УДК 519.6

А. Н. ХОМЧЕНКО, І. О. АСТІОНЕНКО
Херсонський національний технічний університет
О. І. ЛИТВИНЕНКО, О. М. ДУДЧЕНКО
Херсонський навчально-науковий інститут
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
П. Й. ГУЧЕК
VIZJA, Варшава, Польща

АЛГОРИТМ КУСКОВО-ПЛАНАРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НА ПОЛІГОНАЛЬНИХ ОБЛАСТЯХ

У статті йдеться про кусково-планарну апроксимацію, яку вперше запропонував Р. Курант, започаткувавши розвиток методу скінченних елементів (МСЕ). Подальше узагальнення основної ідеї Куранта про найпростіші базові функції стало вирішальним кроком у техніці МСЕ. Побудова простих елементів корисна сама собою, але ще важливіше те, що у цих елементах можна переконливо проілюструвати існування глибоких зв'язків між поліноміальною інтерполяцією на скінченному елементі і теорією ймовірностей. У роботі показаний алгоритм конструювання фінітних функцій вищих порядків на елементах у формі квадрата і трикутника з використанням функції-«напівкришки». У кожному трикутнику тріангуляції реалізуємо ідею рандомізації функції Куранта, яку можна отримати як геометричну ймовірність у кожному трикутнику комірки Куранта.

Недоліком стандартної моделі є фізична неадекватність повузлового розподілу рівномірної масової сили (негативізм деяких вузлових навантажень). Такий розподіл один із засновників методу скінченних елементів О. Зенкевич називає протиприродним, незважаючи на його теоретичну достовірність. Досвід роботи О. Зенкевича зі стандартними базисами квадратних скінченних елементів вищих порядків переконав його у тому, що теоретично обґрунтований розподіл вузлових навантажень (навіть, якщо він протиприродний) гарантує більшу точність, ніж рівномірний (або будь-який інший) розподіл, що базується на інженерній інтуїції. Тобто, можна зробити висновок: оптимальні базиси – це такі базиси, які реалізують теоретично і фізично обґрунтовані розподіли вузлових навантажень.

У роботі показано, що цей недолік виникає при виборі методу визначення базових функцій за допомогою матричної алгебри. Нематричні методи конструювання базисних функцій, це один із способів усунення «негативізму» у вузлових розподілах навантажень моделей вищих порядків. Як результат, отримана альтернативна модель бікубічного скінченного елемента серендипового сімейства (елемент 3-го порядку).

Глибока та плідна ідея Куранта про кусково-планарну апроксимацію фінітних функцій отримала просте ймовірнісне тлумачення. Запропонований алгоритм кусково-планарної апроксимації на двовимірних полігональних областях дає наочний та зручний метод конструювання альтернативних базисів, який може бути узагальнений на просторові дискретні елементи.

Ключові слова: *метод тріангуляції, фінітна функція, скінченний елемент, кусково-планарна апроксимація, комірка Куранта, функції-«напівкришки».*

A. N. KHOMCHENKO, I. O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University
O. I. LYTVYNENKO, O. M. DUDCHENKO
Kherson Educational and Scientific Institute
of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding
P. Y. GUCHEK
VIZJA University, Warsaw, Poland

PIECE-PLANAR APPROXIMATION ALGORITHM ON POLYGONAL DOMAINS

The article deals with the piecewise planar approximation, which was first proposed by R. Courant, initiating the development of the finite element method (FEM). Further generalization of Courant's basic idea about the simplest basis functions became a decisive step in the FEM technique. The construction of simple elements is useful in itself, but it is even more significant that these elements can convincingly illustrate deep connections between polynomial interpolation on a finite element and probability theory. The paper shows an algorithm for constructing higher-order finite functions on square and triangle-shaped elements using the so-called "half-cap" function. In each triangulation triangle,

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-40 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

we implement the idea of randomizing the Courant function, which can be obtained as a geometric probability in each triangle of the Courant cell.

The drawback of the standard model is the physical inadequacy of the nodal distribution of uniform mass force (negativism of some nodal loads). One of the founders of the finite element method, O. Zenkevych, described such a distribution as unnatural, despite its theoretical validity. O. Zenkevych's experience with standard bases of square finite elements of higher orders convinced him that a theoretically justified distribution of nodal loads (even if it is unnatural) guarantees greater accuracy than a uniform (or any other) distribution based on engineering intuition. Therefore, it can be concluded that optimal bases are those bases that implement theoretically and physically justified distributions of nodal loads.

The paper shows that this drawback arises when choosing a method for determining basis functions using matrix algebra. Non-matrix methods for constructing basis functions are one of the ways to eliminate "negativism" in the nodal load distributions of higher-order models. As a result, an alternative model of a bicubic finite element of the serendipity family (3rd-order element) was obtained.

Courant's profound and fruitful idea of piecewise-planar approximation of finite functions has received a simple probabilistic interpretation. The proposed algorithm for piecewise-planar approximation on two-dimensional polygonal domains provides a clear and convenient method for constructing alternative bases, which can be generalized to spatial discrete elements.

Keywords: *triangulation method, finite function, finite element, piecewise-planar approximation, Courant cell, "half-cap" functions.*

Постановка проблеми

У статті йдеться про кусково-планарну апроксимацію, яку запропонував Р. Курант у 1943 р. Подальше узагальнення основної ідеї Куранта про найпростіші фінітні функції стало вирішальним кроком у техніці методу скінчених елементів (МСЕ). Ідея Куранта про кусково-лінійну апроксимацію забезпечила успішне розв'язання завдань, що лежать за межами можливостей пануючого в середині XX століття методу скінченних різниць (МСР).

Побудова простих елементів корисна сама собою, але ще важливіше те, що у цих елементах можна переконливо проілюструвати існування глибоких зв'язків між поліноміальною інтерполяцією на скінченному елементі і теорією ймовірностей. У дискретних методах ймовірнісні уявлення дозволяють перейти від «жорстких» стандартних моделей до «м'яких» (за В. І. Арнольдом) альтернативних моделей відновлення фінітних функцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Кусково-лінійні функції часто називають «кришками» («напівкришками»). Їх історія сягає корінням у глибоку давнину. Наприклад, правило важеля Архімеда має пряме відношення до функцій-«напівкришок». Якщо говорити про функції Куранта, слід згадати А. Мьобіуса, який у 1827 р. відкрив барицентричні координати симплексів. Легко довести, що функції Куранта – це барицентричні (трикутні) координати. Ці координати описані практично в кожній публікації МСЕ: статті Куранта [1] та в монографіях [2–4]. За традицією, трикутні координати визначають шляхом складання та розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь СЛАР третього порядку. На прикладі функції Куранта ми покажемо, що кусково-планарна модель має чітко виражену ймовірнісну природу. Цей результат покладено в основу ієрархічної процедури генерування апроксимацій вищих порядків. Ця процедура ефективна не тільки на трикутниках. Накопичено чималий досвід конструювання серендипових поверхонь за допомогою «напівкришок».

Мета дослідження

Мета статті – використовуючи функції-«напівкришки», розробити алгоритм конструювання фінітних функцій вищих порядків на елементах у формі квадрата і трикутника.

Виклад основного матеріалу дослідження

Розглянемо сітку Куранта і комірку Куранта (рис. 1, *а* і 1, *б* відповідно).

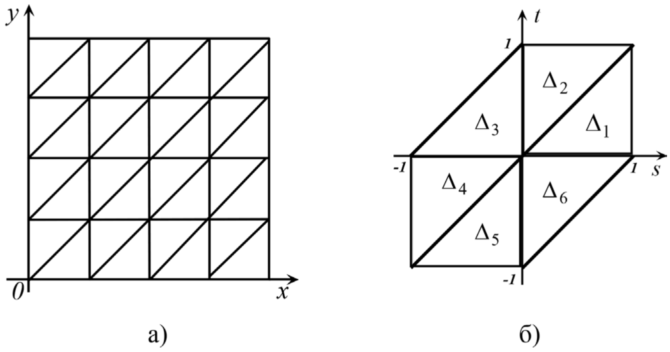

Рис. 1. Сітка Куранта (а) та стандартна комірка Куранта (б)

Алгоритм побудови базисних (координатних) функцій Куранта:

1. Спочатку в квадраті побудуємо сітку з квадратними комірками за допомогою прямих $x = x_i = ih,\ y = y_j = jh,\ h = \dfrac{1}{N},\ N > 0$, ціле число, $i, j = 0, 1, 2, ..., N$. Точки (x_i, y_j) називають вузлами сітки. Кожну квадратну комірку сітки розділимо на два трикутники діагоналлю, що з'єднує південно-західну вершину квадрата з північно-східною (рис. 1, *а*).

2. Кожному вузлу сітки (x_i, y_j) поставимо у відповідність координатну функцію $\varphi_{ij}(x, y)$, яка дорівнює 1 в цьому вузлі, нулю у всіх інших вузлах і лінійну в кожному трикутнику тріангуляції.

3. Щоб записати функцію у довільному вузлі, розглянемо стандартну функцію, відмінну від нуля лише у комірці Куранта (рис. 1б). Функцію Куранта можна отримати як геометричну ймовірність у кожному трикутнику $\Delta_k\ \left(k = \overline{1,6}\right)$ комірки Куранта.

Схема, зображена на рис. 2, *а* ілюструє ідею рандомізації функції Куранта [2]. На рис. 2, *б* показано функція-«кришка» Куранта.

У кожному трикутнику $\Delta_k\ \left(k = \overline{1,6}\right)$ візьмемо поточну точку $M(s, t)$ – вершину трикутника, що лежить навпроти центру комірки Куранта (на рис. 2а ці трикутники заштриховані). У кожен трикутник Δ_k навмання вкидаємо точку і ставимо задачу: знайти ймовірність влучання випадкової точки до заштрихованого трикутника з вершиною $M(s, t)$.

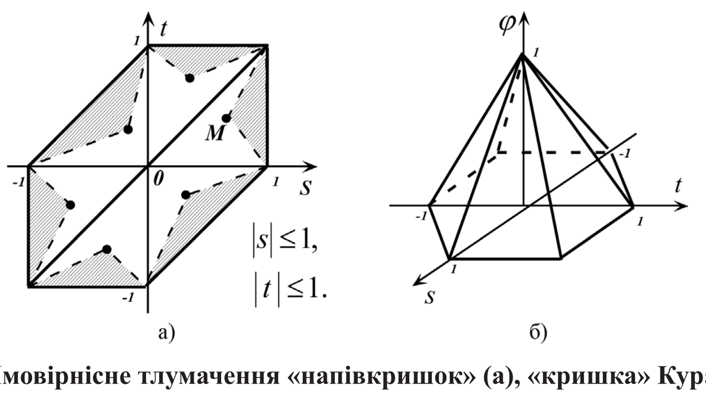

Рис. 2. Ймовірнісне тлумачення «напівкришок» (а), «кришка» Куранта (б)

Так ми отримуємо шість функцій-«напівкришок», які ототожнюють з ймовірністю. Запишемо базис:

$$\begin{aligned} &\phi_1(s,t) = 1 - s, && \phi_4(s,t) = 1 + s, \\ &\phi_2(s,t) = 1 - t, && \phi_5(s,t) = 1 + t, \\ &\phi_3(s,t) = 1 + s - t, && \phi_6(s,t) = 1 - s + t. \end{aligned} \tag{1}$$

Легко помітити, що функцію-«кришку» Куранта можна записати компактно:

$$\varphi(s,t) = 1 - \frac{1}{2}\left(|s| + |t| + |s-t|\right). \tag{2}$$

Тоді $\varphi_{ij}(x,y) = \varphi\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h} - j\right)$, $i, j = 0, 1, ..., N$.

Кусково-планарна апроксимація функції $u(x, y)$ у квадраті Ω набуває вигляду [2]:

$$\overline{u}(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N} u_{ij}\phi_{ij}(x,y), \tag{3}$$

де $u_{ij} = u(x_i, u_j)$ – вузлові значення $u(x, y)$.

Узагальнимо ймовірнісну процедуру побудови «напівкришки» на трикутник, який довільно орієнтований в системі координат $0xy$ (рис. 2). Такі трикутники називають трикутниками Куранта-Тернера [1]. Варто зазначити, що кожна функція (1) у відповідному трикутнику збігається з барицентричною координатою трикутника, що асоціюється з вершиною $O(0, 0)$.

Зауважимо, що у будь-якому осьовому перерізі $t = ks$ піраміди (рис. 2, *б*) ми отримуємо аналог функції-«кришки». Такі моделі використовують у задачах кусково-лінійної апроксимації функцій одного аргументу.

Трикутні пласкі фрагменти – це барицентричні координати довільного трикутника, які дуже зручні у конструюванні трикутників вищих порядків. Нижче, як приклад, ми розглядаємо трикутник четвертого порядку. Цікаво побудувати базис такого елемента на основі ймовірнісних міркувань.

На рис. 3 показані композиції із трикутників Куранта-Тернера, на кожному з яких здійснюється кусково-планарна апроксимація. Особливість моделей вищих порядків у тому, що тепер функції-«напівкришки» перемножуються за правилом множення ймовірностей незалежних подій.

Щоб описати ключові ідеї алгоритму рандомізованого конструювання базисних функцій, треба уважно розглянути процедуру побудови однієї функції, наприклад, N_4 (рис. 3, *б*). Усі фінітні функції трикутника вищого порядку можна виразити через три барицентричні координати основного трикутника 1-2-3. Тут ми маємо справу із трикутником 4-го порядку. Тому щоразу ми використовуємо чотири трикутники із загальною вершиною у контрольному вузлі.

В алгоритмі для побудови N_4 нам знадобляться:

• Трикутники із загальною вершиною 4 : 4-10-13, 4-5-15, 4-2-7 та 4-9-1 (рис. 3, *б*). Це комплекс із 4-х симплексів.

• У термінах геометричної ймовірності ми розглядаємо чотири незалежні події та знаходимо ймовірність спільного настання цих подій. У кожному з чотирьох трикутників вибирається точка $M(L_1, L_2, L_3)$, де L_i – барицентричні координати в основному трикутнику 1-2-3.

• У кожен із перерахованих трикутників із загальною вершиною 4 вкидаємо випадкову точку і обчислюємо ймовірність влучання випадкової точки в трикутник з вершиною M і основою, що є протилежною вершині 4.

Наприклад, ймовірність того, що точка, вкинута в $\Delta_{4\text{-}2\text{-}7}$, потрапила в $\Delta_{M\text{-}2\text{-}7}$, дорівнює $p_1 = \frac{4}{3}L_1$. Імовірність того, що точка, вкинута в $\Delta_{4\text{-}5\text{-}15}$, потрапила до $\Delta_{M\text{-}5\text{-}15}$, дорівнює $p_2 = 2L_1 - \frac{1}{2}$. Ймовірність того, що точка, вкинута в $\Delta_{4\text{-}10\text{-}13}$, потрапила до $\Delta_{M\text{-}10\text{-}13}$, дорівнює $p_3 = 4L_1 - 2$. Ймовірність того, що точка, вкинута в $\Delta_{4\text{-}9\text{-}1}$, потрапила до $\Delta_{M\text{-}9\text{-}1}$, дорівнює $p_4 = 4L_2$.

На трикутному елементі 4-го порядку фінітна функція визначається за правилом добутку знайдених ймовірностей:

$$N_4 = \frac{16}{3}L_1L_3(4L_1 - 1)(2L_1 - 1). \tag{4}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-40 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

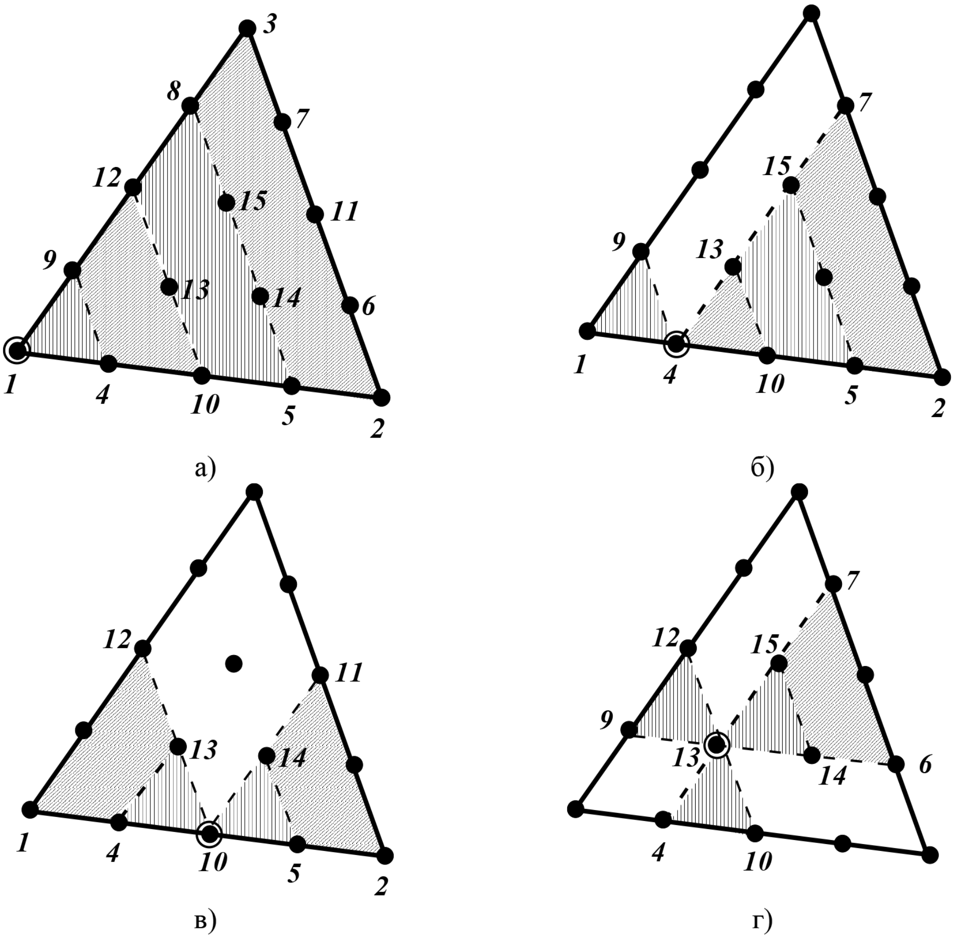

Рис. 3. Схеми до побудови типових базисних функцій:
а) для кутових вузлів; б) для проміжних вузлів на сторонах;
в) для середніх вузлів на сторонах; г) для внутрішніх вузлів

За допомогою означення геометричної ймовірності знаходимо (рис. 3 *а*, 3 *в*, 3, *г* відповідно)

$$N_1 = \frac{1}{3} L_1 \left(4L_1 - 1\right)\left(2L_1 - 1\right)\left(4L_1 - 3\right). \tag{5}$$

$$N_{10} = 4L_1L_2(4L_1 - 1)(4L_2 - 1). \tag{6}$$

$$N_{13} = 32L_1L_2L_3(4L_1 - 1). \tag{7}$$

За зразком (4) легко скласти решту функцій для проміжних вузлів 5, 6, 7, 8, 9. Функції N_2 і N_3 виходять з N_1, N_{11} і N_{12} – із N_{10}, N_{14} і N_{15} – із N_{13}.

Всі 15 функцій побудованого базису мають типові властивості інтерполяційних коефіцієнтів Лагранжа:

$$N_i\left(M_k\right) = \delta_{ik}, \quad \sum_{i=1}^{15} N_i\left(M\right) = 1, \tag{8}$$

де – δ_{ik} символ Кронекера; i – номер функції; k – номер вузла; M – довільна точка в $\Delta_{1\text{-}2\text{-}3}$.

Як бачимо, модель 4-го порядку – це результат «перемноження» кусково-планарних моделей.

Інтерполяційний поліном на трикутнику 4-го порядку (15 вузлів) має вигляд:

$$U\left(M\right) = \sum_{i=1}^{15} N_i\left(M\right) U_i, \tag{9}$$

де U_i – відомі вузлові значення функції $U(M)$.

Недоліком цієї моделі є фізична неадекватність повузлового розподілу рівномірної масової сили («негативізм» деяких вузлових навантажень). Вважають, що цей недолік усунути неможливо. На нашу думку, цей недолік виникає при виборі методу визначення базових функцій зв допомогою матричної алгебри. Наша мета – привернути увагу розробників та користувачів МСЕ до нематричних методів конструювання базисних функцій. До речі, кусково-планарна апроксимація – це один із способів (є й інші) усунення «негативізму» у вузлових розподілах навантажень моделей вищих порядків. Нижче ми побудуємо альтернативну модель бікубічного скінченного елемента серендипового сімейства (елемент 3-го порядку).

На рис. 4 зображено бікубічний елемент серендипового сімейства. На відміну від аналогічного елемента лагранжевого сімейства, тут відсутні внутрішні вузли (їх чотири).

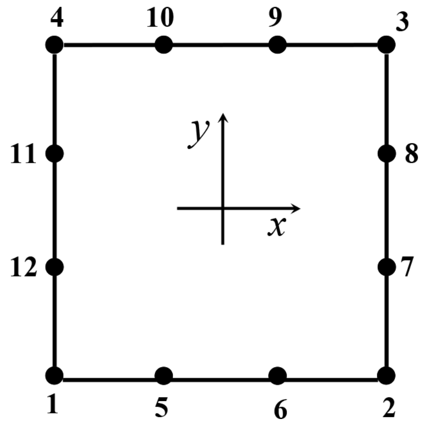

Рис. 4. Бікубічний серендипів ССЕ-12, де $\begin{array}{l}|x| \le 1,\\ |y| \le 1.\end{array}$

Вперше поліноміальний базис ССЕ-12 був отриманий підбором у 1968 р. І. Ергатудіс, В. Айронс і О. Зенкевич назвали його стандартним. Наведемо дві типові функції стандартного базису:

$$\begin{gathered} N_1(x,y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)\left(9\left(x^2+y^2\right)-10\right), \\ N_5(x,y) = \frac{9}{32}\left(1-x^2\right)(1-y)(1-3x). \end{gathered} \tag{10}$$

Враховуючи, що вузли на границі елементу розташовані рівномірно, легко можна записати інші функції базису. Стандартна модель, як відомо [5], призводить до наступного розподілу рівномірного навантаження по вузлах: у кутових вузлах частка навантаження від'ємна і становить $-\frac{1}{8}$, у вузлах на сторонах квадрата вона дорівнює $\frac{3}{16}$. Спектр вузлових навантажень з від'ємними значеннями – основний недолік серендипових елементів вищих порядків. Цікаво, що математично бездоганні методи побудови базисів щоразу призводили до стандартної моделі. Можна назвати наступні методи: матричний, конденсацію, нематричний метод Тейлора. У 1982 р. за допомогою геометричної ймовірності [6] вдалося побудувати першу модель бікубічного серендипового елемента, вільного від негативізму в спектрі вузлових навантажень.

Покажемо, як використовувати кусково-планарну апроксимацію для побудови альтернативного базису ССЕ-12 (рис. 4). Для побудови $N_1(x, y)$ представимо квадрат у вигляді набору чотирьох трикутників: $\Delta_{1\text{-}2\text{-}3}$, $\Delta_{1\text{-}3\text{-}4}$, $\Delta_{1\text{-}6\text{-}11}$ і $\Delta_{1\text{-}5\text{-}12}$ із спільною вершиною 1. У кожному трикутнику вибираємо поточну точку $M(x, y)$ і розглядаємо «вкладені» трикутники з вершиною M та основою, яка протилежна вершині 1. Далі розв'язуємо задачу на геометричну

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2026-9-1-40 ISSN 2618-0332 (print), 2618-0340 (online)

ймовірність. Імовірність того, що випадкова точка, кинута в $\Delta_{1\text{-}2\text{-}3}$, потрапила до $\Delta_{M\text{-}2\text{-}3}$, дорівнює $p_1 = \frac{1}{2}(1-x)$. Аналогічно, для $\Delta_{1\text{-}3\text{-}4}$: $p_2 = \frac{1}{2}(1-y)$. Для $\Delta_{1\text{-}6\text{-}11}$: $p_3 = \frac{1}{4}(-2-3x-3y)$. Для $\Delta_{1\text{-}5\text{-}12}$: $p_4 = \frac{1}{4}(-4-3x-3y)$. За формулою добутку ймовірностей незалежних подій

$$N_1(x,y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(2+3x+3y)(4+3x+3y). \tag{11}$$

При побудові $N_5(x, y)$ розглядаємо трикутники: $\Delta_{5\text{-}2\text{-}3}$, $\Delta_{5\text{-}4\text{-}1}$, $\Delta_{5\text{-}6\text{-}10}$ і $\Delta_{5\text{-}3\text{-}4}$. Відповідні ймовірності такі:

$$p_1 = \frac{3}{4}(1-x), \quad p_2 = \frac{3}{2}(1+x), \quad p_3 = \frac{1}{2}(-3x-y), \quad p_4 = \frac{1}{2}(1-y).$$

За правилом перемноження ймовірностей отримуємо

$$N_5(x,y) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(-3x-y). \tag{12}$$

Інші функції альтернативного базису бікубічної інтерполяції легко отримати з (11) та (12) перестановкою координат x і y.

Тут ми маємо справу з природним дискретним розподілом одиничного навантаження по вузлах: у кутових вузлах: $\frac{1}{8}$, у проміжних: $\frac{1}{16}$. Цей результат підтвердив важливу можливість отримання фізично адекватного спектра вузлових навантажень на серендиповому бікубічному елементі. Якщо потрібна корекція спектра, можна скористатися зваженим усереднення стандартного (10) і альтернативного (11) і (12) базисів. Інші способи генерування альтернативних моделей серендипових елементів можна дізнатися з публікацій [7–11].

Висновки

Глибока та плідна ідея Куранта про кусково-планарну апроксимацію фінітних функцій отримала просте ймовірнісне тлумачення. Запропонований алгоритм кусково-планарної апроксимації на полігональних областях дає наочний та зручний метод конструювання альтернативних базисів на трикутних та квадратних елементах вищих порядків на площині і у просторі.

Список використаної літератури

1. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1943. № 49. P.1–23.
2. Mitchell A.R., Wait R. The Finite Element Method in Partial Differential Equations. London : John Wiley & Sons, 1977. 198 p.
3. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs : Prentice-Hall. Inc, New Jersey, 1973. 306 p.
4. Gallagher R. H. Finite Element Analysis fundamentals, Englewood Cliffs : Prentice-Hall. Inc, New Jersey. 1975. 420 p.
5. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. (Ed.). The Finite Element Method. (Vols. 1–2). Oxford : Butterworth Heinemann, 2000.
6. Хомченко А. Н. Деякі імовірнісні аспекти МСЕ: депонований рукопис. Інститут нафти та газу. Івано-Франківськ, 1982. 9 с. Депоновано у ВІНІТІ, № 1213 від 18.03.82.
7. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. Когнітивно-графічний аналіз ієрархічних базисів скінченних елементів. Монографія. Херсон : ОЛДІ-плюс, 2019. 260 с.

8. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. «Дута» мода як когнітивна модель побудови трикутника третього порядку. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 2. С. 110–117. DOI: https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.10
9. Хомченко А. Н., Тендітна Н. В., Литвиненко О. І., Дудченко О. М., Астіоненко І. О. Кусково-планарне моделювання базисів мішаних серендипових елементів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2020. Т. 3, № 2.2. С. 283–292. DOI: https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.28
10. Guchek P., Litvinenko O., Astionenko I., Dudchenko O. Multiparametric basis functions on the finite element Q12. *International Conference On Industry Sciences and Computer Sciences Innovation*. Proceedings of the Conference iSCSi'2024. 29–31 October 2024. Portugal. Procedia *Computer Science*, Vol. 263. Lisbon : Portugal, 2025. P. 608–618. https://doi.org/10.1016/j.procs.2025.07.073.
11. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Дудченко О. М., Гучек П. Й., Астіоненко І. О. Серендипові скінченні елементи: геометричні підходи розв'язання задачі апроксимації в методі скінченних елементів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2025. Т. 8, № 2. С. 281–287. https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-2-29

References

1. Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *49*, 1–23 [in English].
2. Mitchell, A. R., & Wait, R. (1977). *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*, London : John Wiley & Sons [in English].
3. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, Inc., New Jersey [in English].
4. Gallagher, R. H. (1975). *Finite Element Analysis fundamentals*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. Inc, New Jersey [in English].
5. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (Ed.). (2000). *The Finite Element Method*. (Vols. 1–2). Oxford : Butterworth-Heinemann [in English].
6. Homchenko, A. N. (1982). *Nekotoryie* veroyatnostnyie aspektyi metoda konechnyih elementov. [Some probabilistic aspects of the FEM] [*Working paper*] Ivano-Frankovskiy In-t nefti i gaza, 9 s. Dep. v VINITI 18.03.1982, № 1213 [in Ukrainian].
7. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O. I., & Astionenko, I. O. (2019). *Kohnityvno-hrafichnyi analiz iierarkhichnykh bazysiv skinchennykh elementiv*. [Cognitively Graphical Analysis of Hierarchical Bases of Finite Elements]. Monohrafiia. Kherson : OLDI-plius,. [in Ukrainian].
8. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O. I., & Astionenko, I. O. (2019). "Duta" moda yak kohnityvna model pobudovy trykutnyka tretoho poriadku. ["Blown" mode as cognitive model of building the triangle of third order]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. *2* (2), 110–117. DOI: https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.10 [in Ukrainian].
9. Khomchenko, A. N., Tenditna, N. V., Lytvynenko, O. I., Dudchenko, O. M., & Astionenko, I. O. (2020). Kuskovo-planarne modeliuvannia bazysiv mishanykh serendypovykh elementiv [Piecewise-planar modeling of bases ofmixed serendypity elements]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia. 3* (2.2), 283–292. DOI: https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.28 [in Ukrainian].
10. Guchek, P., Litvinenko, O., Astionenko, I., & Dudchenko, O. (2025). Multiparametric basis functions on the finite element Q12. *International Conference On Industry Sciences and Computer Sciences Innovation*. Proceedings of the Conference iSCSi'2024. Portugal. *Procedia Computer Science*, *263*. Lisbon : Portugal, 2025. 608–618. https://doi.org/10.1016/j.procs.2025.07.073 [in English].

11. Khomchenko, A., Lytvynenko, O., Dudchenko, O., Guchek, P., & Astionenko, I. (2025). Serendypovi skinchenni elementy : heometrychni pidkhody rozviazannia zadachi aproksymatsii u metodi skinchennykh elementiv [Serendipity Finite Elements : geometric approaches to solving the approximation problem in the Finite Element Method]. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*, *8* (2), 281–287. URL: https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-2-29 [in Ukrainian].

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, заслужений професор Херсонського національного технічного університету. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри інформатики і комп'ютерних наук Херсонського національного технічного університету. E-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Дудченко Олег Миколайович – к.т.н., професор кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін, заступник директора з навчальної роботи Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. E-mail: kbnuos@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7724-0892.

Гучек Петро Йосипович – д.т.н., доцент факультету комп'ютерних наук Економіко-гуманітарної Академії у Варшаві (VIZJA, Варшава, Польща). E-mail: phuchek@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6110-6816.

Khomchenko Anatolij Nykyforovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Honored Professor of the Kherson National Technical University. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Astionenko Ihor Oleksandrovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Informatics and Computer Science of the Kherson National Technical University. E-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.

Lytvynenko Olena Ivanivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding. E-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Dudchenko Oleg Mykolaiovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding. E-mail: kbnuos@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7724-0892.

Guchek Petro Yosypovych – Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor at the Faculty of Computer Sciences of University of Economics and Human Sciences in Warsaw (VIZJA, Poland). E-mail: phuchek@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6110-6816.

Дата першого надходження статті до видання: 10.04.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 13.05.2026
Дата публікації (оприлюднення) статті: 01.07.2026