

К. Г. ДЕГТЯРЬОВ

Інститут енергетичних машин та систем ім. А. М. Підгорного НАН України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Д. В. КРЮТЧЕНКО, А. С. КОЛОДЯЖНИЙ

Інститут енергетичних машин та систем ім. А. М. Підгорного НАН України

Т. Г. ВІХТИНСЬКА

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

О. О. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут енергетичних машин та систем ім. А. М. Підгорного НАН України

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Харківський національний університет радіоелектроніки (ХНУРЕ)

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПЛЕСКАНЬ РІДИНИ В РЕЗЕРВУАРАХ ІЗ ПЛАВУЧОЮ КРИШКОЮ-ПЛАСТИНОЮ З ВІЛЬНИМ КРАЄМ

Мета дослідження полягає в розробленні числових методів дослідження динаміки та стійкості руху рідини в резервуарах за наявності плаваючого покриття. Дослідження динаміки та стійкості руху рідини в резервуарах з урахуванням явища плескань має важливе теоретичне та практичне значення для широкого кола галузей промисловості, зокрема авіаційно-космічної техніки, морського транспорту та систем наземного зберігання рідин (палива, нафти, технологічних і хімічних середовищ). Інтенсивність плескань може бути суттєво зменшена за рахунок використання демпфуючих пристроїв, таких як перегородки, кільцеві демпфери та еластичні покриття вільної поверхні. Водночас експериментальні дослідження ефективності демпферів є складними, коштовними та пов'язаними з підвищеними вимогами безпеки, особливо при роботі з токсичними або вибухонебезпечними середовищами. У зв'язку з цим зростає актуальність розроблення адекватних математичних моделей і ефективних числових методів для комп'ютерного моделювання процесів плескань рідини в резервуарах із покриттям вільної поверхні. В роботі використано метод розділення змінних та метод заданих нормальних форм. Розв'язано дві допоміжні задачі: про власні коливання покриття та коливання ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі без покриття. Плаваюче покриття розглянуто як кругова пластина з вільним краєм в рамках теорії Кірхгофа–Лява. Для розв'язання зв'язаної крайової задачі використано два набори базисних функцій, отриманих із розв'язків допоміжних задач. Основну увагу приділено фундаментальній формі плескань, що відповідає нахилу вільної поверхні та є найбільш небезпечною з точки зору резонансної взаємодії з конструкцією. Визначено власні частоти та форми коливань рідини за наявності пружного покриття. Побудовано повну зв'язану модель гідропружної взаємодії системи «рідина–покриття». Показано, що наявність плаваючого покриття суттєво змінює спектральні характеристики системи: власні частоти зменшуються порівняно з випадком вільної поверхні, що зумовлено ефектом приєднаних мас і впливом гравітації. Встановлено, що просторові форми коливань рідини визначаються формами коливань покриття.

Ключові слова: плескання рідини, циліндричні резервуари, демпфування, плаваючі покриття.

K. G. DEGTYAREV

A. Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the Ukrainian Academy of Sciences
V. N. Karazin Kharkiv National University

D. V. KRIUTCHENKO, A. S. KOLODYAZHNYI

A. Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the Ukrainian Academy of Sciences

T. G. VIKHTYNSKA

V. N. Karazin Kharkiv National University

O. O. STRELNIKOVA

A. Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the Ukrainian Academy of Sciences

V. N. Karazin Kharkiv National University

Kharkiv National University of Radio Electronics

MODELING OF LIQUID SLOSHING DYNAMICS IN TANKS WITH A FLOATING PLATE ROOF WITH A FREE EDGE

The aim of the study is to develop numerical methods for investigating the dynamics and stability of liquid motion in tanks in the presence of a floating cover. The study of the dynamics and stability of liquid motion in tanks, taking into account sloshing phenomena, is of significant theoretical and practical importance for a wide range of industries, including aerospace engineering, marine transport, and ground-based liquid storage systems (fuels, oil, technological and chemical media). The intensity of sloshing can be significantly reduced through the use of damping devices such as baffles, annular dampers, and elastic free-surface covers. At the same time, experimental investigations of damper efficiency are complex, costly, and associated with increased safety requirements, especially when dealing with toxic or explosive media. In this regard, the development of adequate mathematical models and efficient numerical methods for the computer simulation of liquid sloshing processes in tanks with free-surface covers is becoming increasingly important. In this work, the method of separation of variables and the method of prescribed normal modes are employed. Two auxiliary problems are solved: the eigenvalue problem for the cover and the problem of oscillations of an ideal incompressible liquid in a rigid cylindrical tank without a cover. The floating cover is modeled as a circular plate with a free edge within the framework of the Kirchhoff–Love plate theory. To solve the coupled boundary-value problem, two sets of basis functions obtained from the solutions of the auxiliary problems are used. Particular attention is paid to the fundamental sloshing mode corresponding to the inclination of the free surface, which is the most critical in terms of resonant interaction with the structure. The natural frequencies and mode shapes of the liquid in the presence of an elastic cover are determined. A complete coupled model of hydroelastic interaction of the “liquid–cover” system is developed. It is shown that the presence of a floating cover significantly alters the spectral characteristics of the system: the natural frequencies decrease compared to the case of a free surface due to the added-mass effect and the influence of gravity. It is established that the spatial mode shapes of the liquid are governed by the vibration modes of the cover.

Keywords: liquid sloshing, damping, floating covers, liquid oscillations in a covered tank.

Постановка проблеми

Оболонкові конструкції з відсіками, частково заповненими рідиною, мають широке застосування в різних галузях сучасної техніки, зокрема в аерокосмічній, нафтогазовій, енергетичній, хімічній і транспортній індустрії. До таких об'єктів належать паливні баки ракет-носіїв і літальних апаратів, резервуари морських і космічних систем, а також наземні ємності для зберігання води, нафти, зріджених газів та інших рідин. Подібні конструкції функціонують в умовах складних експлуатаційних навантажень, включаючи сейсмічні та вибухові впливи, і часто містять агресивні або легкозаймисті середовища. У резервуарах із частковим заповненням під дією інтенсивних зовнішніх збурень виникає явище плескання рідини, яке проявляється у вигляді низькочастотних коливань вільної поверхні. Це супроводжується появою значних локальних тисків на стінки конструкції, що може спричинити втрату стійкості, порушення динаміки руху літальних апаратів або навіть призвести до аварійних ситуацій, зокрема екологічних наслідків у разі руйнування резервуарів під час землетрусів або вибухів внаслідок терористичних актів. З огляду на зростаючі вимоги до безпеки експлуатації резервуарних систем та забезпечення їхньої стійкості за умов інтенсивних динамічних впливів, розроблення узагальнених математичних моделей, що адекватно описують вплив поверхневих покриттів на динамічну поведінку системи «рідина–резервуар», становить актуальну наукову й прикладну проблему.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Перші підходи до дослідження плескання ґрунтувалися на використанні механічних аналогій, у межах яких рідину моделювали системами типу «маса–пружина», параметри яких відтворювали динамічний вплив на конструкцію [1]. Однак для резервуарів складної геометрії отримання аналітичного розв'язку є суттєво ускладненим або неможливим, що зумовлює активне застосування числових методів [2]. Аналіз динаміки систем «оболонка–рідина» найчастіше здійснюється із застосуванням методу скінченних елементів [3]. Водночас, попри його універсальність, типові програмні реалізації не завжди адекватно враховують нелінійні ефекти коливань рідини скінченної амплітуди, вплив поверхневого натягу, а також гідропружну взаємодію з внутрішніми перегородками, покриттями вільної поверхні та деформівними стінками.

Повномасштабне тривимірне нелінійне моделювання з урахуванням цих чинників є обчислювально затратним і ускладнює контроль точності отриманих результатів, що стимулює розвиток альтернативних підходів. Серед сучасних числових методів, які застосовуються для дослідження міцності, вібрацій та плескання рідини, варто виділити метод R-функцій [4], підходи на основі сингулярних і гіперсингулярних інтегральних рівнянь [5; 6], метод граничних елементів [7], а також методи скінченних різниць [8] і скінченних об'ємів [9]. Для зменшення інтенсивності коливань і підвищення стійкості системи розроблено різноманітні пристрої, що демпфірують, зокрема кільцеві перегородки (жорсткі або пружні) [10], пластини різної форми, а також мембрани й покриття, що частково або повністю перекривають вільну поверхню рідини [11; 12]. Ефективний вибір і проектування таких елементів потребує глибокого розуміння динаміки взаємодії в системі «оболонка–рідина–покриття», що визначає актуальність даного дослідження.

Мета дослідження

Метою роботи є розроблення комп'ютерної технології для аналізу стійкості руху рідини в резервуарах із урахуванням впливу покриттів вільної поверхні, які застосовуються для зменшення амплітуди коливань рідини під дією періодичних зовнішніх навантажень.

Виклад основного матеріалу дослідження

Основні співвідношення. Як розрахункову модель розглянуто циліндричну оболонку, частково заповнену рідиною, в якій на вільній поверхні розміщене покриття. Передбачається, що це покриття є тонкою пружною пластиною з вільним краєм. Досліджується вплив такого покриття на власні частоти та форми коливань зв'язаної системи «резервуар–рідина–плавуча кришка». Нехай у жорсткій аксіально-симетричній оболонці з рівнем заповнення H на вільній поверхні рідини розташована плавуча кришка, рис. 1.

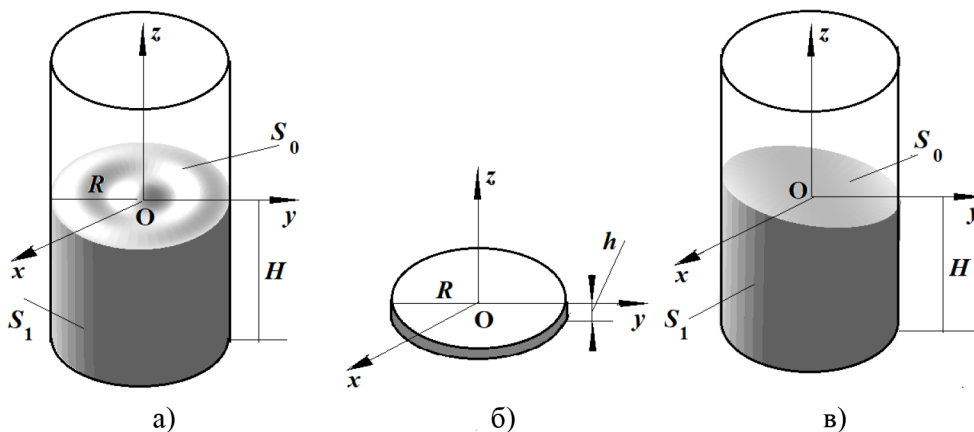


Рис. 1. Жорстка оболонка обертання з покриттям вільної поверхні

Рідину вважаємо нестисливою та нев'язкою, а її рух, зумовлений коливаннями стінок резервуара, розглядаємо як потенційний (безвихровий). Вплив в'язкості локалізується в тонких прикордонних шарах поблизу твердих стінок і вільної поверхні, тому її внесок у формування власних частот і форм коливань є незначним. Це дає підстави застосовувати модель потенційної течії як базову для аналізу в першому наближенні.

З метою аналізу впливу покриття сформульовано та розв'язано дві допоміжні задачі: визначення характеристик власних коливань плавучого покриття та моделювання коливань ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі без покриття. Розв'язки зазначених задач покладено в основу дослідження динаміки системи за наявності плавучого покриття вільної поверхні.

Власні частоти і форми коливань плавучого покриття

Плавуче покриття моделюється у вигляді круглої пластини з вільним краєм, в межах класичної теорії Кірхгофа–Лява. Нехай R – радіус пластини, h – її товщина (рис. 1, б). Механічні характеристики пластинки визначаються модулем Юнга E та коефіцієнтом Пуассона ν . Класичне диференціальне рівняння руху тонкої круглої пластини в циліндричних координатах має вигляд [13].

$$D\Delta\Delta w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, \theta, t), \tag{1}$$

де $w(r, \theta, t)$ – прогин пластини, ρ_p – густина матеріалу, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість, $q(r, \theta, t)$ – сила збудження. У випадку гармонічних коливань маємо

$$w(r, \theta, t) = G(r, \theta)e^{i\Omega t}.$$

Вводимо характеристичний параметр:

$$\lambda^4 = \frac{\rho_p h^2}{D}. \tag{2}$$

Згідно з [14]

$$G(r, \theta) = W_m(r) \cos(m\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Отже для кожного m отримаємо (індекс m оминаємо)

$$\Delta\Delta W - \lambda^4 W = 0, \quad \Delta W = W'' + \frac{1}{r}W' - \frac{m^2}{r^2}W. \tag{3}$$

Загальний регулярний у центрі розв’язок однорідного рівняння (3) має вигляд

$$W(r) = AJ_m(\lambda r) + BI_m(\lambda r). \tag{4}$$

Граничні умови для пластини з вільним краєм є такими:

$$M_r(R) = 0, \quad Q_r(R) = 0, \tag{5}$$

де M_r, Q_r – радіальний згинальний момент та поперечна сила Кірхгофа, які обчислюються за формулами

$$M_r = -D \left[W_{rr} + \nu \left(\frac{1}{R}W_r + \frac{1}{R^2}W_{\theta\theta} \right) \right], \quad Q_r = -D \left[\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 W) + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right].$$

Якщо форма коливань пластини $w = W(r) \cos(m\theta)e^{i\omega t}$, то

$$M_r = -D \left[(1-\nu)W'' + \nu \left(W'' + \frac{1}{r}W' - \frac{m^2}{r^2}W \right) \right] \cos(m\theta) \cdot e^{i\omega t}, \tag{6}$$

$$Q_r = -D \left[\frac{d}{dr} \left(W'' + \frac{1}{r}W' - \frac{m^2}{r^2}W \right) \frac{(1-\nu)m^2}{r^2} \left(\frac{W'}{r} - \frac{W}{r^2} \right) \right] \cos(m\theta) e^{i\omega t}. \tag{7}$$

Підставимо (4) в вирази (6)–(7), використаємо рівняння Бесселя для зображення других похідних

$$J_m''(x) = \frac{m^2}{x^2} J_m(x) - \frac{1}{x} J_m'(x) - J_m(x), \quad I_m''(x) = \frac{m^2}{x^2} I_m(x) - \frac{1}{x} I_m'(x) + I_m(x).$$

Одержимо систему для визначення сталих A, B :

$$A \left[{}^2 J_m'' + \nu \left(-\frac{J_m'}{a} \frac{m^2}{a^2} J_m \right) \right] + B \left[{}^2 I_m'' + \nu \left(-\frac{I_m'}{a} \frac{m^2}{a^2} I_m \right) \right] = 0,$$

$$A \left[\beta^3 J_m''' + \frac{2}{a} J_m'' - \frac{m^2}{a^2} J_m' - (1-\nu) \frac{m^2}{a^2} J_m \right] + B \left[\beta^3 I_m''' + \frac{2}{a} I_m'' - \frac{m^2}{a^2} I_m' - (-\nu) \frac{m^2}{a^2} I_m \right] = 0.$$

Отримуємо характеристичне рівняння для визначення ненульових сталих A та B в (4) у вигляді

$$(1-\nu) \lambda^2 [J_m(\lambda) I_{m-1}(\lambda) + I_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda)] - (1-\nu) [J_m(\lambda) I_{m+1}(\lambda) + I_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda)] - 2(1-\nu^2) \lambda J_m(\lambda) I_m(\lambda) = 0. \tag{8}$$

Після спрощення характеристичне рівняння приймає вигляд

$$(1-\nu) m^2 - \lambda^2 [J_m I_{m-1} + J_m I_{m+1} - I_m J_{m-1} + I_m J_{m+1}] + 2\lambda J_m I_m = 0. \tag{9}$$

Форма коливань будується як

$$W_{mk}(r, \theta) = \left[J_m \left(\lambda_{mk} \frac{r}{R} \right) + \alpha_{mk} I_m \left(\lambda_{mk} \frac{r}{R} \right) \right] \cos(m\theta), \quad \beta_{1k} = \lambda_{mk} R, \quad \alpha_{mk} = -\frac{M_J}{M_I}, \tag{10}$$

де

$$M_I(\lambda_{mk}) = (1-\nu) I_1''(\lambda_{mk}) + \nu \left(\frac{1}{\lambda} I_1'(\lambda_{mk}) - \frac{m^2}{\lambda^2} I_1(\lambda_{mk}) \right),$$

$$M_J(\lambda_{mk}) = (1-\nu) J_1(\lambda_{mk}) + \nu \left(\frac{1}{\lambda} J_1'(\lambda_{mk}) - \frac{m^2}{\lambda^2} J_1(\lambda_{mk}) \right).$$

Знаходимо для першої гармоніки

$$\alpha_1(\lambda_{1k}) = -\frac{(1-\nu)(J_0 - 3J_1 + J_2) + \nu(J_0 - J_2 - 2J_1)}{(1-\nu)(I_0 + 3I_1 + I_2) + \nu(I_0 + I_2 - 2I_1)}.$$

Нехай $\beta_{1k} = \lambda_k R$. За допомогою метода, запропонованого в [15], отримаємо ненульові корені характеристичного рівняння (9), які наведені в таблиці 1. Знайдемо власні частоти коливань пластинки, виготовленої з поліпропілену (PP), з такими параметрами: густина $\rho_p \approx 900 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E \approx 1.5 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu \approx 0.41$. Розміри пластинки є такими: радіус $R = 1 \text{ м}$, товщина $h = 0.01 \text{ м}$. Частоти коливань пластини обчислюються за формулами

$$\Omega_{1k} = \frac{\beta_{1k}^2}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_p h}}, \text{ рад/с, та } F_{1k} = \omega_{1k}/2\pi \text{ і наведені в таблиці 1.}$$

Таблиця 1

Частоти коливань круглої пластинки

k	β_{1k}	Ω_{1k} (рад/с)	F_{1k} (Гц)
1	1.598610251	10.44490	1.66260
2	4.732382299	91.54099	14.57090
3	7.867762178	252.87962	40.24580
4	11.00587534	495.02103	78.82320

Форми коливань побудуємо за формулами (8).

На рис. 2 зображені перші форми неаксіально-симетричних коливань круглої пластини за умови вільного краю при $\theta = 0$.

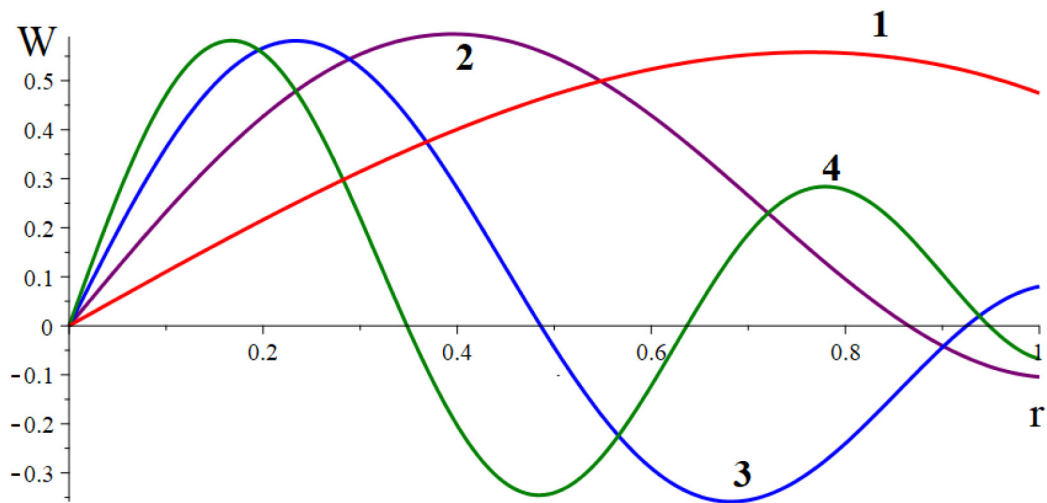


Рис. 2. Форми коливань круглої пластини за умови вільного краю

Цифри 1–4 зображують формам коливань, що відповідають $k = 1, 2 \dots 4$ у формулі (8). Зауважимо, що отримані форми ортогональні.

Аналіз коливань рідини в жорсткому резервуарі

Нехай Ω_f – обмежена область всередині резервуара, заповнена рідиною, S_0 – вільна поверхня рідини, S_1 – змочена поверхня резервуару, рис. 1. Вважаємо, що рух рідини – безвихровий, тому існує потенціал швидкості $\Phi(x, t)$, $x = (x, y, z)$, який в області $\Omega_f = \{0 \leq r \leq R, -H \leq z \leq 0\}$ задовольняє рівнянню Лапласа $\nabla^2 \Phi(x, t) = 0$. Для цього рівняння ставимо такі граничні умови

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \left. \frac{p - p_0}{\rho_l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - (g + a_v(t))\zeta + a_h(t)x \right|_{S_0} = 0.$$

Тут \mathbf{n} – одинична зовнішня нормаль до поверхні. p_0 – атмосферний тиск, p – тиск рідини, $a_v(t)$, $a_h(t)$ – прискорення сили, що змушує, в вертикальному та горизонтальному напрямках, $\zeta = \zeta(x, y, t)$ – невідома функція, яка описує зміну рівня вільної поверхні рідини з часом.

Таким чином, для знаходження невідомих функцій та сформульовано таку крайову задачу

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p - p_0|_{S_0} = 0. \tag{11}$$

Використовуючи метод розділення змінних [2], та припускаючи, що $\Phi(r, \theta, z, t) = \varphi(r, \theta, z) \cos(\omega t)$, здобудемо вираз для власних форм рідини

$$\varphi_{mn}(r, \theta, z) = A_{mn} J_m(k_{mn} r) \cos(m\theta) \cdot \cosh[k_{mn}(z + H)], \tag{12}$$

де J_m – функція Бесселя 1-го роду, $m = 0, 1, 2, \dots$ – хвильове число, $k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$, α_{mn} – корені рівняння $J'_n(\alpha_{mn}) = 0$. Ці корені а також частоти коливань вільної поверхні рідини знайдені з граничної умови на вільній поверхні: $\omega_{mn}^2 = g k_{mn} \tanh(k_{mn} H)$, $k_{mn} = \alpha_{mn} / R$ і наведені в табл. 2.

На рис. 3 зображені перші форми неаксіально-симетричних коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі при $\theta = 0$.

Таблиця 2

Частоти коливань вільної поверхні рідини $m = 1$

n	α_{1n}	ω_{1n} (рад/с)	f_{1n} (Гц)	A_{1n}
1	1.841183781	4.1443	0.65959	0.3454660483
2	5.331442774	7.2318	1.1510	0.2404043714
3	8.536316366	9.1510	1.4564	0.1919216306
4	11.70600490	10.716	1.7055	0.1643680830

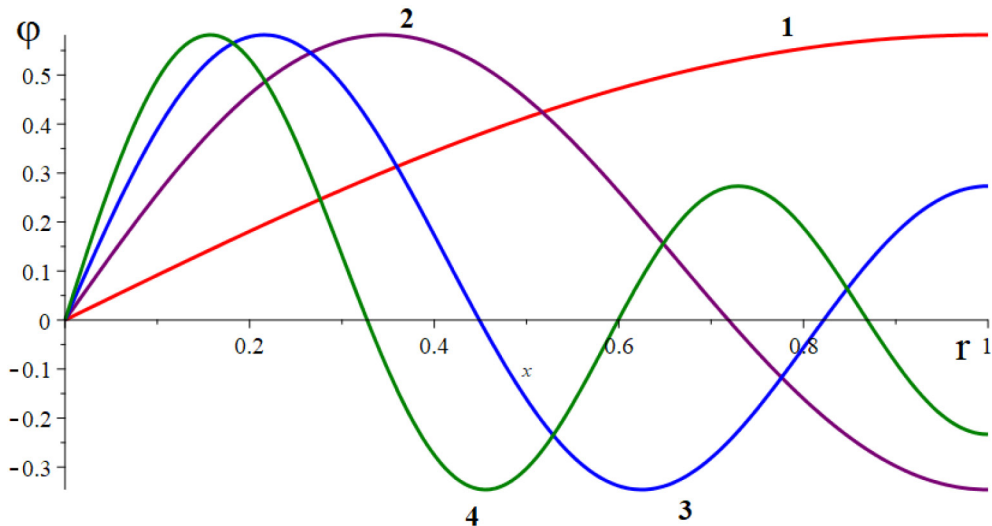


Рис. 3. Форми коливань рідини в жорсткому циліндричному резервуарі

Цифри 1–4 зображають формам коливань, що відповідають $n = 1, 2 \dots 4$ у формулі (12). Зауважимо, що ці форми є ортогональними і подібними до форм коливань пружної пластинки з вільним краєм.

Вивчається основна (sloshing) мода (нахил всієї поверхні); оскільки саме вона згідно з [2; 10] найнебезпечніша для баків (резонанс з рухом конструкції); наступні моди швидко зростають за частотою і менш енергоємні.

Коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружною кришкою

Розглядаються коливання ідеальної нестисливої рідини густини ρ_f що заповнює область

$$0 \leq r \leq R, \quad -H \leq z \leq 0.$$

Вільна поверхня рідини покрита тонкою круглою пружною пластинкою товщини h , з умовами вільного краю $r = R$. Коливання пластини та рідини вважаються малими, рух рідини – безвихровим.

В цьому випадку існує потенціал швидкостей $\Phi(x, t)$, який задовольняє рівнянню Лапласа з такими умовами на жорстких стінках

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0. \tag{13}$$

Тиск рідини з урахуванням гравітації знаходимо з рівняння Бернуллі у формі [2]

$$p = -\rho_f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta \right),$$

де $\zeta(r, \theta, t)$ – вертикальне зміщення поверхні рідини. У випадку наявності пружного покриття

$$\zeta = w(r, \theta, t). \tag{14}$$

На вільній поверхні виконується кінематична умова спряження

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{15}$$

Рівняння коливань пластинки за наявності покриття набуває вигляду

$$D\nabla^4 w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho_f \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} + gw \right). \tag{16}$$

Зауважимо, що доданок $\rho_f gw$ в (16) це гідростатичне навантаження, яке суттєво впливає на низькочастотні моди. Для розв’язання зв’язаної крайової задачі (13)–(16) використовуємо два набори базисних функцій, побудованих вище при дослідженні допоміжних задач.

Оскільки розглядається перша фундаментальна мода, то всі невідомі функції мають множник $\cos \theta$, тому застосовуємо такі зображення для прогину пластинки та потенціалу швидкостей

$$W(r, t) = \sum_{i=1}^{N_p} a_i(t) W_{1i}(r), \quad \varphi(r, z, t) = \sum_{j=1}^{N_f} b_j(t) J_1(\alpha_{1j} r) \cosh(\alpha_{1j}(z + H)), \tag{17}$$

де базисні функції для прогину обчислюються за формулами

$$W_{1j}(r) = \left[J_1 \left(\lambda_{1j} \frac{r}{R} \right) + \alpha_{1j} I_1 \left(\lambda_{1j} \frac{r}{R} \right) \right].$$

З кінематичної умови на $z = 0$ маємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(r, 0, t) = \dot{W}(r, t).$$

Тобто

$$\sum_{j=1}^{N_f} \alpha_{1j} b_j(t) J_1(\alpha_{1j} r) \sinh(\alpha_{1j}(H)) = \sum_{i=1}^{N_p} \dot{a}_i(t) W_i(r). \tag{18}$$

Знаходимо скалярний добуток (18) з $J_1(\alpha_{1k} r)$

$$\alpha_{1k} b_k(t) (J_1(\alpha_{1k} r), J_1(\alpha_{1k} r)) \sinh(\alpha_{1k}(H)) = \sum_{i=1}^{N_p} \dot{a}_i(t) (J_1(\alpha_{1k} r), W_i(r)).$$

З цього рівняння отримаємо

$$b_k(t) = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\dot{a}_i(t) (J_1(\alpha_{1k} r), W_i(r))}{\alpha_{1k} (J_1(\alpha_{1k} r), J_1(\alpha_{1k} r)) \sinh(\alpha_{1k} H)}.$$

Зауважимо, що у випадку умов закріплення пластинки у вигляді вільного краю маємо

$$b_k(t) = \dot{a}_1(t) (J_1(\alpha_{1k} r), W_k(r)) / (\alpha_{1k} (J_1(\alpha_{1k} r), J_1(\alpha_{1k} r)) \sinh(\alpha_{1k} H)) 1.$$

Далі розглядаємо гармонічні коливання, тобто припускаємо, що

$$a_k(t) = \exp(i\omega t) a_j, \quad b_k(t) = \exp(i\omega t) b_j.$$

Введемо позначення

$$q_k = \alpha_{1k} (J_1(\alpha_{1k} r), J_1(\alpha_{1k} r)) \sinh(\alpha_{1k}(H)), \quad Q_{ki} = (J_1(\alpha_{1k} r), W_i(r)).$$

Тоді

$$b_k = i\omega \frac{Q_{kk}}{q_k}.$$

Звідси

$$(r, 0) = i\omega \sum_{k=1}^{N_f} a_k \frac{J_1(\alpha_{1k}r) \cosh(\alpha_{1k}H) Q_{kk}}{q_k}, \quad W(r) = \sum_{i=1}^{N_p} a_i W_i(r). \quad (19)$$

Подаємо рівняння руху пластинки в формі

$$D\nabla^2 W - \rho_p h \omega^2 W + \rho_f g W = -\rho_f i \omega_{z=0}. \quad (20)$$

Підставимо розклади (19) в рівняння (20). Отримаємо

$$\sum_{i=1}^{N_p} a_i \beta_i^4 W_i(r) - \rho_p h \omega^2 \sum_{i=1}^{N_p} a_i W_i(r) + \rho_f g \sum_{i=1}^{N_p} a_i W_i(r) = \rho_f \omega^2 \sum_{k=1}^{N_f} a_k \frac{J_1(\alpha_{1k}r) \cosh(\alpha_{1k}H) Q_{kk}}{q_k}.$$

Знаходимо скалярний добуток отриманого рівняння на функцію $W_j(r)$

$$(D\beta_j^4 + \rho_f g) \delta_{ij} a_j - \omega^2 \left(\rho_p h \delta_{ij} a_j + \rho_f g \frac{(J_1(\alpha_{1j}r), W_j(r)) \cosh(\alpha_{1j}H) Q_{jj}}{q_j} a_j \right) = 0.$$

Звідси маємо

$$\omega_j^2 = \frac{(D\beta_j^4 + \rho_f g) \alpha_{1k} (J_1(\alpha_{1k}r), J_1(\alpha_{1k}r)) \tanh(\alpha_{1j}H)}{\rho_p h + \rho_f g (J_1(\alpha_{1j}r), W_j(r))^2}. \quad (21)$$

Зауважимо, що якщо $\rho_f = 0$, то переходимо до задачі на власні коливання сухої пластинки. В таблиці 3 зведені частоти коливань в зв'язаному та незв'язаному формулюваннях.

Таблиця 3

Частоти коливань вільної поверхні рідини, пластинки, рідини за наявності пластинки $n = 1$

n	f_{1n} (Гц)	F_{1k} (Гц)	ω_{1n} (Гц)
1	0.65959	1.66260	0.96725
2	1.1510	14.57090	5.12832
3	1.4564	40.24580	38.0892
4	1.7055	78.82320	76.9567

Показано, що наявність пружної плавучої кришки призводить до суттєвої взаємодії між коливаннями рідини та конструкції. У результаті нижні власні частоти системи набувають гібридного характеру, відбувається їх зміщення та розщеплення. Водночас вищі моди коливань пластинки залишаються практично незмінними.

Висновки

Досліджено коливання ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі за наявності плавучого пружного покриття, яке моделюється у вигляді тонкої круглої пластинки з вільним краєм. Отримано повну зв'язану модель гідропружної взаємодії системи «рідина–покриття». Показано, що наявність плавучого покриття принципово змінює спектральні властивості системи. Встановлено, що просторові форми коливань рідини визначаються формами коливань покриття. У результаті моди рідини втрачають незалежний характер і «підлаштовуються» під ортогональну систему власних форм пластинки. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні резервуарів для зберігання рідин з плавучими кришками, зокрема в енергетиці, нафтохімічній промисловості та системах сейсмічного захисту.

Список використаної літератури

1. Housner G. W. Dynamic behavior of water tanks. *Bulletin of Seismological Society of America*. 1963. Vol. 53(2). pp. 381-387. <https://doi.org/10.1785/BSSA0530020381>
2. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications. Cambridge : University Press. 2005. 972 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511536656>
3. Smetankina N., Merkulova A., Merkulov D., Misiura S., Misiura I. Modelling Thermal Stresses in Laminated Aircraft Elements of a Complex Form with Account of Heat Sources. *Proceedings International Conference on Reliable Systems Engineering ICoRSE'2022*, Bucharest, Romanian, 08-09 September 2022 / eds : Cioboată, D.D. Cham : Springer, 2023. Vol. 534 : *Lecture Notes in Computer Science*. P. 233–246. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22
4. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Аналіз методом двобічних наближень додатних аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для рівняння Гельмгольца з монотонною степеневою нелінійністю. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2025. Вип. 28. С. 81-92. DOI: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-28.81-92>
5. Gnitko V. I., Karaiev A. O., Degtyariv K. G., Vierushkin I. A., Strelnikova E. A. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. Vol. 134. pp. 67–79. DOI: <https://doi.org/10.2495/BE450061>
6. Strelnikova E., Choudhary N., Degtyariv K., Kriutchenko D., Vierushkin I. Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2024. Vol. 169. 105999. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105999>
7. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyarev K. Seismic Loads Influence Treatment on the Liquid Hydrocarbon Storage Tanks Made of Nanocomposite Materials. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. 2022. Vol. 17. pp. 62–70. DOI: <https://doi.org/10.37394/232011.2022.17.9>
8. Shvets A., Murawski K. & Fedorov Y. Analytical determination of critical forces during buckling of systems consisting of two pinned connected rods. *Meccanica*. 2025. Vol. 60. P. 441–455. <https://doi.org/10.1007/s11012-025-01941-3>
9. Rusanov A., Rusanov R., Klonowicz P., Lampart P., Żywica G., Borsukiewicz A. Development and Experimental Validation of Real Fluid Models for CFD Calculation of ORC and Steam Turbine Flows. *Materials (Basel)*. 2021. Vol. 14(22). P. 68-79. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14226879>
10. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Tonkonozhenko A. Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 25(3). pp. 117–132. DOI: <https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038>
11. Choudhary N., Bora S.N. and Strelnikova E. Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain, *J. Vib. Eng. Tech*. 2021. Vol. 9. pp. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1007/s42417-021-00314-w>
12. Liu J., Zang Q., Ye W., Lin G. (2020). High performance of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 114. P. 148–165, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.02.014>
13. Reddy J. N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. CRC Press. 2006. 568 p. <https://doi.org/10.1201/9780849384165>
14. Gnitko V., Martynenko O., Vierushkin I., Kononenko Y., Degtyarev, K. Coupled Finite and Boundary Element Methods in Fluid-Structure Interaction Problems for Power Machine Units. *Proceedings Advances in Mechanical and Power Engineering CAMPE'2021*, 18–21 October

2021 / eds : Altenbach H. *et al.* Cham : Springer, 2023. Lecture notes on mechanical engineering. C. 233–246. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22

15. Sheludko G., Ugrimov S. The localization method of extremum points for unimodal function. *Journal of Mechanical Engineering*. 2016. Vol. 19(1). P. 43–54. <https://doi.org/10.15407/jmach2016.01.044>

References

1. Housner, G. W. (1963). Dynamic behavior of water tanks. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 53(2), 381–387. DOI: <https://doi.org/10.1785/BSSA0530020381> [in English].
2. Ibrahim, R.A. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge : University Press. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511536656>. [in English].
3. Smetankina, N., Merkulova, A., Merkulov, D., Misiura, S., & Misiura, I. (2023). Modelling thermal stresses in laminated aircraft elements of a complex form with account of heat sources. In: Cioboată, D. D. (ed.), *Proceedings International Conference on Reliable Systems Engineering ICoRSE 2022*. 534, 233–246. Cham : Springer. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3-031-15944-2_22 [in English].
4. Parkhomenko, V. H., & Sydorov, M. V. (2025). Analiz metodom dvobichnykh nablyzhen dodatnykh aksialno-symetrychnykh rozviazkiv pershoi kraiovoi zadachi dlia rivniannia Helmholtza z monotonnoiu stepenevoiu neliniinistiu. [Analysis by the method of bilateral approximations of positive axially symmetric solutions of the first boundary value problem for the Helmholtz equation with monotone power nonlinearity]. *Matematychna ta kompiuterna modeliuвання. Seriya: Fyzyko-matematychni nauky*. 28, 81–92. DOI: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-28.81-92> [in Ukrainian].
5. Gnitko, V. I., Karaiev, A. O., Degtyariov, K. G., Vierushkin, I. A., & Strelnikova, E. A. (2022). Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 134, 67–79. DOI: <https://doi.org/10.2495/BE450061> [in English].
6. Strelnikova, E., Choudhary, N., Degtyariov, K., Kriutchenko, D., & Vierushkin, I. (2024). Boundary element method for hypersingular integral equations. *Implementation and applications in potential theory. Engineering Analysis with Boundary Elements*, 169, article 105999. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105999> [in English].
7. Sierikova, O., Strelnikova, E., & Degtyarev, K. (2022). Seismic loads influence treatment on the liquid hydrocarbon storage tanks made of nanocomposite materials. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 17, 62–70. DOI: <https://doi.org/10.37394/232011.2022.17.9> [in English].
8. Shvets, A., Murawski, K., & Fedorov, Y. (2025). Analytical determination of critical forces during buckling of systems consisting of two pinned connected rods. *Meccanica*, 60, 441–455. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-025-01941-3> [in English].
9. Rusanov, A., Rusanov, R., Klonowicz, P., Lampart, P., Żywica, G., & Borsukiewicz, A. (2021). Development and experimental validation of real fluid models for CFD calculation of ORC and steam turbine flows. *Materials (Basel)*, 14 (22), 68–79. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14226879> [in English].
10. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Tonkonozhenko, A. (2020). Liquid vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 25 (3), 117–132. DOI: <https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038> [in English].
11. Choudhary, N., Bora, S.N., & Strelnikova, E. (2021). Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain. *Journal of Vibration*

- Engineering & Technologies*, 9, 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1007/s42417-021-00314-w>. [in English]
12. Liu, J., Zang, Q., Ye, W., & Lin, G. (2020). High performance analysis of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 114, 148–165. DOI: <https://doi.org/10.1016/jenganabound.2020.02.014> [in English].
 13. Reddy, J.N. (2006). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Boca Raton: CRC Press. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165> [in English].
 14. Gnitko, V., Martynenko, O., Vierushkin, I., Kononenko, Y., & Degtyarev, K. (2023). Coupled finite and boundary element methods in fluid-structure interaction problems for power machine units. In: Altenbach, H. et al. (Eds.), *Proceedings Advances in Mechanical and Power Engineering CAMPE'2021*. Cham: Springer. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_29 [in English].
 15. Sheludko, G., & Ugrimov, S. (2016). The localization method of extremum points for unimodal function. *Journal of Mechanical Engineering*, 19 (1), 43–54. DOI: <https://doi.org/10.15407/pmach2016.01.044> [in English].

Дегтярьов Кирило Георгійович – к.т.н., старший науковий співробітник Інституту енергетичних машин і систем імені А. М. Підгорного НАН України, старший науковий співробітник кафедри комп’ютерної фізики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Крютченко Денис Володимирович – доктор філософії зі спеціальності «прикладна математика», науковий співробітник відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту енергетичних машин і систем імені А. М. Підгорного НАН України. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Колодяжний Андрій Сергійович – аспірант відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту енергетичних машин і систем імені А. М. Підгорного НАН України. E-mail: Task7@ukr.net; ORCID: 0000-0008-4026-6715.

Віхтинська Тетяна Геннадіївна – старший викладач кафедри комп’ютерної фізики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. E-mail: vikhtinskaya@karazin.ua, ORCID: 0000-0001-8285-4371.

Стрельнікова Олена Олександрівна – д.т.н., професор, провідний науковий співробітник відділу термоаеродинаміки енергетичних машин Інституту енергетичних машин і систем імені А. М. Підгорного НАН України; професор кафедри комп’ютерної фізики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна; професор кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки. E-mail: elena15@gmx.com; ORCID: 0000-0003-0707-7214.

Dehtiarov Kyrylo Heorhiiiovych – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher at the Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Senior Researcher at the Department of Computer Physics of V. N. Karazin Kharkiv National University. E-mail: kdegt89@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4486-2468.

Kriutchenko Denys Volodymyrovych – PhD “applied mathematics”, Researcher, Department of Thermoaerodynamics of Power Machines at the Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: wollydenis@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6804-6991.

Kolodyazhny Andriy Serhiyovych – Postgraduate Student at the Department of Thermo-Aerodynamics of Power Machines at the Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and

Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: 7ask7@ukr.net, ORCID: 0000-0008-4026-6715.

Vikhtynska Tetiana Hennadiivna – Senior Lecturer at the Department of Computer Physics of the V. N. Karazin Kharkiv National University. E-mail: vikhtinskaya@karazin.ua, ORCID: 0000-0001-8285-4371.

Strelnikova Olena Oleksandrivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Researcher of the Department of Thermo-Aerodynamics of Power Machines at the Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Professor of Applied Mathematics Chair of the Kharkiv National University of Radio Electronics. E-mail: elena15@gmx.com, ORCID: 0000-0003-0707-7214.

Дата першого надходження статті до видання: 30.03.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 06.05.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 01.07.2026



Стаття поширюється на умовах ліцензії
відкритого доступу (CC BY 4.0)