

М. О. ТЕРЕЩУК

Київський національний університет будівництва і архітектури

Г. А. ВІРЧЕНКО, П. М. ЯБЛОНСЬКИЙ

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ГЕОМЕТРІЇ ТОНКОСТІННИХ БЕЗМОМЕНТНИХ КУПОЛІВ ОБЕРТАННЯ НА ЇХНІ ВНУТРІШНІ ЗУСИЛЛЯ ПІД ДІЄЮ ВЛАСНОЇ ВАГИ

Протягом багатьох століть куполи доволі популярні при зведенні важливих архітектурних об'єктів, таких як храми, палаци, різноманітні будівлі суспільного призначення тощо. Це цілком стосується й сучасності. Наведені факти спричинені красою та урочистістю куполів, їхньою технічною здатністю перекривати великі відстані без використання внутрішніх опор. Акцентовані відомості є головними перевагами даних конструкцій. Особливий інтерес до тонкостінних різновидів пояснюється бажанням зменшити витрати матеріалів, необхідних для будівництва, що знижує його вартість. Недоліками куполів вважаються складність проектування, виготовлення та експлуатації.

Їхня вага створює меридіональні стискальні зусилля, які задовільно сприймаються бетоном, каменем, цеглою. Кільцеві внутрішні зусилля діють уздовж дотичних до паралелей. Верхні частини куполів стискаються, а нижні можуть бути суттєво розтягнутими. У такому разі основа додатково армується або встановлюється опорне кільце. Зараз широко розповсюдженим для розрахунків міцності конструкцій є метод скінченних елементів, що успішно реалізується комп'ютерними засобами. Його ідея для оболонок полягає в їх поділі на значну кількість взаємодіючих поміж собою складових. Описаний підхід дозволяє отримувати достатньо точні результати. Незважаючи на це, мембранна теорія, яка спирається на формулу Лапласа, досі залишається математичним підґрунтям відповідного моделювання. Мається на увазі простота і продуктивність її застосування на етапі концептуального проектування для дефініції попередніх наближених діючих зусиль. Це, зокрема, сприяє виключенню з подальшого уточненого опрацювання неперспективних варіантів. Іншим слушним прикладом слугує верифікація комп'ютерних обчислень, помилки в яких можуть бути викликані некоректним введенням людьми певної інформації. Теорія також дає змогу більш правильно розуміти та прогнозувати поведінку досліджуваних об'єктів. Однак, мембранній методології теж притаманні недоліки, пов'язані з виникненням згинальних моментів у місцях стикування купола з опорним кільцем.

У статті проаналізовані конкретні випадки визначення меридіональних і кільцевих зусиль у тонкостінних безмоментних оболонках обертання, навантажених власною вагою, залежно від змінної їхньої геометрії. У якості твірних для забезпечення гнучкого комп'ютерного формуотворення використано векторні раціональні параметричні криві другого степеня. Окреслено перспективи проведення подальших відповідних наукових розвідок.

Ключові слова: автоматизоване проектування, математичне моделювання, меридіональні та кільцеві зусилля, векторні раціональні параметричні криві другого степеня, тонкостінні безмоментні куполи обертання.

М. О. TERESCHUK

Kyiv National University of Construction and Architecture

G. A. VIRCHENKO, P. M. YABLONSKYI

National Technical University of Ukraine

“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

STUDY OF THE INFLUENCE OF GEOMETRY ON INTERNAL FORCES IN THIN-WALLED MOMENTLESS DOMES OF REVOLUTION UNDER DEAD LOAD

Domes have been quite popular in the construction of important architectural objects, such as temples, palaces, various public buildings, etc., for many centuries. This is also true for modern times. The presented facts are caused by the beauty and solemnity of the domes, their technical ability to cover long distances without the use of internal supports. Accentuated information is the main advantage of these structures. The particular interest in thin-walled varieties is explained by the desire to reduce the consumption of materials required for construction, which reduces its cost. The disadvantages of domes include the complexity of design, manufacture and operation.

Their weight is converted into meridional compressive forces, which are satisfactorily perceived by concrete, stone, brick during operation. Circumferential internal forces act along the tangents to the parallels. The upper parts of the domes are compressed, while the lower parts can be significantly stretched. In this case, the base of the dome is additionally reinforced or a support ring is installed. The finite element method, which is successfully implemented by computer means for calculating the strength of structures, is now widely used. His idea for shells is to divide them into a significant number of interacting components. The described approach allows obtaining sufficiently accurate results. Membrane theory, which is based on Laplace's formula, remains the mathematical basis for the corresponding modelling. This refers to the simplicity and productivity of its application at the conceptual design stage for defining preliminary approximate acting forces. This, in particular, helps to exclude unpromising options from further detailed processing. Another good example is the verification of computer calculations, where errors can be caused by people incorrectly entering certain information. The theory allows us to more correctly understand and predict the behaviour of the objects under study. However, the membrane methodology also has disadvantages associated with the occurrence of bending moments at the junction of the dome with the support ring.

The article analyses specific cases of determining meridional and circumferential forces in thin-walled momentless domes of revolution loaded with their own weight, depending on variable geometry. Vector rational parametric curves of the second degree were used as generators to ensure flexible computer shaping. Prospects for further relevant scientific research are outlined.

Keywords: *automated design, mathematical modelling, meridian and circumferential forces, vector rational parametric curves of the second degree, thin-walled momentless domes of revolution.*

Постановка проблеми

Нинішнє життя в Україні доволі важке. Це пов'язано з воєнними діями на її території, що обумовлює загибель людей, руйнування багатьох промислових і цивільних об'єктів, у тому числі архітектурної спадщини, культових будівель, інших споруд. Отже, важливим постає питання їхнього якісного відновлення після настання мирного часу. У наведених обставинах суттєво зросла кількість громадян, які звертаються за підтримкою до всевишніх сил. Останнє стосується різних релігій та конфесій. Найпоширенішим у нашій державі є християнство. Через обмежені матеріально-фінансові спроможності парафіян зараз розповсюджене зведення не величних храмів, а маленьких каплиць. Останні розташовуються в місцях визначних подій, на перехрестях доріг, біля цілющих джерел, у лікарнях, військових частинах і т. д. Особливо популярні тепер поминальні каплиці. Відомо, що центральне місце в сакральних будівлях займають куполи, які уособлюють небесну святість. Тому проблема оптимального автоматизованого проєктування, виготовлення та експлуатації зазначених архітектурних конструкцій доволі актуальна.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Видання [1; 2] – це фундаментальні праці з математичного моделювання різноманітних тонкостінних оболонок (сферичних, еліпсоїдних, параболоїдних, гіперболоїдних та інших), їхніх належних розрахунків на міцність. Гнучким і продуктивним є запропонований у статті [3] структурно-параметричний спосіб формоутворення куполів православних храмів. Його застосування дозволяє ефективно задовольняти наявним канонічним релігійним архітектурним вимогам стосовно естетичного та індивідуального вигляду сакральних будівель. Наведені приклади базуються на використанні векторних раціональних параметричних ліній, аналітичний апарат яких узагальнює моделювання дуг кривих другого порядку. Тобто, за допомогою однієї вказаної твірної можна визначати сферичні, еліпсоїдні, параболоїдні, гіперболоїдні та інші оболонки обертання. Роботу [4] присвячено дефініції таких властивостей куполів, як їхні об'єми і площі, а [5] – розгорткам належних гранних поверхонь, що особливо важливо для відповідного виробництва. Деякі аспекти збереження та відновлення геометричними засобами архітектурної спадщини України розглянуто в публікації [6]. Інші методології математичного моделювання тонкостінних оболонок приведені у працях [7–10]. Так, зокрема, об'єкт вивчення останньої становить розсіювання вибухового навантаження різними формами куполів. Спосіб зменшення області проєктних розв'язків [11] використовується далі в даній статті. Перспективним напрямком наукових досліджень з обраної тематики є аналіз змінювання товщини куполів [12] для проведення їхньої комплексної оптимізації.

Мета дослідження

Ціль публікації полягає в поданні запропонованої методики розрахунку меридіональних і кільцевих зусиль у тонкостінних безмоментних куполах обертання під дією їхньої власної ваги в залежності від геометрії вказаних конструкцій. Дефініція останньої здійснюється твірною у вигляді векторної раціональної параметричної кривої другого степеня. Це забезпечує узагальнене формоутворення сферичних, еліпсоїдних, параболоїдних, гіперболоїдних та інших поверхонь обертання під час автоматизованого проектування.

Виклад основного матеріалу дослідження

Схему побудови опрацьовуваних серединних поверхонь за допомогою визначених у прямокутній системі координат $Oxyz$ векторних раціональних параметричних кривих другого степеня

$$\mathbf{r}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + 2wu(1-u)\mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2}{(1-u)^2 + 2wu(1-u) + u^2}, \tag{1}$$

де $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, H)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (x_1, 0, H)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) = (R, 0, 0)$ – вершини характеристичного трикутника;

$w \geq 0$ – ваговий коефіцієнт;

$u \in [0, 1]$ – параметр,

представлено на рис. 1.

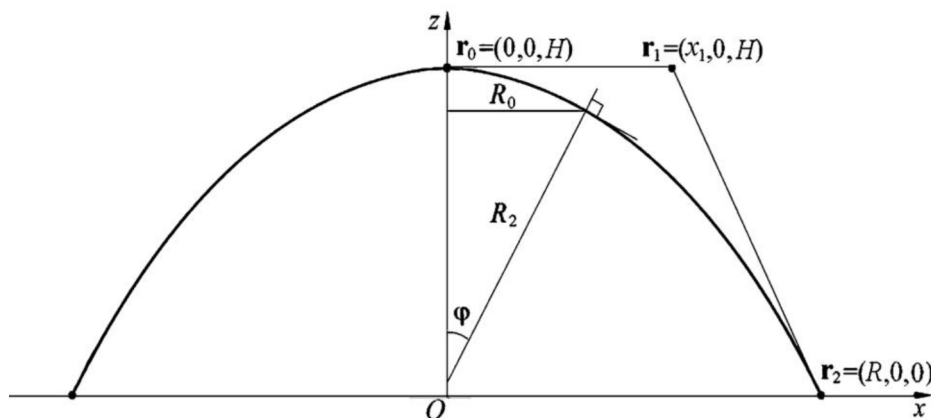


Рис. 1. Схема формування серединних поверхонь куполів обертання

При цьому R є радіусом основи купола, а H – його висотою. Однакові аплікати вершин r_0 та r_1 забезпечують горизонтальну дотичну в найвищій точці оболонки. Абсциса x_1 задовольняє нерівності

$$0 < x_1 \leq R. \tag{2}$$

Меридіональні N_ϕ та кільцеві N_0 зусилля пов'язані з нормальним до поверхні навантаженням від ваги q одиниці площі купола

$$Z = q \cos \phi \tag{3}$$

рівнянням Лапласа

$$\frac{N_\phi}{R_1} + \frac{N_0}{R_2} + Z = 0, \tag{4}$$

де R_1 – радіус кривини меридіана,

R_2 – довжина нормалі поверхні до осі обертання z .

На рис. 1 кут між останніми позначено як ϕ , а через R_0 – радіус належної паралелі. Для обчислення величин R_1 та R_2 застосовуватимемо отримані з формули (1) залежності

$$x'(u) = \frac{2((1-2u)w(x_1 - x_0) + (u^2(w-1) + u)(x_2 - x_0))}{p^2(u)}, \quad (5)$$

$$z'(u) = \frac{2((1-2u)w(z_1 - z_0) + (u^2(w-1) + u)(z_2 - z_0))}{p^2(u)}, \quad (6)$$

де $p(u) = 2u(1-u)(w-1) + 1$.

З використанням виразів (5) і (6)

$$R_1(u) = \frac{ds(u)^3}{|x'(u)z''(u) - x''(u)z'(u)|}, \quad (7)$$

$$R_2(u) = x(u) \frac{ds(u)}{|z'(u)|}, \quad (8)$$

де $ds(u) = \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2}$.

Меридіональні зусилля на одиницю довжини дорівнюють

$$N_\phi = -\frac{W}{2\pi R_2 \sin^2 \phi} = -\frac{W}{2\pi R_0 \sin \phi}, \quad (9)$$

де W – вертикальне вагове навантаження оболонки на горизонтальному рівні кута ϕ .

Вага частини купола для параметра u

$$W(u) = 2\pi q \int_0^u x(u) ds(u) du. \quad (10)$$

На підставі співвідношень (3), (4), (7) ... (10) отримуємо

$$N_\phi(u) = -\frac{W(u)}{2\pi x(u) |z'(u)| / ds(u)}, \quad (11)$$

$$N_\theta(u) = R_2(u)(-q|x'(u)|/ds(u) - N_\phi(u)/R_1(u)). \quad (12)$$

Для певного u

$$\phi(u) = \arctg(|z'(u)|/|x'(u)|). \quad (13)$$

Формули (1) ... (13) дозволяють розраховувати меридіональні та кільцеві зусилля сферичних, еліпсоїдних, параболоїдних і гіперболоїдних тонкостінних безмоментних куполів обертання від дії їхньої власної ваги.

Нехай область проєктних параметрів характеризується такими проміжками, залежностями та множинами

$$R \in [1 \text{ м}, 5 \text{ м}], H \in [1 \text{ м}, 5 \text{ м}], \quad (14)$$

$$0,5 \leq H/R \leq 2, \quad (15)$$

$$w \in [0,5; 1,5], \quad (16)$$

$$x_1 \in (R/2, R), \quad (17)$$

$$q \in [60 \text{ Н/м}^2, 1200 \text{ Н/м}^2]. \quad (18)$$

Значення (14) ... (18) обумовлені наступними обставинами. Головне завдання публікації полягає у висвітленні базових складових запропонованого підходу до математичного моделювання тонкостінних безмоментних куполів обертання. Представлені вище скорочені опрацьовувані дані пов'язані з лімітованим обсягом статті. При цьому, наприклад, діапазони (14) цілком підходять для куполів православних каплиць і невеликих храмів. Зауважимо, що розширення наведених границь не впливає на застосовувану методологію. Співвідношення (15)

виділяє необхідну підмножину з указаних проміжків. Вираз (16) спрямований на вивчення сферичних, еліпсоїдних, параболоїдних та гіперболоїдних серединних поверхонь обертання з ваговим коефіцієнтом w в околі одиниці, яка відповідає твірній параболі. Перший компонент (17) забезпечує похилу дотичну меридіана в основі купола, а другий – вертикальну. Менші обмеження (18) стосуються металевих куполів із товщиною оболонки до 1 мм, більші – залізобетонних товщиною в кілька сантиметрів.

Згідно зі способом зменшення області проєктних розв’язків для початкового концептуального аналізу виконано дискретизацію множин (14) із кроком 1 м. На рис. 2 плюсами показано допустимі варіанти з урахуванням нерівності (15).

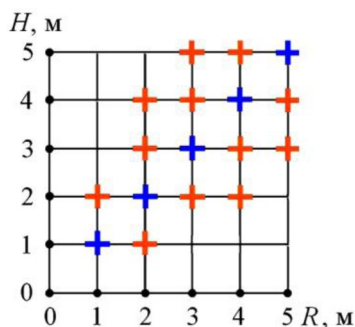


Рис. 2. Дискретизація R і H та врахування обмежень (15)

У випадку (16) діємо за аналогією

$$w \in (0,5; \sqrt{2}/2; 1; 1,25; 1,5). \tag{19}$$

Використання в кортежі (19) другого елемента, що дорівнює $\approx 0,7071$, необхідне для моделювання півсферичних куполів, у яких $R = H$, що подані на рис. 2 синім кольором. Розглядатимемо далі сталеві куполи товщиною 0,001 м з вагою одиниці площі

$$q = 77 \text{ Н/м}^2. \tag{20}$$

Обчислені за допомогою математичного апарату (1)...(20) меридіональні та кільцеві зусилля в тонкостінних безмоментних куполах обертання від дії їхньої ваги ілюструють представлені нижче зображення. На рис. 3 $N_\varphi(0^\circ) = -38,5 \text{ Н/м}$, $N_\varphi(90^\circ) = -77 \text{ Н/м}$, $N_\theta(0^\circ) = -38,5 \text{ Н/м}$, $N_\theta(90^\circ) = 77 \text{ Н/м}$, на рис. 4 $N_\varphi(0^\circ) = N_\theta(0^\circ) = -115,5 \text{ Н/м}$, $N_\varphi(90^\circ) = -231 \text{ Н/м}$, $N_\theta(90^\circ) = 231 \text{ Н/м}$. Мембранні зусилля півсфери пропорційні додатному радіусу r її паралелі. Це пояснюється тим, що вага певної частини конструкції обумовлюється відповідною площею поверхні оболонки, тобто змінюється як r^2 , а вказане навантаження передається на паралель, довжина якої пропорційна r .

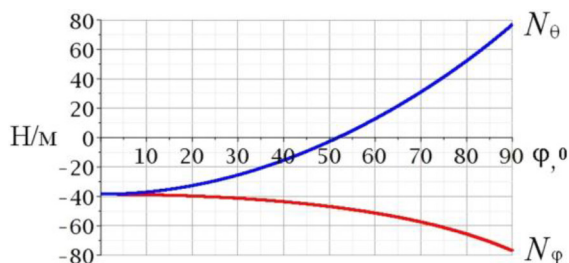


Рис. 3. Зусилля півсферичної оболонки радіусом $R = 1$ м

Перерозподіл внутрішніх зусиль завдяки $w = 0,5$ демонструє рис. 5. Маємо $N_\varphi(0^\circ) = -57,8 \text{ Н/м}$, $N_\varphi(90^\circ) = -216,5 \text{ Н/м}$, $N_\theta(0^\circ) = -57,8 \text{ Н/м}$, $N_\theta(90^\circ) = 455 \text{ Н/м}$. Така модифікація призводить до суттєвого зростання кільцевих зусиль розтягу внизу конструкції. Випадок твірної параболі ($w = 1$) наведений на рис. 6.



Рис. 4. Зусилля півсферичного купола радіусом $R = 3$ м

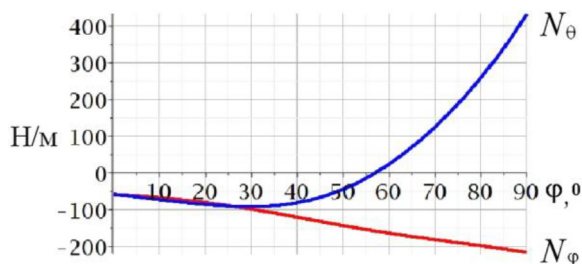


Рис. 5. Зусилля еліпсоїдної оболонки з $r_0 = (0 \text{ м}; 0 \text{ м}; 3 \text{ м})$, $r_1 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 3 \text{ м})$, $r_2 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 0 \text{ м})$ та $\nu = 0,5$

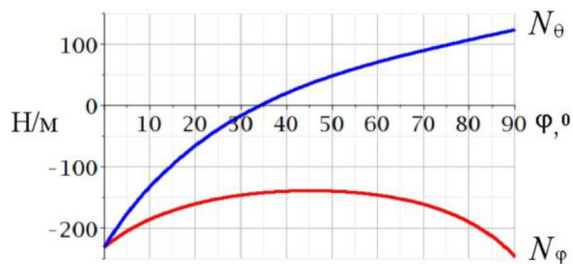


Рис. 6. Зусилля параболоїдного купола з $r_0 = (0 \text{ м}; 0 \text{ м}; 3 \text{ м})$, $r_1 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 3 \text{ м})$, $r_2 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 0 \text{ м})$ та $\nu = 1$

У даному разі $N_\phi(0^\circ) = N_\theta(0^\circ) = -231$ Н/м, $N_\phi(90^\circ) = -266$ Н/м, $N_\theta(90^\circ) = 123,5$ Н/м. Порівняно з попереднім варіантом суттєво зменшилися кільцеві зусилля в нижній частині оболонки. Різновид твірної гіперболи ($\nu = 1,5$) подано на рис. 7. При цьому $N_\phi(0^\circ) = -519,5$ Н/м, $N_\phi(90^\circ) = -266$ Н/м, $N_\theta(0^\circ) = -519,5$ Н/м, $N_\theta(90^\circ) = 59$ Н/м. Тепер значно збільшився тиск у полюсі купола.

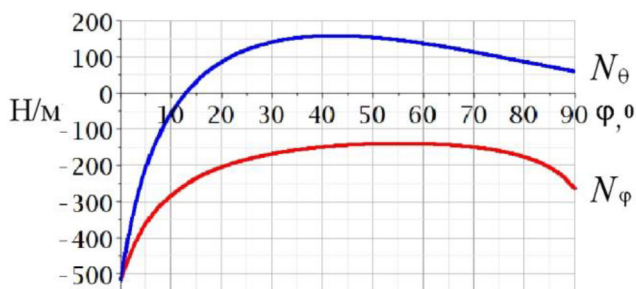


Рис. 7. Зусилля гіперболоїдної оболонки з $r_0 = (0 \text{ м}; 0 \text{ м}; 3 \text{ м})$, $r_1 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 3 \text{ м})$, $r_2 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 0 \text{ м})$ та $\nu = 1,5$

Запропонована методика дозволяє аналізувати вплив кута ϕ нахилу нормалі серединної поверхні біля основи конструкції (див. рис. 8). Отримано $\phi_{\max} = 63,4^\circ$, $N_\phi(0^\circ) = N_\theta(0^\circ) = -130$ Н/м, $N_\phi(63,4^\circ) = -226$ Н/м, $N_\theta(63,4^\circ) = -95,5$ Н/м. Використані геометричні параметри обумовлюють відсутність кільцевих зусиль розтягу.

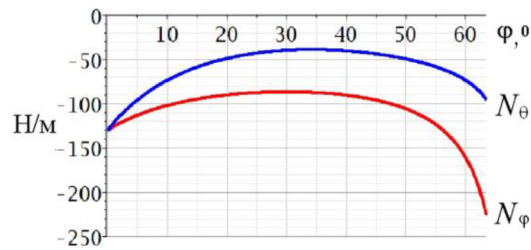


Рис. 8. Зусилля параболоїдного купола з $r_0 = (0 \text{ м}; 0 \text{ м}; 3 \text{ м})$, $r_1 = (1,5 \text{ м}; 0 \text{ м}; 3 \text{ м})$, $r_2 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 0 \text{ м})$ та $w = 1$

Викладений вище матеріал надає уявлення про засоби дослідження параметрів (16)... (17). Опишемо далі відповідні прийоми для виразів (14) і (15). Нехай із певних причин обрано зображений на рис. 6 купол в якості базового. Оцінимо вплив подальшого змінювання зазначених величин (див. рис. 2). Оберемо, для прикладу, різновиди $(R, H) = (R_1, H_1) = (3 \text{ м}, 2 \text{ м})$ та $(R, H) = (R_2, H_2) = (3 \text{ м}, 4 \text{ м})$, тобто варіанти більш низької й високої оболонки. Одержані результати ілюструють рис. 9 і рис. 10.

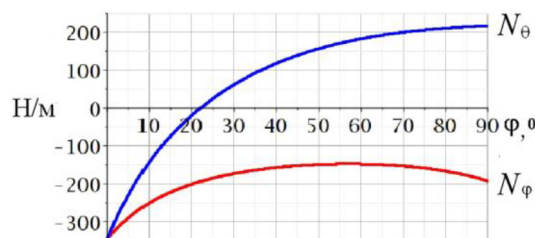


Рис. 9. Зусилля параболоїдної оболонки з $r_0 = (0 \text{ м}; 0 \text{ м}; 2 \text{ м})$, $r_1 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 2 \text{ м})$, $r_2 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 0 \text{ м})$ та $w = 1$

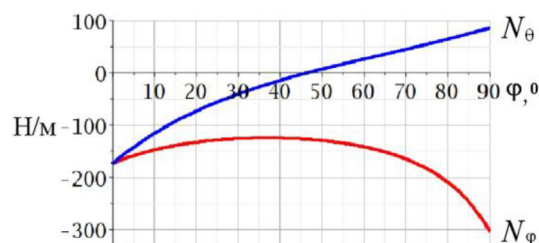


Рис. 10. Зусилля параболоїдного купола з $r_0 = (0 \text{ м}; 0 \text{ м}; 4 \text{ м})$, $r_1 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 4 \text{ м})$, $r_2 = (3 \text{ м}; 0 \text{ м}; 0 \text{ м})$ та $w = 1$

Для першого з них $N_\phi(0^\circ) = -346,5 \text{ Н/м}$, $N_\phi(90^\circ) = -193 \text{ Н/м}$, $N_\theta(0^\circ) = -346,5 \text{ Н/м}$, $N_\theta(90^\circ) = 217 \text{ Н/м}$, для другого $-N_\phi(0^\circ) = N_\theta(0^\circ) = -173 \text{ Н/м}$, $N_\phi(90^\circ) = -304 \text{ Н/м}$, $N_\theta(90^\circ) = 85,5 \text{ Н/м}$. Кожен із розглянутих варіантів має свої переваги та недоліки, Однак, ці питання виходять за рамки тематики даної публікації.

Висновки

У статті викладено запропонований підхід до аналізу впливу геометрії тонкостінних безмоментних куполів обертання, визначених векторними раціональними параметричними кривими другого степеня, на меридіональні та кільцеві зусилля, що виникають під дією власної ваги вказаних оболонкових конструкцій. Перевага такого математичного моделювання, завдяки виконаним узагальненням, полягає у високій гнучкості і продуктивності комп'ютерного формоутворення під час автоматизованого проєктування.

Теоретичними та практичними здобутками розробленої методики варто вважати інтеграцію концептуального архітектурного моделювання з розрахунками на міцність будівель

і споруд. Відновлення зруйнованих об'єктів інфраструктури та культурної спадщини, як зазначалось у вступі, становить актуальне питання для післявоєнного розвитку нашої держави. У випадку ескізного проектування куполів православних каплиць і храмів напрацьовані засоби дозволяють ефективно поєднувати літургійні канони, релігійний символізм із наявними будівельними нормами. Тобто при забезпеченні естетичної привабливості банних завершень, потрібної їхньої унікальності, функціональності, дотриманні існуючих вимог стосовно внутрішнього простору, світлових та акустичних потоків, економічних витрат і т. д., реалізується можливість швидкого знаходження компромісних рішень. Запропоновані прийоми математичного моделювання сприяють скороченню кількості узгоджувальних ітерацій між суперечливими пропозиціями фахівців різного профілю.

Конкретними напрямками вдосконалення викладеного підходу є дослідження куполів зі змінною товщиною оболонок, діючими несиметричними навантаженнями від снігу, вітру тощо. Наведені задачі обумовлюють необхідність проведення подальших наукових розвідок з окресленої тематики.

Список використаної літератури

1. Ventsel E., Krauthammer T. *Thin Plates and Shells. Theory, Analysis, and Applications*. Boca Raton : CRC Press, 2001. 688 p.
2. Bhavikatti S. S. *Theory of Plates and Shells*. New Delhi : New Age International (P) Ltd., Publishers, 2012. 313 p.
3. Терешук М. О. Структурно-параметричний спосіб формоутворення куполів православних храмів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2022. Вип. 103. С. 201–208. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103.201-208>
4. Терешук М. О. Структурно-параметричні геометричні моделі поверхонь куполів православних храмів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2022. Вип. 5. № 1. С. 95–100. DOI: <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-12>
5. Вірченко Г. А., Терешук М. О. Деякі аспекти застосування геометричних моделей для проектування куполів православних храмів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2024. Вип. 106. С. 57–66. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106.57-66>
6. Терешук М. О. Деякі аспекти застосування геометричного моделювання для збереження та відновлення архітектурної спадщини України. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2024. Вип. 107. С. 162–171. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2024.107.162-171>
7. Ковальов С. М., Ботвіновська С. І., Колган А. В. Геометричне моделювання безмоментної оболонки заданої форми. *Управління розвитком складних систем*. 2025. Вип. 61. С. 193–201. DOI: <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.61.193-201>
8. Ботвіновська С. І., Ковальов С. М. Формування дискретного каркаса зрівноваженої нерегулярної сітки дискретно представлені поверхні. *Управління розвитком складних систем*. 2020. № 42. С. 75–81. DOI: <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2020.42.75-81>
9. Vorontsov O., Tulupova L. Vorontsova I. Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. Vol. 7. № 4.8. P. 560–565. DOI: <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.8.27306>
10. Sahu R. R., Gupta P. K. Blast Diffusion by Different Shapes of Domes. *Defence Science Journal*. 2015. Vol. 65. № 1. P. 77–82. DOI: <https://doi.org/10.14429/dsj.65.6908>
11. Яблонський П. М., Вірченко Г. А., Грубич М. В., Терешук М. О. Застосування способу зменшення сфери проектних розв'язків на прикладі аналізу конструкційно-експлуатаційних параметрів ґрунтообробних дисків. *Прикладні питання математичного моделювання*, 2024. Т. 7, № 2. С. 273–281. DOI: <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-24>

12. Dzyuba A. A., Dzyuba A. P., Levitina L. D., Safronova I. A. Mathematical Simulations of Deformation for the Rotation Shells with Variable Wall Thickness. *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*. 2021. Vol.29. Issue 1. P. 79–95. DOI: <https://doi.org/10.15421/142105>

References

1. Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells. Theory, Analysis, and Applications*. Boca Raton : CRC Press. [in English].
2. Bhavikatti, S. S. (2012). *Theory of Plates and Shells*. New Delhi: New Age International (P) Ltd. [in English].
3. Tereshchuk, M. O. (2022). Strukturno-parametrychnyi sposib formoutvorennia kupoliv pravoslavnykh khramiv [Structural-parametric method of shaping domes of Orthodox temples]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 103, 201–208. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103.201-208> [in Ukrainian].
4. Tereshchuk, M. O. (2022). Strukturno-parametrychni heometrychni modeli poverkhon kupoliv pravoslavnykh khramiv [Structural-parametric geometric models of domes surfaces of Orthodox temples]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*, 5.1, 95–100. DOI: <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-12> [in Ukrainian].
5. Virchenko, G. A., & Tereshchuk, M.O. (2024). Deiaki aspekty zastosuvannya heometrychnykh modelei dlia proiektuvannya kupoliv pravoslavnykh khramiv [Some aspects of the application of geometric models for designing of domes of Orthodox temples]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 106, 57–66. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106.57-66> [in Ukrainian].
6. Tereshchuk, M. O. (2024). Deiaki aspekty zastosuvannya heometrychnoho modeliuвання dlia zberezhenia ta vidnovlennia arkhitekturnoi spadshchyny Ukrainy [Some aspects of application of geometric modelling for preservation and restoration of architectural heritage of Ukraine]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, 107, 162–171. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2024.107.162-171> [in Ukrainian].
7. Kovalov, S. M., Botvinovska, S. I., & Kolhan, A. V. (2025). Heometrychne modeliuвання bezmomentnoi obolonky zadanoi formy [Geometrical modelling of a momentless shell of a given shape]. *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*, 61, 193–201. DOI: <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.61.193-201> [in Ukrainian].
8. Botvinovska, S. I., & Kovalov, S. M. (2020). Formuvannya dyskretnoho karkasa zrivnovazhenoi nerekhulyarnoi sitky dyskretno predstavlenoi poverkhni [Formation of a discrete frame of a balanced irregular mesh of a discretely represented surface]. *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*, 42, 75–81. DOI: <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2020.42.75-81> [in Ukrainian].
9. Vorontsov, O., Tulupova, L. & Vorontsova, I. (2018). Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. *International Journal of Engineering & Technology*, 7(4.8), 560–565. DOI: <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.8.27306> [in English].
10. Sahu, R. R., & Gupta, P. K. (2015). Blast Diffusion by Different Shapes of Domes. *Defence Science Journal*, 65, 77–82. DOI: <https://doi.org/10.14429/dsj.65.6908> [in English].
11. Yablonskyi, P. M., Virchenko, G. A., Hrubykh, M. V., & Tereshchuk, M. O. (2024). Zastosuvannya sposobu zmenshennia sfery proiektnykh rozviazkiv na prykladi analizu konstruktsiino-ekspluatatsiinykh parametriv gruntoobrobnykh dyskiv [Application of the method of reducing the area of project solutions on the example of the analysis of design and operational parameters of tillage discs]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*, 7(2), 273–281. DOI: <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2024-7-2-24> [in Ukrainian].
12. Dzyuba, A. A., Dzyuba, A. P., Levitina, L. D., & Safronova, I. A. (2021). Mathematical Simulations of Deformation for the Rotation Shells with Variable Wall Thickness. *Journal of*

Optimization, Differential Equations and their Applications, 29(1), 79–95. DOI: <https://doi.org/10.15421/142105> [in English].

Терещук Микола Олександрович – к.т.н., докторант кафедри архітектурних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури. E-mail: nikolatereschuk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4444-3677.

Вірченко Геннадій Анатолійович – д.т.н., професор, завідувач кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: kpivir@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9586-4538.

Яблонський Петро Миколайович – д.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». E-mail: ypn@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1971-5140.

Tereschuk Mykola Oleksandrovysh – Candidate of Technical Sciences, Doctoral Student at the Department of Architectural Structures of the Kyiv National University of Construction and Architecture. E-mail: nikolatereschuk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4444-3677.

Virchenko Gennadii Anatoliyovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Descriptive Geometry, Engineering and Computer Graphics of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”. E-mail: kpivir@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9586-4538.

Yablonskyi Petro Mykolaiovych – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Descriptive Geometry, Engineering and Computer Graphics of the National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”. E-mail: ypn@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1971-5140.

Дата першого надходження статті до видання: 02.04.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 11.05.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 01.07.2026



Стаття поширюється на умовах ліцензії відкритого доступу (CC BY 4.0)