of flow past a circular cylinder at Reynolds number between 50 and 200. *Journal of Fluids and Structures*, 39, 347–370. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.02.007> [in English].
12. Choi, J.-I., Oberoi, R., Edwards, J., & Rosati, J. (2007). An immersed boundary method for complex incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 224, 757–784. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.10.032> [in English].
13. Liu, C., Zheng, X., & Sung, C. (1998). Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 139(1), 35–37. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5859> [in English].

14. *OpenFOAM® Documentation*. Retrieved from <https://www.openfoam.com/documentation/overview> [in English].
15. Verma S. (2019). *A large eddy simulation study of the effects of wind and slope on the structure of a turbulent line fire*. (Ph.D thesis). Faculty of the Graduate School of the University of Maryland. Maryland. Retrieved from <https://drum.lib.umd.edu/items/02fc3fbd-daa5-4cf0-8ad4-292a9135ca05> [in English].
16. Greenshields C. (2024). *OpenFOAM v12 User Guide*. London : The OpenFOAM Foundation. Retrieved from URL: <https://doc.cfd.direct/openfoam/user-guide-v12> [in English].
17. Roshko, A. (1954). On the development of turbulent of turbulent wake from vortex streets. *NACA-TR-1191*. [in English].
18. Williamson, C. H. K. (1989). Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 206, 579–627. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112089002429> [in English].

Весков Євген Валерійович – аспірант кафедри автоматизації, електроніки та комунікації Навчально-наукового інституту інформаційних технологій та робототехніки Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка». E-mail: veskovev@ukr.net, ORCID: 0009-0007-5560-648X.

Довгий Станіслав Олексійович – академік НАН України, д.ф.-м.н., професор, завідувач відділу математичного моделювання Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України. E-mail: s.dovgii@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1078-0162.

Редчиць Дмитро Олександрович – д.ф.-м.н., професор, директор Інституту транспортних систем і технологій Національної академії наук України; провідний науковий співробітник Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України; професор кафедри математичного моделювання та системного аналізу Дніпровського державного технічного університету. E-mail: redchits_da@ua.fm, ORCID: 0000-0001-8538-6026.

Vieskov Yevhen Valeriiovych – Postgraduate Student at the Department of Automation, Electronics and Communications of the Educational and Research Institute of Information Technologies and Robotics of the National University “Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic”. E-mail: veskovev@ukr.net, ORCID: 0009-0007-5560-648X.

Dovgyi Stanislav Oleksiiiovych – Academician of the National Academy of Science of Ukraine, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Mathematical Modeling Department of Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: s.dovgii@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1078-0162.

Redchits Dmytro Oleksandrovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine; Leading Researcher of the Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine; Professor of the Department of Mathematical Modelling and System Analysis of the Dniprovsky State Technical University. E-mail: redchits_da@ua.fm, ORCID: 0000-0001-8538-6026.

Дата першого надходження статті до видання: 11.03.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 17.04.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 01.07.2026



Стаття поширюється на умовах ліцензії відкритого доступу (CC BY 4.0)