УДК 517.9

С. Ю. ПОСЛАВСЬКИЙ
Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України
О. В. АКІМЕНКО
Інститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України
Інститут прикладних систем управління Національної академії наук України
С. В. МОІСЕЄНКО
Херсонський національний технічний університет
Інститут прикладних систем управління Національної академії наук України

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМ ТА РОЗПОДІЛЕНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Більшість сучасних досліджень стійкості динамічних систем присвячено дослідженню критеріїв стійкості за допомогою функцій та функціоналів Ляпунова. Оцінкам максимального показника Ляпунова, що характеризує його швидкість зменшення рішень, присвячено значно меншу кількість досліджень. Так, у роботах Д. Я. Хусаінова такі оцінки знайдено методом функцій Ляпунова.

Інший підхід, заснований на оцінках еволюційного оператора системи, дозволяє отримувати критерії стійкості та верхню оцінку максимального показника Ляпунова, виражені безпосередньо через параметри системи, без використання функцій або функціоналів Ляпунова. Для систем без запізнення такі результати наведено у ранніх працях з цієї тематики 70х років. У роботах професора О. А. Зевіна такий підхід був застосований для систем, що містять запізнення. У більшості робіт розглядаються системи з постійним запізненням, проте, найчастіше, інформація про функцію запізнення відсутня, відома лише її верхня межа, крім того, система може містити розподілене запізнення. Стійкість систем зі змінним і розподіленим запізненням вивчена значно меншою мірою.

У статті розглянуто такий клас систем, що містять змінне запізнення в лінійній частині, а також включають елементи з розподіленим запізненням. Цей фактор ускладнює аналіз поведінки та стійкості систем, що розглядаються. Основну увагу приділено дослідженню впливу параметрів запізнення. Зокрема, отримано двосторонні оцінки максимального показника Ляпунова, які подано через норму нелінійного члена системи та максимальні значення функцій запізнення. Це дозволяє встановити як верхні, так і нижні межі збіжності або розбіжності розв'язків. Для окремих класів систем встановлено точні значення зазначеного показника, що є важливим результатом для практичного аналізу стійкості. Для всіх зазначених систем ефективність запропонованого підходу перевірено на модельних прикладах, отримані результати суттєво розширюють відому інформацію.

Ключові слова: *нелінійні диференціальні рівняння, змінне запізнення, розподілене запізнення, показник Ляпунова, експоненційна стійкість, оцінки стійкості систем.*

S. Yu. POSLAVSKYI
Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine
O. V. AKIMENKO
Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine
Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine
S. V. MOISEIENKO
Kherson National Technical University

STABILITY OF SYSTEMS WITH VARIABLE AND DISTRIBUTED DELAYS

Most modern studies on the stability of dynamic systems focus on investigating stability criteria using Lyapunov functions and functionals. A significantly smaller number of studies are devoted to estimates of the maximum Lyapunov exponent, which characterizes the rate at which solutions decrease. For example, in the works of D.Y. Khusainov, such estimates were obtained using the method of Lyapunov functions.

Another approach, based on estimates of the system's evolution operator, allows one to obtain stability criteria and an upper bound on the maximum Lyapunov exponent, expressed directly in terms of the system's parameters, without using Lyapunov functions or functionals. For systems without delay, such results were presented in early works on this topic from the 1970s. In the works of Professor O.A. Zevin, this approach was applied to systems containing delay. Most works consider systems with constant delay; however, in most cases, information about the delay function is missing, and only its upper bound is known; furthermore, the system may contain distributed delay. The stability of systems with variable and distributed delay has been studied to a much lesser extent.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

This paper examines a class of systems that contain variable delay in the linear part and also include elements with distributed delay. This factor complicates the analysis of the behavior and stability of the systems under consideration. The main focus is on investigating the influence of delay parameters. In particular, two-sided estimates of the maximum Lyapunov exponent are obtained, which are expressed in terms of the norm of the system's nonlinear term and the maximum values of the delay functions. This allows for the determination of both upper and lower bounds for the convergence or divergence of solutions. For certain classes of systems, exact values of this index have been determined, which is an important result for practical stability analysis. For all the systems mentioned, the effectiveness of the proposed approach has been verified using model examples; the results obtained significantly expand the existing body of knowledge.

Keywords: *nonlinear differential equations, variable delay, distributed delay, Lyapunov exponent, exponential stability, stability estimates of systems.*

Постановка проблеми

Розглядається система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x\left(t-\tau_B(t)\right) + f\left(x\left(t-\tau(t)\right),t\right) + C(t)\int_{t-\mu}^{t} x(s)\,ds, \qquad (1)$$

де $A(t)$ –задана матриця, $x \in \mathrm{R}^n$.

Функції $\tau(t)$, $\tau_B(t)$, $x_0(t)$ і $f(x, t)$ уривчасто-безперервні та задовольняють умовам

$$\begin{gathered} \tau(t) \in [0, h],\ \tau_B(t) \in [0, h_B], \\ x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-H, 0], \\ H = \max(h, h_B, \mu),\ \|x_0(t)\| \le M, \\ \|f(x, t)\| \le k\|x\|, \quad f(0, t) = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

де $\|\cdot\|$ – будь-яка норма вектора та узгоджена норма матриці.

В силу $f(0, t) = 0$ система (1) має положення рівноваги $x(t) \equiv 0$. Необхідно отримати критерії стійкості систем зі змінним та розподіленим запізнюваннями, засновані на оцінках максимального показника Ляпунова.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Більшість сучасних досліджень стійкості таких систем присвячено висновку критеріїв стійкості за допомогою функцій та функціоналів Ляпунова. Оцінкам максимального показника Ляпунова, що характеризує його швидкість зменшення рішень, присвячено значно меншу кількість досліджень. Так, у роботах Д. Я. Хусаїнова [1] такі оцінки знайдено методом функцій Ляпунова.

Інший підхід, заснований на оцінках еволюційного оператора системи, дозволяє отримувати критерії стійкості та верхню оцінку максимального показника Ляпунова, виражені безпосередньо через параметри системи, без використання функцій або функціоналів Ляпунова. У роботах А. А. Зевіна [2; 3] такий підхід був застосований для систем, що містять запізнення.

Реальні системи можуть моделюватись рівняннями більш складної структури, наприклад рівняннями, що містять кілька дискретних запізнювань, розподілене запізнення, випадкове запізнення або їх комбінацію [4]. Дослідження нулів характеристичного рівняння найбільш загальних систем є досить складне завдання. Це спричинило розвиток великої кількості різних підходів для дослідження стійкості таких систем. Виклад цих підходів можна знайти, наприклад, в оглядах [2; 5; 6] та працях [3; 7; 8]. У більшості робіт розглядаються системи з постійним запізненням, проте, найчастіше, інформація про функцію запізнення відсутня, відома лише її верхня межа, крім того, система може містити розподілене запізнення. Стійкість систем зі змінним і розподіленим запізненням вивчена значно меншою мірою.

Мета дослідження

Метою дослідження є розробка нових критеріїв стійкості та їх застосування до аналізу деяких нелінійних механічних систем зі змінним та розподіленим запізненням.

Методами досліджень є методи якісної теорії диференціальних рівнянь, матричного аналізу та теорії еволюційних операторів.

Завдання дослідження полягає в розробці нового підходу до отримання критеріїв стійкості нелінійних механічних систем зі змінними та розподіленими запізненнями.

Виклад основного матеріалу дослідження

Верхня оцінка максимального показника Ляпунова.

Подаємо рішення (1) у вигляді

$$x(t)=W(t,0)x(0)+\int_0^t W(t,s)\left[f\left(x\left(s-\tau(s)\right),s\right)+B(s)x\left(s-\tau_B(s)\right)+C(s)\int_{s-\mu}^{s}x(u)\,du\right]ds, \quad (3)$$

де $W(t, s)$ – матриця рівняння $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$. Нехай α – його найбільший показник Ляпунова, тоді за деякого $M > 0$ і будь-яких $0 \le s \le t < \infty$

$$||W(t, s)|| \le M\exp(\alpha(t - s)). \quad (4)$$

Зрозуміло, що верхню межу величини $\overline{\lambda}$ слід шукати в інтервалі

$$\lambda > \alpha. \quad (5)$$

Припустимо:

$$v(t,\lambda,\tau)=)\int_0^t \exp[-\lambda\left(t-s+\tau(s)\right]W(t,s)\,ds,$$

$$v_1(t,\lambda,\tau_B)=\int_0^t\left\|W(t,s)\right\|B(s)\exp\left[-\lambda\left(t-s+\tau_B(s)\right)\right]ds+\frac{1-\exp(-\lambda\mu)}{\lambda}\int_0^t\left\|W(t,s)C(s)\right\|\exp\left(-\lambda(t-s)\right)ds.$$

В силу (4) та (5) функції $v(t, \lambda)$ та $v_1(t, \lambda)$ обмежені на $[0, \infty)$; покладемо:

$$v(\lambda,\tau)=\sup_t v(t,\lambda,\tau),\quad v_1(\lambda,\tau_B)=\sup_t v_1(t,\lambda,\tau_B)\quad \text{при } t\ge 0. \quad (6)$$

Зауважимо, що якщо матриці A, B і C постійні, то

$$W(t, s) = W(t - s),$$

$$\begin{aligned} v(t,\lambda,\tau)&=\int_0^t \exp\left[-\lambda\left(t-s\right)+\tau(s)\right]\left\|W(t-s)\right\|ds=\int_0^t\exp\left[-\lambda\left(s+\tau(s)\right)\right]\left\|W(s)\right\|ds,\\ v_1(t,\lambda,\tau_B)&=\int_0^t\left\|W(s)B\right\|\exp\left[-\lambda\left(s+\tau_B(s)\right)\right]ds+\frac{1-\exp(-\lambda\mu)}{\lambda}\int_0^t\left\|W(s)C\right\|\exp(-\lambda s)\,ds.\end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, що тут $v(t, \lambda, \tau)$ і $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ монотонно зростають по t.

$$v(\lambda, \tau) = \lim v(t, \lambda, \tau),\quad v_1(\lambda, \tau_B) = \lim v_1(t, \lambda, \tau_B) \text{ за } t \to \infty.$$

Враховуючи, що $\lim[1 - \exp(-\lambda\mu)]\lambda^{-1} = \mu$ при $\lambda \to 0$, отримаємо

$$v_1(0)=\int_0^t\left\|W(t,s)B(s)\right\|ds+\mu\int_0^t\left\|W(t,s)C(s)\right\|ds.$$

Позначимо $\lambda_+ = \lambda_+(k)$ – найбільший по $\tau(t)$ корінь рівняння

$$kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B) = 1. \tag{8}$$

Відповідні значення величини τ та $\tau_B(t)$ визначаються з наступних міркувань. Як видно з (7), $v(t, \lambda, \tau)$ і $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ спадають по λ. Тому $\lambda_+ < 0$ і $\lambda_+ > 0$ за $kv(0) + v_1(0) < 1$ і $kv(0) + v_1(0) > 1$ відповідно. З іншого боку, при зростанні $\tau(t)$ та $\tau_B(t)$ функції $v(t, \lambda, \tau)$ і $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ спадають при $\lambda > 0$ і зростають при $\lambda < 0$. Тому при обчисленні $v(\lambda, \tau)$ та $v_1(\lambda, \tau_B)$ (8) слід покласти $\tau = h$, $\tau_B = h_B$ у разі $kv(0) + v_1(0) < 1$ і $\tau = 0$, $\tau_B = 0$ у випадку $kv(0) + v_1(0) > 1$ (при $kv(0) + v_1(0) = 1$ ліва частина (8) не залежить від $\tau(t)$ і $\tau_B(t)$).

Наступна теорема дає верхню межу показника $\overline{\lambda}$.

Теорема 1. У системі (1), (2) $\lambda \le \lambda_+$.

Доведення. Нехай $x(t)$ – розв’язок (1) за деяких $x_0(t)$, $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ і $f(x, t)$.

Поклавши в (3) $x(t) = y(t)\exp(\lambda t)$, отримаємо

$$y(t) = \exp(-\lambda t)W(t,0)x(0) + \exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)\, f\left(\exp\left[\lambda\left(s-\tau(s)\right)\right]y\left(s-\tau(s)\right),s\right)ds +$$
$$+\exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)B(s)\exp\left[\lambda\left(s-\tau_B(s)\right)\right]y\left(s-\tau_B(s)\right)ds +$$
$$+\exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)C(s)\int_{s-\mu}^{s} y(u)\exp(\lambda u)\,du\,ds.$$

Використовуючи умови (1) та (2), знайдемо

$$\|y(t)\| \le \exp(-\lambda t)\|W(t,0)x(0)\| + k\int_0^t \exp\left(-\lambda\left(t-s+\tau(s)\right)\right)\|W(t,s)\|\left\|y\left(s-\tau(s)\right)\right\|ds +$$
$$+\int_0^t \|W(t,s)B(s)\|\exp\left[-\lambda\left(t-s+\tau_B(s)\right)\right]\left\|y\left(s-\tau_B(s)\right)\right\|ds + \tag{9}$$
$$+\exp(-\lambda t)\int_0^t \|W(t,s)C(s)\|\int_{s-\mu}^{s}\|y(u)\|\exp(\lambda u)\,du\,ds.$$

Нехай

$$\|y(t_*)\| = \max\|y(t)\| \text{ при при } t \in [0,\ t_+], \tag{10}$$

де $t_* = t_*(t_+)$. Поклавши в (3.9) $t = t_*$ та враховуючи (10) та (6), отримаємо

$$\|y(t_*)\| \le \exp(-\lambda t_*)\|W(t_*, 0)x(0)\| + \|y(t_*)\|[kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B)]. \tag{11}$$

Покажемо, що за $\lambda \ge \lambda_+$ функція $\|y(t)\|$ обмежена на $(0, \infty)$. Справді, інакше $t_* \to \infty$ при $t_+ \to \infty$ і з (4) і (5) $\exp(-\lambda t_*)\|W(t, 0)x(0)\| \to 0$. Так як $v(t, \lambda, \tau)$ і $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ спадають по λ, то $kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B) < 1$ при $\lambda > \lambda_+$ будь-яких допустимих $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ (як показано вище, λ_+ визначається при тих значеннях $\tau(t)$ і $\tau_B(t)$, при яких ліва частина (8) максимальна). Але при цьому нерівність (11) не виконується для достатньо великих t_*. Отримане протиріччя доводить, що $\|y(t)\| = \|x(t)\|\exp(-\lambda t) < \infty$ з $\lambda > \lambda_+$ і $t > 0$; отже, $\overline{\lambda} \le \lambda_+$. Теорему доведено.

Наступна теорема дає достатню умову експоненційної стійкості системи (1), (2), інваріантну щодо запізнення.

Теорема 2. За умови

$$k < k_* = \frac{1 - v_1(0)}{v(0)} \tag{12}$$

система (1), (2) експоненційно стійка.

Доведення. Як зазначено вище, необхідною і достатньою умовою експоненційної стійкості служить нерівність $\overline{\lambda} < 0$. Як випливає з (12), при $k = k_*$ корінь рівняння (8) $\lambda_+ = 0$ при будь-яких $\tau(t)$ і $\tau_B(t)$. Так як $v(\lambda)$ і $v_1(\lambda)$ спадають за λ, то $\lambda_+ < 0$ при $k < k_*$та, відповідно, $\overline{\lambda} < 0$. Теорему доведено.

Нижня оцінка максимального показника Ляпунова.

Знайдемо нижню оцінку максимального показника Ляпунова для випадку коли лінійна частина системи (1) стаціонарна, для цього скористаємося наступним прийомом.

Розглянемо рівняння

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx\left(t - \tau_B^0\right) + kD(\phi)x\left(t - \tau^0\right) + C\int_{t-\mu}^{t} x(s)\,ds, \tag{13}$$

де $\tau_B^0 \in [0, h_B]$ і $\tau^0 \in [0, h]$ – постійні, $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_k)$, $\|D(\phi)\| = 1$. З огляду на останню рівність функція $f(x) = kD(\phi)x$ задовольняє умові (2), тому рівняння (13) належить до розглянутого вище класу. Отже $\overline{\lambda}_1 \le \overline{\lambda}$, де $\overline{\lambda}_1$ і $\overline{\lambda}$ – максимальні показники Ляпунова систем (13) та (1) відповідно.

Представивши рішення (13) у вигляді $x(t) = \exp(\lambda t)y$, отримаємо рівняння щодо λ:

$$\det\left[A + \exp\left(-\lambda\tau_B^0\right)B + k\exp\left(-\lambda\tau^0\right)D(\phi) + \frac{1 - \exp(\lambda\mu)}{\lambda}C - \lambda I\right] = 0, \tag{14}$$

де I – одинична матриця.

Для такого розв’язку показник Ляпунова визначається у явному вигляді. Зрозуміло, що показник Ляпунова зазначеного розв’язку може бути нижньою оцінкою максимального показника Ляпунова вихідної системи.

Нехай $\beta = \max\limits_p\left(\operatorname{Re}\left(\lambda_p\right)\right)$, $p = 1, \ldots, n$, де λ_p – корені рівняння (14), тоді $\overline{\lambda}_1 = \beta$. Тому нижню оцінку λ_- величини $\overline{\lambda}$ можна визначати за формулою

$$\lambda_- = \sup_{\tau^0, \tau_B^0, \phi}\left[a_1\left(\tau^0, \tau_B^0, \phi\right)\right]. \tag{15}$$

Зауважимо, що у разі евклідової норми в якості $D(\phi)$ можна прийняти будь-яку ортогональну матрицю (як відомо, для такої матриці $\|D(\phi)\| = 1$).

Проілюструємо застосування одержаних оцінок на прикладах.

Приклад 1. Розглянемо рівняння із зосередженим та розподіленим запізнюваннями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx\left(t - \tau(t)\right) + C\int_{t-\mu}^{t} x(s)\,ds, \tag{16}$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Умова експоненційної стійкості (12) для системи (16) набуває вигляду

$$a_1 < \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \tag{17}$$

Зауважимо, що з системи (16) з довільним постійним запізненням τ методом функцій Ляпунова отримано таке умова стійкості [9]:

$$a_1 > (1 + \mu)^{1/2}\left(b_1^2 + b_2^2 + \mu\left(c_1^2 + c_2^2\right)\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Неважко перевірити, що умова (17) менш консервативна, ніж (18) (лише якщо $b_1^2 + b_2^2 = \mu c_1^2 + c_2^2$ вони збігаються). При цьому умова (17) є більш загальною, охоплюючи системи з довільним змінним запізненням $\tau(t)$.

Точні значення максимального показника Ляпунова

Як було зазначено раніше, найчастіше відомі методи дозволяють отримувати верхні оцінки максимального показника Ляпунова або достатні умови стійкості. Нижче отримано точні значення зазначених величин деяких класів нелінійних систем.

Якщо деякій системі знайдені оцінки l_{-}, λ_{+}збігаються, очевидно, що точне значення найбільшого показника Ляпунова $\overline{\lambda} = \lambda_{-} = \lambda_{+}$. Вкажемо системи, для яких ця рівність має місце, при цьому покладемо, що у (2) використовується евклідова норма.

Розглянемо рівняння

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f\left(x\left(t - \tau(t)\right)\right) + c\int_{t-\mu}^{t} x(s)\,ds, \qquad (19)$$

де c – константа, A – постійна симетрична додатньо визначена матриця. Як відомо, власні значення такої матриці дійсні та додатні, позначимо їх λ_i, $i = 1, \ldots, n - 1$ $(\lambda_i \leq \lambda_{i+1})$.

Теорема 3. *У системі (19), (2) максимальний показник Ляпунова* $\overline{\lambda} = \lambda_{+}$, *де* λ_{+} *визначається з рівняння (8) при*

$$v\left(\lambda, \tau^*\right) = \frac{\exp\left(-\lambda\tau^*\right)}{\lambda_1 + \lambda}, \quad v_1(\lambda) = \frac{1 - \exp\left(-\lambda c\mu\right)}{\lambda\left(\lambda_1 + \lambda\right)}, \qquad (20)$$

де $\tau^* = h$ за $kv(0) + v_1(0) < 1$, $\tau^* = 0$ при $kv(0) + v_1(0) \geq 1$.

Доведення. У цьому випадку $W(t, s) = \exp[-(t - s)A]$, тому власні значення матриці $W(t, s)$ рівні $\exp[-(t - s)\lambda_i]$, $i = 1, \ldots, n$. З симетрії A матриця $W(t, s)$ також симетрична, тому її евклідова норма дорівнює максимальному власному значенню, тобто $\|W(t, s)\| = \exp[-\lambda_1(t - s)]$. Підставивши цей вираз у (6) і (7), отримаємо (20).

Відповідно до теореми 1 $\overline{\lambda} \leq \lambda_{+}$, покажемо, що насправді має місце рівність $\overline{\lambda} = \lambda_{+}$.

Покладемо в (19) $f(x) = kx$ і $x(t) = \exp(\lambda_{+}t)a_1$, де a_1 – власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_1. Враховуючи, що $Aa_1 = \lambda_1 a_1$ та що за визначенням λ_{+}

$$k\frac{\exp(-\lambda_{+}\tau^*)}{\lambda_{+} + \lambda_1} + \frac{1 - \exp(-\lambda_{+}c\mu)}{\lambda_{+}(\lambda_{+} + \lambda_1)} = 1, \qquad (21)$$

знайдемо, що $x(t) = \exp(\lambda_{+}t)a_1$ – розв'язок рівняння (19) з показником λ_{+}. За визначенням показник будь-якого рішення не перевищує $\overline{\lambda}$; з іншого боку, через теорему 1 $\overline{\lambda} \leq \lambda_{+}$.

Отже, $\overline{\lambda} = \lambda_{+}$.

Теорему доведено.

Як встановлено, для рівняння (19) $\lambda_{+} = \overline{\lambda}$. Отже, для них нерівність (12) є не лише достатньою, а й необхідною умовою експоненційної стійкості.

Отримані результати представляють самостійний інтерес, крім того, вони можуть бути використані для оцінки ефективності відомих методів.

Метод розрахунку стійкості систем зі стаціонарною лінійною частиною та розподіленим запізненням

Як було зазначено раніше, у всіх відомих методах обчислювальна складність дослідження стійкості суттєво зростає із збільшенням порядку системи. Автори пропонують простий метод розрахунку стійкості, трудомісткість якого практично не залежить від порядку системи.

Розглядається система рівнянь (1) із стаціонарною лінійною частиною

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx\left(t - \tau_B(t)\right) + f\left(x\left(t - \tau(t)\right), t\right) + C\int_{t-\mu}^{t} x(u)\,du, \qquad (22)$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

де матриця A – гурвіцева, тобто всі її власні значення β_i задовольняють нерівності $\operatorname{Re}\beta_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Функції $\tau(t)$, $f(x, t)$ і $x_0(t)$ уривчасто-безперервні і задовольняють умовам (2), при цьому вважаємо, що у (2) використовується евклідова норма.

Вважатимемо, що матриця A має різні власні значення $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (цього можна досягти довільно малим збуренням A). Нехай $v_1, \ldots, v_n$ –відповідні власні вектори, нормовані умовою $(v_i, v_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Позначимо T матрицю, стовпцями якої є вектори v_i:

$$T = (v_1, \ldots, v_n).$$

Як відомо,

$$T^{-1}AT = J = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Поклавши в системі (22) $x = Ty$, отримаємо

$$\dot{y}(t) = Jy(t) + T^{-1}BTy\left(t-\tau_B(t)\right) + T^{-1}f\left(Ty\left(t-\tau(t)\right), t\right) + T^{-1}C\int_{t-\mu}^{t} Ty(u)\,du. \tag{23}$$

Наступна теорема дає умову експоненційної стійкості системи (22).

Теорема 5. За умови

$$\frac{1}{\beta}\left(\left\|T^{-1}BT\right\| + \left\|T^{-1}\right\|k\left\|T\right\| + \left\|T^{-1}C\right\|\mu\left\|T\right\|\right) < 1 \tag{24}$$

система (22) експоненційно стійка, причому

$$\overline{\lambda} < \lambda,$$

де $\beta = \min|\operatorname{Re}\beta_i|$, λ – корінь рівняння

$$V(\lambda) = \frac{1}{\beta+\lambda}(\exp\left[-\lambda h_B\right]\left\|T^{-1}BT\right\| + \exp\left[-\lambda h\right]\left\|T^{-1}\right\|k\left\|T\right\| + \frac{1-\exp\left[-\lambda\mu\right]}{\lambda}\left\|T^{-1}C\right\|\left\|T\right\|) = 1. \tag{25}$$

Доведення. Подамо розв’язок (23) у вигляді

$$y(t) = W(t,0)\,y(0) + \int_0^t W(t,s)(T^{-1}BTy\left(s-\tau_B(s)\right) + T^{-1}f\left(Ty\left(s-\tau(s)\right), s\right) + T^{-1}C\int_{s-\mu}^{s} Ty(u)\,du)ds, \tag{26}$$

де $W(t, s)$ – матриця рівняння $\dot{y}(t) = Jy(t)$.

Покажемо спершу, що за умови (24) $y(t)$ обмежено на $(0, +\infty)$. В іншому випадку знайдеться послідовність t_q ($t_q \to +\infty$ при $q \to +\infty$), така, що

$$\|y(t_q)\| \geq \|y(t)\|, \quad \text{де } t \leq t_q. \tag{27}$$

З (3.26), з урахуванням (3.2) та (3.27), маємо

$$\begin{gathered}\left\|y(t_q)\right\| \leq \left\|W(t_q,0)\,y(0)\right\| + \int_0^{t_q}\left\|W(t_q,s)\right\|(\left\|T^{-1}BT\right\|\left\|y(t_q)\right\| + \\ + \left\|T^{-1}\right\|k\left\|T\right\|\left\|y(t_q)\right\| + \left\|T^{-1}C\right\|\int_{s-\mu}^{s}\left\|T\right\|\left\|y(t_q)\right\|du)ds.\end{gathered} \tag{28}$$

У цьому випадку $W(t, s) = \exp[(t - s)J]$, тому власні значення матриці $W(t, s)$ рівні $\exp[(t - s)\beta_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Матриця J – діагональна, тому, $W(t, s)$також діагональна, отже $\|W(t, s)\| = \exp[-\beta(t - s)]$. Тоді

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

$$\lim_{t_q \to +\infty} \int_0^{t_q} \left\| W\left(t_q, s\right) \right\| ds = \lim_{t_q \to +\infty} \frac{1}{\beta}\left(1 - \exp\left[-\beta t_q\right]\right) = \frac{1}{\beta}.$$

З огляду на це, нерівність (28) запишемо у вигляді

$$\left\| y\left(t_q\right) \right\| \le \left\| W\left(t_q, 0\right) y(0) \right\| + \left\| y\left(t_q\right) \right\| \frac{1}{\beta}\left(\left\|T^{-1}BT\right\| + \left\|T^{-1}\right\| k \left\|T\right\| + \left\|T^{-1}C\right\| \mu \left\|T\right\|\right). \quad (29)$$

Оскільки система $\dot{y}(t) = Jy(t)$ стійка, то $\|W(t_q, 0)y(0)\| \to 0$ за $t_q \to +\infty$. Отже, за умови (24), нерівність (28) не виконується.

Максимальний показник Ляпунова рішень системи $\dot{y}(t) = Jy(t)$ дорівнює $\overline{\lambda} = -\beta$. Шукатимемо верхню оцінку величини $\overline{\lambda}$ системи (22) в інтервалі $\lambda > -\beta$

Для доведення експоненційної стійкості покладемо в (23)

$$y(t) = \exp(\lambda t) z(t), \quad -\beta < \lambda < 0, \quad (30)$$

в результаті отримаємо

$$\begin{gathered} \dot{z}(t) = (J - \lambda I) z(t) + exp\left[-\lambda \tau_B(t)\right] T^{-1} BTz\left(t - \tau_B(t)\right) + \\ + exp\left[-\lambda t\right] T^{-1} f\left(Texp\left[\lambda\left(t - \tau(t)\right)\right] z\left(t - \tau(t)\right), t\right) + \\ + exp\left[-\lambda t\right] T^{-1} C \int_{t-\mu}^{t} Texp\left[\lambda u\right] z(u)\, du. \end{gathered} \quad (31)$$

Аналогічно наведеному вище доказу знайдемо, що розв'язки (31) обмежені, якщо

$$\frac{1}{\beta + \lambda}\left(exp\left[-\lambda h_B\right]\left\|T^{-1}BT\right\| + exp\left[-\lambda h\right]\left\|T^{-1}\right\| k \left\|T\right\| + \frac{1 - exp\left[-\lambda \mu\right]}{\lambda}\left\|T^{-1}C\right\|\left\|T\right\|\right) < 1.$$

Функція $V(\lambda)$ зменшується за λ; за умовою (24) $V(\lambda) < 1$ при $\lambda = 0$, отже за $V(\lambda) = 1$ $\lambda < 0$. З огляду на (30) знайдемо, що система (22) експоненційно стійка з показником λ. Теорему доведено.

Проілюструємо ефективність одержаних умов стійкості на модельних прикладах.

Приклад 2. Для перевірки ефективності розробленої методики, розглянемо рівняння з прикладу 1, для якого умови стійкості були отримані раніше іншими методами [9]

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx\left(t - \tau_B(t)\right) + C\int_{t-\mu}^{t} x(u)\, du, \\ A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}. \end{gathered} \quad (32)$$

Матриця A – діагональна, отже $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Нехай a_1 – мінімальне за модулем власне значення матриці A, тоді умова експоненційної стійкості (24) для системи (32) набуває вигляду

$$a_1 > \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \quad (33)$$

Зауважимо, що така умова була отримамоногна раніше у прикладі 1 з нерівності (12). У [9] для рівняння (32) з постійним запізненням τ_B методом функцій Ляпунова отримано наступну умову стійкості

$$a_1 > (1 + \mu)^{1/2}\left[\left(b_1^2 + b_2^2\right) + \mu\left(c_1^2 + c_2^2\right)\right]^{1/2}. \quad (34)$$

Неважко перевірити, що умова (33) менш консервативна, ніж (34) (лише якщо $b_1^2+b_2^2=\mu\left(c_1^2+c_2^2\right)$ вони збігаються). При цьому умова (33) є більш загальною, охоплюючи системи з довільним змінним запізненням $\tau_B(t)$.

Приклад 3. Розглянемо нелінійну систему

$$\dot{x}\left(t\right)=Ax\left(t\right)+Bx\left(t-\tau_B\left(t\right)\right)+f\left(x\left(t-\tau\left(t\right)\right),t\right),$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 0.1 & 0.4 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0.2 & 1 & -2 & 0.1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.1 & 0 & 0.3 & 0\\ 0.1 & -0.2 & 0 & 0.2\\ 0 & 0 & -0.1 & 0\\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix}, \tag{35}$$

де $\tau(t)\in[0,h]$, $\tau_B(t)\in[0,h_B]$, $\|f(x,t)\|\le k\|x\|$.

Умова стійкості (24) набуває вигляду

$$k<\frac{\beta-\left\|T^{-1}BT\right\|}{\left\|T^{-1}\right\|\left\|T\right\|}<0.0829. \tag{36}$$

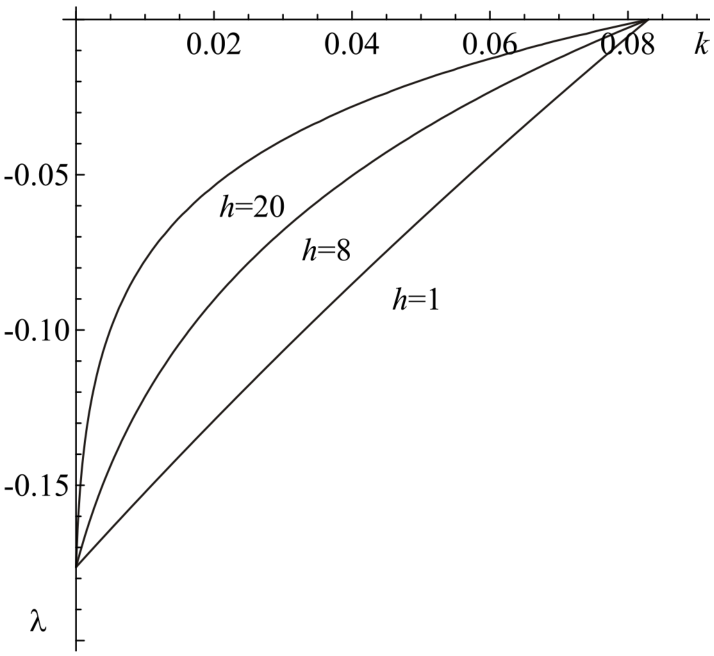

Рис. 1. Верхні оцінки $\lambda(k)$ максимального показника Ляпунова

На рисунку 1 представлені графіки верхньої оцінки максимального показника Ляпунова $\lambda(k)$ при різних значеннях максимальної запізнювання h і фіксованої $h_B=0.5$.

Функції $\lambda(k,h)$ зростають по k, h, але $\lim k(\lambda,h)=0.0829\ldots$ при $\lambda\to 0$ не залежить від h. Тому умова $k<0.0829$ гарантує експоненційну стійкість системи за будь-якого кінцевого h.

Використовуючи нерівність (12) для системи (35) було отримано умову стійкості [10]

$$k<0.0483\ldots \tag{37}$$

Очевидно, що умова (36) менш консервативна, ніж (37). При цьому розрахунки, необхідні для отримання (36), значно простіші.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

Висновки

Розглянуто систему, що містить змінне запізнення в лінійній частині та включає елемент із розподіленим запізненням, що дозволяє адекватніше описувати реальні динамічні процеси з пам'яттю. Отримано двосторонні оцінки максимального показника Ляпунова, які виражено через норму нелінійного члена та максимальні значення функцій запізнення, що дає змогу ефективно оцінювати стійкість систем без необхідності знаходження точного розв'язку. Для окремих класів систем встановлено точне значення цього показника, що підтверджує точність і надійність запропонованого підходу.

Запропонований простий і зручний метод визначення експоненційної стійкості не потребує складних обчислювальних процедур і може бути реалізований на практиці. Важливою перевагою методу є те, що його обчислювальна трудомісткість практично не залежить від порядку системи, що робить його придатним для аналізу високовимірних моделей. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні широкого класу нелінійних систем із запізненням, а також у задачах синтезу та аналізу систем керування. Крім того, запропонований підхід створює основу для подальших узагальнень і розвитку методів аналізу стійкості складних динамічних систем.

Список використаної літератури

1. Хусаінов Д., Диблик Й., Ружичкова М. Лінійні динамічні системи з післядією. Представлення розв'язків, стійкість, управління, стабілізація. Київ. Нац. унів-т ім. Т. Шевченка. ГП Інформ.-аналіт. агенство. 2015. 252 с.
2. Зевін О. А., Пославський С. Ю. Двосторонні оцінки максимального показника Ляпунова нелінійних дифференційних рівнянь із запізненням. *Тези доповідей Українського математичного конгресу*. м. Київ, Інститут математики НАН України. 2009. http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Poslavsky.pdf
3. Зевін О. А., Пославський С. Ю. Критерії експоненційної стійкості нелінійних систем із довільним запізненням. *Вісник ХНТУ*. 2011. 3 (42). С. 215–221.
4. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*. 2003. 39 (10). P. 1667–1694. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00167-5
5. Пославський С. Ю. Метод розрахунку стійкості нелінейних систем із запізненнями. *Вісник Харківського національного університету*. 2014. 1133(70). С. 48–55. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMA_2014_1133_70_5
6. Пославський С. Ю. Двосторонні оцінки максимального показника Ляпунова та критерії стійкості нелінійних систем із запізненням. *Збірник тез доповідей X Кримська Міжнародна математична школа. Метод функцій Ляпунова та його застосунки*. 2010. С. 119.
7. Пославський С. Ю. Умови стійкості систем з переключеннями. *Технічна механіка*. 2014. 3. С. 87–93.
8. Пославський С. Ю. Умови експоненційної стійкості деяких класів нелінійних систем зі змінними та розподіленими запізненнями. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка*. 2014. 15 (2). С. 157–171.
9. Kolmanovskii V.B., Richard J.-P. Stability of some linear systems with delay. *IEEE Transaction on Automatic Control* 1999. 44 (5). P. 984–989. https://doi.org/10.1109/9.763213
10. Zevin O. A., Poslavskyi S. Yu. Two-sided bounds for the largest Lyapunov exponent and exponential stability criteria for nonlinear systems with arbitrary delays. *Automation and Remote Control*. 2012. 73(1). P. 36-47. https://doi.org/10.1134/S0005117912010055

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-29 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

References

1. Khusainov, D., Dublike, Y., & Ruzhychkova, M. (2015). *Liniini dynamichni systemy z pisliadiieiu: Predstavlennia rozv'iazkiv, stiikist, upravlinnia, stabilizatsiia* [Linear dynamic systems with aftereffect: Representation of solutions, stability, control, stabilization]. Kyiv : Taras Shevchenko National University of Kyiv; Information-Analytical Agency [in Ukrainian].
2. Zevin, O. A., & Poslavskyi, S. Yu. (2009). Dvostoronni otsinky maksymalnoho pokaznyka Liapunova neliniinykh dyferentsiinykh rivnian iz zapiznenniam [Bilateral estimates of the maximum Lyapunov exponent for nonlinear differential equations with delay]. In *Proceedings of the Ukrainian Mathematical Congress* (Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine). http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Poslavsky.pdf [in Ukrainian].
3. Zevin, O. A., & Poslavskyi, S. Yu. (2011). Kryterii eksponentsiinoi stiikosti neliniinykh system iz dovilnym zapiznenniam [Criteria for Exponential Stability of Nonlinear Systems with Arbitrary Delay]. *Bulletin of Kherson National Technical University*, *3* (42), 215–221. [in Ukrainian].
4. Richard, J.-P. (2003). *Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems*. Automatica, *39* (10), 1667–1694. DOI: https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00167-5 [in English].
5. Poslavskyi, S. Yu. (2014). Metod rozrakhunku stiikosti neliniinykh system iz zapiznenniamy [A Method for Calculating the Stability of Nonlinear Systems with Delays]. *Bulletin of Kharkiv National*, *1133* (70), 48–55. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMA_2014_1133_70_5 [in Ukrainian].
6. Poslavskyi, S. Yu. (2010). Dvostoronni otsinky maksymalnoho pokaznyka Liapunova ta kryterii stiikosti neliniinykh system iz zapiznenniam [Bilateral estimates of the maximum Lyapunov exponent for nonlinear differential equations with delay]. *In 10th Crimean International Mathematical School: Lyapunov Functions Method and Its Applications*, 119. [in Ukrainian].
7. Poslavskyi, S. Yu. (2014). Umovy stiikosti system z perekliuchenniamy [Stability Conditions for Switching Systems]. *Technical Mechanics*, *3*, 87–93. [in Ukrainian].
8. Poslavskyi, S. Yu (2014). Umovy eksponentsiinoi stiikosti deiakykh klasiv neliniinykh system zi zminnymy ta rozpodilenymy zapiznenniamy [Conditions for exponential stability of certain classes of nonlinear systems with variable and distributed delays.]. *Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series: Mechanics*, *15* (2), 157–171. [in Ukrainian].
9. Kolmanovskii, V.B., & Richard, J.-P. (1999). Stability of some linear systems with delay. *IEEE Transaction on Automatic Control*, *44* (5), 984–989. https://doi.org/10.1109/9.763213 [in English].
10. Zevin, O. A., & Poslavskyi, S. Yu. (2012). Two-sided bounds for the largest Lyapunov exponent and exponential stability criteria for nonlinear systems with arbitrary delays. *Automation and Remote Control*, *73* (1), 36–47. https://doi.org/10.1134/S0005117912010055 [in English].

Пославський Сергій Юрійович – к.ф.-м.н., старший науковий співробітник Інституту транспортних систем і технологій Національної академії наук України. E-mail: sergey.poslavskiy@gmail.com, ORCID: 0009-0007-8972-5823.

Акіменко Оксана Володимирівна – провідний інженер Інституту транспортних систем і технологій Національної академії наук України; молодший науковий співробітник Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України. E-mail: samsonova@ua.fm, ORCID: 0000-0002-4562-4795.

Моісеєнко Світлана Вікторівна – к.т.н., доцент, завідувачка кафедри інформатики і комп'ютерних наук Херсонського національного технічного університету; старший науковий співробітник Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України. E-mail: 4moiseenko@ukr.net, ORCID: 0000-0001-5802-3887.

Poslavskyi Serhii Yuriiovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher of the Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: sergey.poslavskiy@gmail.com, ORCID: 0009-0007-8972-5823.

Akimenko Oksana Volodymyrivna – Leading Engineer of the Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine; Junior Researcher of Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: samsonova@ua.fm, ORCID: 0000-0002-4562-4795.

Moiseienko Svitlana Viktorivna – Candidate of technical sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Informatics and Computer; Senior Researcher of Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine. E-mail: 4moiseenko@ukr.net, ORCID: 0000-0001-5802-3887.

Дата першого надходження статті до видання: 30.03.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 30.04.2026
Дата публікації (оприлюднення) статті: 01.07.2026