УДК 519.87

Н. В. ЛЕМЕШЕВА, Н. М. ЧЕРНОВОЛ
Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба

ПЛОЩЕВА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ МОДЕЛІ КОНФЛІКТНОЇ СИТУАЦІЇ ЗІ ЗБІЛЬШЕННЯМ ПЛОЩ ПЛАЦДАРМІВ ДВОХ ПРОТИБОРЧИХ СТОРІН

Дане дослідження присвячене застосуванню систем диференціальних рівнянь для моделювання бойових дій за певних умов. У статті розглядається математична модель протистояння між двома ворогуючими сторонами, зосереджена на площевій моделі бойових операцій з урахуванням відносного приросту площ сторін порівняно з початковими розмірами плацдармів за одиницю часу, що ґрунтується на системі нелінійних диференціальних рівнянь. Автори досліджують динаміку розвитку конфлікту, який розгортається на обмеженій, проте непостійній території, де вирішальну роль відіграє поступове розширення контрольованої площі однією або обома сторонами водночас. Площева модель враховує ймовірність ураження цілей, бойові характеристики сторін та динаміку трансформації площ плацдармів у часі. Отримано систему рівнянь, що описують зміну відносних площ неушкоджених частин плацдармів сторін у певний момент часу під час ведення бойових дій. Проведено аналітичне перетворення системи рівнянь для випадку розширення площі плацдарму однією стороною, зокрема шляхом редукції до рівняння Ріккаті та Бернуллі. При розв'язанні рівняння Бернуллі використано наступну методику: первісну подано як певний інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування. У ході подальших обчислень інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування трансформовано у функцію Лапласа, що дозволило отримати явний запис розв'язків задачі Коші. Запропоновано чисельне розв'язання методом Рунге-Кутти четвертого порядку для загального випадку, коли обидві сторони конфлікту нарощують площу плацдармів на певну величину відносно початкової площі за одиницю часу, яке реалізоване програмуванням мовою Python. Наведено приклад чисельних розрахунків за допомогою створеного програмного забезпечення для загального випадку. Приклад демонструє, що навіть за умови, якщо у однієї сторони відносний збиток за одиницю часу більший ніж у іншої сторони, то перевагу в бою можна здобути завдяки більшій частці розширення площі. Результати дослідження придатні для конструювання моделей бойових ситуацій, оцінювання ефективності обраних стратегій та оптимізації використання ресурсів у зонах конфлікту.

Ключові слова: *площева модель, ймовірність досягнення цілі, конфліктна ситуація, площа руйнувань, середній відносний збиток, скорострільність засобів, система диференціальних рівнянь, відносні площі плацдармів.*

N. V. LEMESHEVA, N. M. CHERNOVOL
Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University

AREAL INTERPRETATION OF THE CONFLICT SITUATION MODEL WITH TWO OPPOSING SIDES' STRATEGIC POSITIONS AREAS INCREASE

This study is devoted to the application of differential equation systems for modeling combat operations under certain conditions. The article considers a mathematical model of confrontation between two hostile parties, focusing on an area model of combat operations, taking into account the relative increase in the areas of the parties compared to the initial sizes of the bridgeheads per unit of time, based on a system of nonlinear differential equations. The authors study the dynamics of the development of a conflict unfolding in a limited but unstable territory, where the gradual expansion of the controlled area by one or both sides at the same time plays a decisive role. The area model takes into account the probability of hitting targets, the combat characteristics of the sides, and the dynamics of the transformation of bridgehead areas over time. A system of equations was obtained that describes the change in the relative areas of the intact parts of the parties' bridgeheads at a given moment in time during combat operations. An analytical transformation of the system of equations was performed for the case of expansion of the bridgehead area by one side, in particular by reduction to the Riccati and Bernoulli equations. The following method was used to solve the Bernoulli equation: the initial value was presented as a definite integral with a variable upper limit of integration. In the course of further calculations, the integral with a variable upper limit of integration was transformed into a Laplace function, which made it possible to obtain an explicit representation of the solutions to the Cauchy problem. A numerical solution using the fourth-order Runge-Kutta method is proposed for the general case when both sides of the conflict increase the area of their strongholds by a certain amount relative to the initial area per unit of time, which is implemented by programming in Python. An example of numerical calculations using the created software for the general case is given. The example demonstrates that even if one side's relative damage per unit of time is greater than that of the other side, an advantage in battle can be gained by expanding the area to a greater extent. The results of the study are suitable for constructing models of combat situations, evaluating the effectiveness of selected strategies, and optimizing the use of resources in conflict zones.

Keywords: *area model, probability of achieving a goal, conflict situation, area of destruction, average relative damage, rate of fire, system of differential equations, relative areas of strongholds.*

Постановка проблеми

У сучасних умовах зростаючої складності збройних конфліктів виникає потреба в адекватному математичному моделюванні бойових дій для оцінки ефективності стратегій, прогнозування втрат та оптимізації розподілу ресурсів. Традиційні моделі часто не враховують динамічну зміну бойових характеристик, щільності розміщення засобів та впливу просторових факторів на результат протистояння. Відсутність точних аналітичних розв'язків для складних систем, таких як рівняння Ріккаті, ускладнює практичне застосування таких моделей. Тому актуальним є розроблення інтерактивної моделі конфліктної ситуації, яка враховує просторово-часову еволюцію бойових одиниць, їхню взаємодію та середні втрати, а також дозволяє застосовувати чисельні методи для розв'язання системи диференціальних рівнянь, що описують динаміку бойових дій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У сучасних наукових та інженерних дослідженнях системи диференціальних рівнянь виступають фундаментальним математичним апаратом для формалізації, аналізу та розв'язання широкого спектра прикладних задач, пов'язаних із динамічними системами та процесами, що змінюються в часі та просторі. Особливо важливим є застосування систем диференціальних рівнянь для побудови математичних моделей прикладних задач, де використання аналітичних і чисельних методів сприяє глибшому розумінню поведінки систем і дозволяє одержувати якісні й кількісні прогнози. Відомі моделі бойових дій, що описуються системами диференціальних рівнянь розглянуті в роботах [1–3]. Автори в своїх дослідженнях [4; 5] теж використовують системи диференціальних рівнянь для аналізу вибору тактики бою в площевому моделюванні. В роботі [4] розглядається задача, що є продовженням досліджень [6; 7] на випадок, коли сторони протистояння розширюють площі плацдармів на деяку частку від уцілілої площі в момент часу *t*. Дана робота теж є продовженням робіт [6; 7], але на інший випадок розширення площі, що зазначено в постановці задачі.

Мета дослідження

Метою даного дослідження є побудова та аналіз математичної моделі конфліктної ситуації, яка дозволяє описати динаміку взаємодії двох протиборчих сторін у просторі та часі, а також залежність інтенсивності втрат від розміру контрольованої території. Дослідження спрямоване на формалізацію процесів ураження та збереження ресурсів, врахування ймовірнісних характеристик бойових засобів і просторових параметрів плацдармів. Особлива увага приділяється виведенню системи диференціальних рівнянь, її аналітичному та чисельному розв'язанню, що дає змогу оцінити середні втрати сторін, визначити закономірності розвитку конфлікту та створити основу для подальшого застосування моделі у прогнозуванні та оптимізації стратегій ведення бойових дій.

Виклад основного матеріалу дослідження

Розглянемо площеву інтерпретацію моделі конфліктної ситуації, в якій бій між двома протиборчими сторонами, назвемо їх умовно сторона А та сторона В, відбувається в певних умовах, тобто маємо наступні вихідні параметри моделі конфліктної ситуації:

• сторони мають різнорідні бойові одиниці;

• чисельність бойових одиниць: сторони A – m однорідних бойових одиниць, сторони B – n однорідних бойових одиниць;

• початкові площі плацдармів (площі розміщення бойових одиниць): сторони А – S_1 ум.од.^{2}, сторони В – S_1 ум.од.^{2};

• швидкісні характеристики засобів (скорострільності): сторони А – λ_1 пострілів за одиницю часу, сторони В – λ_2 пострілів за одиницю часу;

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-20 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

• ймовірності ураження цілі (ймовірність досягнення цілі при кожному пострілі): сторони А – p_1, сторони В – p_2;

• площі руйнувань, достатні для ураження засобів, що на них знаходяться, зроблені бойовою одиницею: сторони А – S_{11} ум.од.^{2}, сторони В – S_{22} ум.од.^{2};

• швидкість розширення площі плацдармів (площа, на яку розширюється початкова площа в одиницю часу): сторони А – D_1 ум.од.^{2}, сторони В – D_2 ум.од.^{2}.

Використовуючи вихідні дані можна обчислити середні відносні збитки за одиницю часу, що наносяться на початку бою стороною А по плацдарму сторони В і навпаки: $\mu_1 = \frac{1}{S_2}\lambda_1 p_1 S_{11} m$, $\mu_2 = \frac{1}{S_1}\lambda_2 p_2 S_{22} n$.

Позначимо через $y_1(t)$ та y_2 середні частки площ, на яких розташовуються частини засобів обох сторін конфлікту, що збереглись неушкодженими на момент часу t після обміну ударами.

Також, введемо позначення $k_1 = D_1/S_1$ та $k_2 = D_2/S_2$ – це відносне збільшення площ сторін по відношенню до початкових площ плацдармів за одиницю часу, тобто на які частки збільшуються площі обох сторін в одиницю часу порівняно з S_1 та S_2 відповідно.

З міркувань аналогічних тим, що були проведені в роботі [6] отримаємо вирази для приростів (змін) середніх часток площ плацдармів:

$$\begin{cases} \Delta y_1(t) = -\mu_2 y_1(t) y_2(t)\Delta t + k_1\Delta t, \\ \Delta y_2(t) = -\mu_1 y_2(t) y_1(t)\Delta t + k_2\Delta t. \end{cases}$$

Тоді бойові дії в зазначених вище умовах описуються системою диференціальних рівнянь, що відображають зміну часток площ плацдармів, які збереглися неушкодженими на момент часу t:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\mu_2 y_1(t) y_2(t) + k_1, \\ y_2'(t) = -\mu_1 y_2(t) y_1(t) + k_2, \end{cases} \tag{1}$$

враховуючи той факт, що в початковий момент часу 100 % площ плацдармів неушкоджені, тобто $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$.

Далі наведемо розв'язання поставленої задачі.

Виразимо з першого рівняння системи (1) добуток $y_1(t)y_2(t)$ і підставимо отриманий вираз в друге рівняння системи (1):

$$\begin{cases} y_1(t) y_2(t) = \dfrac{k_1 - y_1'(t)}{\mu_2}, \\ y_2'(t) = -\dfrac{\mu_1 k_1}{\mu_2} + k_2 + \dfrac{\mu_1}{\mu_2} y_1'(t). \end{cases} \tag{2}$$

Проінтегруємо обидві частини другого рівняння системи (2):

$$\int y_2'(t)dt = \int\left(-\frac{\mu_1 k_1}{\mu_2} + k_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} y_1'(t)\right)dt.$$

Звідки $y_2(t) = \left(-\frac{\mu_1 k_1}{\mu_2} + k_2\right)t + \frac{\mu_1}{\mu_2} y_1(t) + C_1$, де C_1 – довільна стала.

Використовуючи початкові умови, знайдемо невідому сталу C_1:

$$1 = \left(-\frac{\mu_1 k_1}{\mu_2} + k_2\right)\cdot 0 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot 1 + C_1, \quad C_1 = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Таким чином,

$$y_2(t) = \left(-\frac{\mu_1 k_1}{\mu_2} + k_2\right)t + \frac{\mu_1}{\mu_2} y_1(t) + 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{3}$$

Підставивши вираз для $y_2(t)$ в перше рівняння системи (2), отримаємо:

$$y_1'(t) = -\mu_1 y_1^2(t) + y_1(t)\left(\mu_1 k_1 t - k_2\mu_2 t - \mu_2 + \mu_1\right) + k_1. \tag{4}$$

Як можна бачити, останнє рівняння – це рівняння Ріккаті, яке у загальному випадку не розв'язується у квадратурах.

Тому далі розглянемо частинний випадок цього рівняння, а саме якщо $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$. Тоді отримуємо диференціальне рівняння Бернуллі

$$y_1'(t) + \left(k_2\mu_2 t + \mu_2 - \mu_1\right) y_1(t) = -\mu_1 y_1^2(t). \tag{5}$$

Одним з розв'язків цього рівняння є функція $y_1 \equiv 0$, але вона не задовольняє початкову умову $y_1(0) = 1$, отже ця функція не є розв'язком розглянутої задачі Коші. Тому далі враховуємо, що $y_1(t) \not\equiv 0$.

Розв'язання рівняння (5) проведемо методом підстановки, що передбачає представлення шуканої функції як добутку двох інших функцій, а саме $y_1(t) = u(t) \cdot v(t)$:

$$u'(t)v(t) + u(t)v'(t) + (k_2\mu_2 t + \mu_2 - \mu_1)u(t)v(t) = -\mu_1 u^2(t)v^2(t).$$

Тоді розв'язання наступне:

1) $v'(t) = -(k_2\mu_2 t + \mu_2 - \mu_1)v(t)$;

$$\int \frac{dv(t)}{v(t)} = \int -\left(k_2\mu_2 t + \mu_2 - \mu_1\right)dt;$$

$$\ln|v(t)| = -\frac{k_2\mu_2 t^2}{2} - \left(\mu_2 - \mu_1\right)t;$$

$$v(t) = e^{-\frac{k_2\mu_2 t^2}{2} - (\mu_2 - \mu_1)t}.$$

2) $u'(t) = -\mu_1 u^2(t)v(t)$;

$$\int \frac{du(t)}{u^2(t)} = -\mu_1 \int e^{-\frac{k_2\mu_2 t^2}{2} - (\mu_2 - \mu_1)t} dt;$$

$$-\frac{1}{u(t)} = -\mu_1 \cdot e^{\frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{2k_2\mu_2}} \int e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t + \mu_2 - \mu_1)^2} dt.$$

Множину первісних в правій частині останньої рівності можна записати як інтеграл зі змінною верхньою межею інтегрування наступним чином:

$$-\frac{1}{u(t)} = -\mu_1 \cdot e^{\frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{2k_2\mu_2}} \left(\int_{\frac{\mu_1 - \mu_2}{k_2\mu_2}}^{t} e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 z + \mu_2 - \mu_1)^2} dz + C_2 \right),$$

де C_2 – довільна стала. Звідси $u(t) = \dfrac{1}{\mu_1 \cdot e^{\frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{2k_2\mu_2}} \left(\int_{\frac{\mu_1 - \mu_2}{k_2\mu_2}}^{t} e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 z + \mu_2 - \mu_1)^2} dz + C_2 \right)}$.

Остаточно вираз для $y_1(t) = u(t) \cdot v(t)$ буде мати вигляд:

$$y_1(t)=\frac{e^{-\frac{k_2\mu_2 t^2}{2}-(\mu_2-\mu_1)t}}{\mu_1\cdot e^{\frac{(\mu_2-\mu_1)^2}{2k_2\mu_2}}\left(\int\limits_{\frac{\mu_1-\mu_2}{k_2\mu_2}}^{t} e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 z+\mu_2-\mu_1)^2}dz+C_2\right)}=$$

$$=\frac{e^{\frac{(\mu_2-\mu_1)^2}{2k_2\mu_2}}\cdot e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t+\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1\cdot e^{\frac{(\mu_2-\mu_1)^2}{2k_2\mu_2}}\left(\int\limits_{\frac{\mu_1-\mu_2}{k_2\mu_2}}^{t} e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 z+\mu_2-\mu_1)^2}dz+C_2\right)}=\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t+\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1\left(\int\limits_{\frac{\mu_1-\mu_2}{k_2\mu_2}}^{t} e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 z+\mu_2-\mu_1)^2}dz+C_2\right)}.$$

Інтеграл $\int\limits_{\frac{\mu_1-\mu_2}{k_2\mu_2}}^{t} e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 z+\mu_2-\mu_1)^2}dz$ заміною $p=\sqrt{k_2\mu_2}z+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}$ можна звести до функції Лапласа:

$$\int\limits_{\frac{\mu_1-\mu_2}{k_2\mu_2}}^{t} e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 z+\mu_2-\mu_1)^2}dz=\left|\begin{array}{l} p=\sqrt{k_2\mu_2}z+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}} \\ z=\frac{p}{\sqrt{k_2\mu_2}}-\frac{\mu_2-\mu_1}{k_2\mu_2} \\ dz=\frac{dp}{\sqrt{k_2\mu_2}} \\ z=\frac{\mu_1-\mu_2}{k_2\mu_2}\to p=0 \\ z=t\to p=\sqrt{k_2\mu_2}t+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}} \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\int\limits_{0}^{\sqrt{k_2\mu_2}t+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}} e^{-\frac{p^2}{2}}dp.$$

Таким чином,

$$y_1(t)=\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t+\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1\left(\frac{1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\int\limits_{0}^{\sqrt{k_2\mu_2}t+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}} e^{-\frac{p^2}{2}}dp+C_2\right)}=\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t+\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_2\mu_2}}\Phi\left(\sqrt{k_2\mu_2}t+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)+C_2\right)}.$$

Тепер знайдемо сталу C_2: $y_1(0)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_2\mu_2}}\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)+C_2\right)}=1,$ звідки

$$C_2=\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1}-\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_2\mu_2}}\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right).$$

Маємо вираз для середньої частки площі сторони *A*, що зберіглась неушкодженою на момент часу *t*:

$$y_1(t)=\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t+\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_2\mu_2}}\left[\Phi\left(\sqrt{k_2\mu_2}\,t+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)\right]+\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1}\right)}.$$

Повернемось до рівняння (3) та запишемо вираз для $y_2(t)$:

$$y_2(t)=k_2t+\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t+\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_2\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_2\mu_2}}\left[\Phi\left(\sqrt{k_2\mu_2}\,t+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)\right]+\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1}\right)}+1-\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Таким чином, при $k_1=0$, $k_2\neq 0$ система (1) має розв'язок (вирази для середніх часток площ, на яких розташовуються частини засобів обох сторін конфлікту, що збереглись неушкодженими на момент часу t після обміну ударами):

$$\begin{cases} y_1(t)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t+\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_2\mu_2}}\left[\Phi\left(\sqrt{k_2\mu_2}\,t+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)\right]+\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1}\right)}, \\ y_2(t)=k_2t+\dfrac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(k_2\mu_2 t+\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_2\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_2\mu_2}}\left[\Phi\left(\sqrt{k_2\mu_2}\,t+\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\sqrt{k_2\mu_2}}\right)\right]+\frac{e^{-\frac{1}{2k_2\mu_2}(\mu_2-\mu_1)^2}}{\mu_1}\right)}+1-\dfrac{\mu_1}{\mu_2}. \end{cases}$$

Проаналізувавши поведінку функцій $y_1(t)$ та $y_2(t)$ при $t\to+\infty$, отримаємо: $y_1(t)\underset{t\to+\infty}{\to}0$, а $y_2(t)\underset{t\to+\infty}{\to}+\infty$. При цьому сторона A зменшує свою територію під час бою в той час як сторона B поступово (з певного моменту часу) розширює площу свого плацдарму і переміщує бойові одиниці. Тому стверджуємо, що в даному випадку переможе сторона B і за допомогою отриманої системи розв'язку можна визначити момент часу, починаючи з якого вже не доцільно вести бій стороні B.

Легко бачити, що система (1) симетрична відносно одночасного обміну: змінних $y_1(t)\leftrightarrow y_2(t)$ та відповідних параметрів $\mu_1\leftrightarrow\mu_2$ і $k_1\leftrightarrow k_2$. Це дає змогу одразу записати розв'язок системи (1) для наступного частинного випадка, коли $k_1\neq 0$, $k_2=0$:

$$\begin{cases} y_1(t)=k_1t+\dfrac{e^{-\frac{1}{2k_1\mu_1}(k_1\mu_1 t+\mu_1-\mu_2)^2}}{\mu_1\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_1\mu_1}}\left[\Phi\left(\sqrt{k_1\mu_1}\,t+\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{k_1\mu_1}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{k_1\mu_1}}\right)\right]+\frac{e^{-\frac{1}{2k_1\mu_1}(\mu_1-\mu_2)^2}}{\mu_2}\right)}+1-\dfrac{\mu_2}{\mu_1}, \\ y_2(t)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2k_1\mu_1}(k_1\mu_1 t+\mu_1-\mu_2)^2}}{\mu_2\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{k_1\mu_1}}\left[\Phi\left(\sqrt{k_1\mu_1}\,t+\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{k_1\mu_1}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{k_1\mu_1}}\right)\right]+\frac{e^{-\frac{1}{2k_1\mu_1}(\mu_1-\mu_2)^2}}{\mu_2}\right)}. \end{cases}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-20 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

Отриманий результат повністю протилежний попередньому, де $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$. Наразі ми спостерігаємо, що сторона А збільшує свою територію з певного моменту часу, а сторона В поступово її зовсім втрачає, і значить перемога буде за стороною А.

Тепер повернемось до загального випадку, тобто якщо $k_1 \neq 0$ та $k_2 \neq 0$. Як вже зазначалось вище рівняння (4) не розв'язується у квадратурах, якщо не відомий його частинний розв'язок. Але відомо, що рівняння Ріккаті також можна звести до лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку за допомогою спеціальної підстановки, розв'язок якого в свою чергу виражається через інтеграли або спеціальні функції. Наприклад, його можна звести до рівняння Вебера-Ерміта, розв'язок якого виражається через функції параболічного циліндра. Нажаль, це все однаково не дає аналітичного розв'язку. Тому надалі розглядаються чисельні розв'язки системи (1) із застосуванням чисельного методу Рунге-Кутти 4-го порядку за допомогою мови програмування Python.

Далі наведемо реалізацію цього методу у вигляді програми (рис. 1) та продемонструємо її роботу на прикладі (рис. 2).

```
import math
m,n = map(int,input('m=,n= ').split(','))
S1,S2 = map(float,input('S1=,S2= ').split(','))
λ1,λ2,p1,p2 = map(float,input('λ1=,λ2=,p1=,p2= ').split(','))
S11,S22,D1,D2 = map(float,input('S11=,S22=,D1=,D2= ').split(','))
Δt,b = map(float,input('Δt=,b= ').split(','))
t=0
y1=1
y2=1
μ1=(λ1*p1*S11*m)/S2
μ2=(λ2*p2*S22*n)/S1
K1=D1/S1
K2=D2/S2
print('μ1=',round(μ1,  3), ' μ2=',round(μ2,  3))
print('K1=', round(K1, 3), ' K2=', round(K2, 3))
print('t=', round(t,  3), '   y1=', round(y1, 3), '     y2=', round(y2, 3))
while t<b:
    l1=-μ1*y1*y1-y1*(-μ1*K1*t+μ2*K2*t+μ2-μ1)+K1
    l2 = -μ1 * (y1+(Δt/2)*l1) * (y1+(Δt/2)*l1) - (y1+(Δt/2)*l1) * (-μ1 * K1 * (t+(Δt/2)) +
                                                                  μ2 * K2 *(t+(Δt/2))+μ2 - μ1) + K1
    l3 = (-μ1 * (y1+(Δt/ 2) * l2) *(y1 + (Δt / 2) * l2) - (y1 + (Δt / 2) * l2) *
          (-μ1 * K1 * (t + (Δt / 2)) + μ2 * K2 * (t + (Δt / 2)) + μ2 - μ1)+K1)
    l4 = -μ1 * (y1+Δt * l3) *(y1 + Δt * l3) - (y1 + Δt * l3) * (-μ1 * K1 * (t + Δt) +
                                                                μ2 * K2 * (t + Δt)+ μ2 - μ1) + K1
    y1=y1+(Δt/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4)
    y2=(-(μ1*K1)/μ2+K2)*t+(μ1/μ2)*y1+1-μ1/μ2
    t=t+Δt
```

Рис. 1. Програмний код на мові Python реалізації чисельного методу Рунге-Кутти 4-го порядку

Зауважимо, що в цій програмі розв'язується наближено методом Рунге-Кутти 4-го порядку рівняння Ріккаті (4) з точністю до величини кроку Δt в четвертому степені, в результаті чого знаходимо $y_1(t)$. Потім за формулою (3) обчислюємо $y_2(t)$.

Маємо, що у сторони Б відносний збиток за одиницю часу більший ніж у сторони А, але за рахунок того, що у сторони А частка розширення площі більша, то в результаті через 40 хвилин бою саме сторона А буде мати значну перевагу у частці площі, що залишилась неураженою. Тобто частка розширення площі значно впливає на результат бою.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-20 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

Приклад 1.

```
m=,n= 30,40
S1=,S2= 32,38
λ1=,λ2=,p1=,p2= 6,8,0.6,0.8
S11=,S22=,D1=,D2= 0.03,0.018,1.6,0.57
Δt=,b= 0.5,40
μ1= 0.085  μ2= 0.144
K1= 0.05  K2= 0.015
t= 0    y1= 1      y2= 1
t= 0.5  y1= 0.956  y2= 0.974
t= 1.0  y1= 0.917  y2= 0.943
t= 1.5  y1= 0.882  y2= 0.916
t= 2.0  y1= 0.851  y2= 0.89
t= 2.5  y1= 0.824  y2= 0.866
t= 3.0  y1= 0.799  y2= 0.845
t= 3.5  y1= 0.777  y2= 0.824
t= 4.0  y1= 0.758  y2= 0.805
t= 4.5  y1= 0.74  y2= 0.788
t= 5.0  y1= 0.724  y2= 0.771
t= 5.5  y1= 0.71  y2= 0.755
t= 6.0  y1= 0.698  y2= 0.741
t= 6.5  y1= 0.687  y2= 0.727
t= 7.0  y1= 0.677  y2= 0.714
t= 7.5  y1= 0.668  y2= 0.701
t= 8.0  y1= 0.66  y2= 0.689
t= 8.5  y1= 0.653  y2= 0.678
t= 9.0  y1= 0.647  y2= 0.667
t= 9.5  y1= 0.642  y2= 0.656
t= 10.0  y1= 0.637  y2= 0.646
t= 10.5  y1= 0.633  y2= 0.637
t= 11.0  y1= 0.63  y2= 0.627
t= 11.5  y1= 0.627  y2= 0.618
t= 12.0  y1= 0.624  y2= 0.61
t= 12.5  y1= 0.623  y2= 0.601
t= 13.0  y1= 0.621  y2= 0.593
t= 13.5  y1= 0.62  y2= 0.585
t= 14.0  y1= 0.619  y2= 0.578
t= 14.5  y1= 0.619  y2= 0.57
t= 15.0  y1= 0.619  y2= 0.563
t= 15.5  y1= 0.62  y2= 0.556
t= 16.0  y1= 0.62  y2= 0.549
t= 16.5  y1= 0.621  y2= 0.542
t= 17.0  y1= 0.623  y2= 0.535
t= 17.5  y1= 0.624  y2= 0.529
t= 18.0  y1= 0.626  y2= 0.523
t= 18.5  y1= 0.628  y2= 0.517
t= 19.0  y1= 0.63  y2= 0.51
t= 19.5  y1= 0.632  y2= 0.505
t= 20.0  y1= 0.634  y2= 0.499
t= 20.5  y1= 0.637  y2= 0.493
t= 21.0  y1= 0.64  y2= 0.487
t= 21.5  y1= 0.643  y2= 0.482
t= 22.0  y1= 0.646  y2= 0.476
t= 22.5  y1= 0.649  y2= 0.471
t= 23.0  y1= 0.653  y2= 0.466
t= 23.5  y1= 0.656  y2= 0.46
t= 24.0  y1= 0.66  y2= 0.455
t= 24.5  y1= 0.664  y2= 0.45
t= 25.0  y1= 0.667  y2= 0.445
t= 25.5  y1= 0.671  y2= 0.44
t= 26.0  y1= 0.676  y2= 0.435
t= 26.5  y1= 0.68  y2= 0.431
t= 27.0  y1= 0.684  y2= 0.426
t= 27.5  y1= 0.689  y2= 0.421
t= 28.0  y1= 0.693  y2= 0.417
t= 28.5  y1= 0.698  y2= 0.412
t= 29.0  y1= 0.702  y2= 0.408
t= 29.5  y1= 0.707  y2= 0.403
t= 30.0  y1= 0.712  y2= 0.399
t= 30.5  y1= 0.717  y2= 0.394
t= 31.0  y1= 0.722  y2= 0.39
t= 31.5  y1= 0.727  y2= 0.386
t= 32.0  y1= 0.732  y2= 0.382
t= 32.5  y1= 0.738  y2= 0.377
t= 33.0  y1= 0.743  y2= 0.373
t= 33.5  y1= 0.749  y2= 0.369
t= 34.0  y1= 0.754  y2= 0.365
t= 34.5  y1= 0.76  y2= 0.361
t= 35.0  y1= 0.765  y2= 0.357
t= 35.5  y1= 0.771  y2= 0.353
t= 36.0  y1= 0.777  y2= 0.349
t= 36.5  y1= 0.783  y2= 0.346
t= 37.0  y1= 0.789  y2= 0.342
t= 37.5  y1= 0.795  y2= 0.338
t= 38.0  y1= 0.801  y2= 0.334
t= 38.5  y1= 0.807  y2= 0.331
t= 39.0  y1= 0.813  y2= 0.327
t= 39.5  y1= 0.82  y2= 0.324
t= 40.0  y1= 0.826  y2= 0.32
```

Рис. 2. Чисельний результат прикладу 1

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-20 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

Висновки

У ході дослідження було розроблено математичну модель конфліктної ситуації, яка описує динаміку взаємодії двох протиборчих сторін, що визначається взаємозв'язком між початковою площею плацдармів та подальшим розширенням операційної зони в динаміці бойового зіткнення. Основні результати можна узагальнити так:

• Побудовано систему нелінійних диференціальних рівнянь, що відображає зміну відносних часток площ плацдармів та середні втрати сторін у процесі бойових дій.

• Виконано аналітичні перетворення системи, зокрема редукцію до рівнянь Бернуллі та Ріккаті, що дозволило отримати часткові розв'язки та встановити залежності між параметрами моделі. При розв'язанні рівняння Бернуллі первісну представлено у вигляді певного інтеграла зі змінною верхньою межею. Подальше зведення цього інтегралу до функції Лапласа відкрило шлях до явного аналітичного запису розв'язку задачі Коші.

• Показано, що у загальному випадку аналітичний розв'язок є складним або неможливим, тому доцільним є застосування чисельних методів.

• Запропоновано використання методу Рунге-Кутти четвертого порядку для чисельного інтегрування системи, що забезпечує наближення до реальних сценаріїв розвитку конфлікту. Створено відповідну програму на мові Python.

• Отримані результати можуть бути використані для прогнозування втрат, оцінки ефективності стратегій та оптимізації розподілу ресурсів у конфліктних умовах.

Таким чином, дослідження створює основу для подальшого розвитку математичних моделей конфліктних ситуацій та їх практичного застосування у військовій аналітиці та стратегічному плануванні.

Список використаної літератури

1. Atkinson M. P., Kress M., MacKay N. J. Targeting, deployment, and loss-tolerance in lanchester engagements. *Operations Research*. 2021. Vol. 69, № 1. P. 71–81. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.2020.2022
2. Cangiotti N., Capolli M., Sensi M. A generalization of unaimed fire Lanchester's model in multi-battle warfare. *Oper Res Int J*. 2023. Vol. 23(2), 38. DOI: https://doi.org/10.1007/s12351-023-00776-8
3. Фурсенко О. К., Черновол Н. М., Удодова О. І., Савчук Я. І. Оптимальний розподіл ресурсів при математичному моделюванні бойових дій. *Системи обробки інформації*. 2025. № 3(182). С. 85–90. DOI: https://doi.org/10.30748/soi.2025.182.09
4. Черновол Н. М., Лемешева Н. В. Вплив розширення площі плацдармів при моделюванні бойових дій на площі. *Системи обробки інформації*. 2025. № 4(183). С. 44–53. DOI: https://doi.org/10.30748/soi.2025.183.06.
5. Chernovol N., Lemesheva N. Area model of the conflict situation with the expansion of the area in the course of the battle. *Новітні технології – для захисту повітряного простору* : матеріали XXI міжнар. наук. конф., (м. Харків, 09–10 квіт. 2025). Харків. С. 808.
6. Кононов В. Б., Кушнерук Ю. І., Евстрат Д. І. Площадна інтерпретація моделі конфліктної ситуації. *Системи обробки інформації*. 2001. Вип. 5(15). С. 39–41.
7. Кононов В. Б. Аналіз площадної інтерпретації моделі конфліктної ситуації. *Системи обробки інформації*. 2001. Вип. 6(16). С. 157–160.

References

1. Atkinson, M. P., Kress, M., & MacKay, N. J. (2021). Targeting, deployment, and loss-tolerance in lanchester engagements. *Operations Research*, *69*(1), 71–81. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.2020.2022 [in English].

2. Cangiotti, N., Capolli, M., & Sensi, M. (2023). A generalization of unaimed fire Lanchester's model in multi-battle warfare. *Oper Res Int J*, *23*(2), 38. DOI: https://doi.org/10.1007/s12351-023-00776-8 [in English].
3. Fursenko, O. K., Chernovol, N. M., Udodova, O. I., & Savchuk, Ya. I. (2025). Optymalnyi rozpodil resursiv pry matematychnomu modeliuvanni boiovykh dii [Optimal Resource Allocation in Mathematical Modeling of Combat Operations]. *Systemy obrobky informatsii*, *3*(182), 85–90. DOI: https://doi.org/10.30748/soi.2025.182.09 [in Ukrainian].
4. Chernovol, N. M., & Lemesheva, N. V. (2025). Vplyv rozshyrennia ploshchi platsdarmiv pry modeliuvanni boiovykh dii na ploshchi [Impact of Bridgehead Area Expansion in Modeling of Combat Operations by Area]. *Systemy obrobky informatsii*, *4*(183), 44–53. DOI: https://doi.org/10.30748/soi.2025.183.06 [in Ukrainian].
5. Chernovol, N., & Lemesheva, N. (2025). Area model of the conflict situation with the expansion of the area in the course of the battle. *Novitni tekhnolohii – dlia zakhystu povitrianoho prostoru*, materialy XXI mizhnarodnoi naukovoi konferentsii [*New Technologies – for Air Space Protection*: Proceedings of the *21th* Internetional Scientific Conference]. Kharkiv [in English].
6. Kononov, V. B., Kushneruk, Yu. I., & Evstrat, D. I. (2001). Ploshchadna interpretatsiia modeli konfliktnoi sytuatsii [Area Interpretation of the Conflict Situation Model]. *Systemy obrobky informatsii*, *5*(15), 39–41 [in Ukrainian].
7. Kononov, V. B. (2001). *Analiz ploshchadnoi interpretatsii modeli konfliktnoi sytuatsii* [Analysis of the Area Interpretation of the Conflict Situation Model]. *Systemy obrobky informatsii*, *6*(16), 157–160 [in Ukrainian].

Лемешева Наталя Володимирівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. E-mail: natali.lemesheva.kharkiv@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3942-6055.

Черновол Наталія Миколаївна – старший викладач кафедри вищої математики Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба. E-mail: n.n.chernovol@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7988-7016.

Lemesheva Natalia Volodymyrivna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics of the Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University. E-mail: natali.lemesheva.kharkiv@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3942-6055.

Chernovol Nataliia Mykolaivna – Senior Lecturer at the Department of Higher Mathematics of the Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University. E-mail: n.n.chernovol@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7988-7016.

Дата першого надходження статті до видання: 05.03.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 30.04.2026
Дата публікації (оприлюднення) статті: 01.07.2026

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-20 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)