

МОДЕЛЮВАННЯ РАДІОФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У МІКРОКОНТРОЛЕРНИХ СИСТЕМАХ БПЛА З ВИКОРИСТАННЯМ СХЕМ АПРОКСИМАЦІЇ

У статті представлено детерміновані та стохастичні моделі радіофізичних процесів у мікроконтролерних системах безпілотних літальних апаратів (БПЛА). Мета роботи – ідентифікація параметрів стохастичної моделі на основі емпіричних осцилографічних вимірювань напруги живлення МК при різних режимах роботи тягової системи. Методологія поєднує два взаємодоповнюючі етапи. На теоретичному етапі будується детермінована модель динаміки сигналу у просторі станів, після чого обґрунтовується включення випадкових збурень у вигляді марковських процесів перемикання. Застосування принципу усереднення та дифузійної апроксимації в асимптотичній границі швидкого перемикання ($\epsilon \rightarrow 0$) призводить до стохастичного диференціального рівняння типу Орнштейна–Уленбека для компоненти напруги живлення $P(t)$, яке визначає два ключові параметри: швидкість релаксації α та інтенсивність дифузії σ . На експериментальному етапі ці параметри ідентифікуються за прямими осцилографічними вимірюваннями напруги живлення МК (осцилограф FNIRSI DS215H, квадрокоптер SpeedyBee F405 V3/STM32F405) при чотирьох профілях навантаження тягової системи (0 %, 5 %, 10 %, 40 %). Параметр релаксації α визначається апроксимацією експоненціального затухання відгуку під час циклу 0 % \rightarrow 20 % \rightarrow 0 %, а коефіцієнт дифузії σ – через умову стаціонарності $\sigma = V_{rms} \cdot \sqrt{(2\alpha)}$. Результати вимірювань підтвердили статистично значущу кореляцію між навантаженням тягової системи та інтенсивністю стохастичних флуктуацій напруги: ідентифіковані значення $\alpha = 63,0 \text{ c}^{-1}$ та σ від $315,6 \cdot 10^{-3} \text{ B} \cdot \text{c}^{-1/2}$ (10 % навантаження) до $632,0 \cdot 10^{-3} \text{ B} \cdot \text{c}^{-1/2}$ (40 % навантаження) забезпечують кількісну основу для оцінки надійності алгоритмів керування в умовах стохастичних електромагнітних збурень. Стаціонарна дисперсія $\text{Var}_\infty(U) = \sigma^2 / (2\alpha)$ зростає більш ніж вчетверо при переході від 10 % до 40 % навантаження, що є безпосереднім кількісним індикатором зниження надійності системи. Ключовим внеском є поєднання стохастичного моделювання з експериментальною ідентифікацією параметрів в умовах реалістичних електромагнітних завод.

Ключові слова: БПЛА, радіофізичні процеси, стохастичні диференціальні рівняння, стохастичні моделі, марківське перемикання, дифузійна апроксимація, процес Орнштейна–Уленбека.

V. V. SHVEDIUK

The National University of Ostroh Academy

MODELING OF RADIOPHYSICAL PROCESSES IN UAV MICROCONTROLLER SYSTEMS USING APPROXIMATION SCHEMES

The paper presents deterministic and stochastic models of radiophysical processes in the microcontroller (MCU) systems of unmanned aerial vehicles (UAVs). The study aims to identify the parameters of a stochastic model based on empirical oscillographic measurements of the MCU supply voltage under various operating modes of the propulsion system. The methodology integrates two complementary stages. At the theoretical stage, a deterministic model of signal dynamics in state space is constructed, followed by a justification for including random perturbations in the form of Markov switching processes. Applying the averaging principle and diffusion approximation in the asymptotic limit of fast switching ($\epsilon \rightarrow 0$) leads to an Ornstein–Uhlenbeck stochastic differential equation for the supply voltage component $P(t)$, which defines two key parameters: the relaxation rate α and the diffusion intensity σ . At the experimental stage, these parameters are identified through direct oscillographic measurements of the MCU supply voltage (using an FNIRSI DS215H oscilloscope and a SpeedyBee F405 V3/STM32F405 quadcopter) across four propulsion system load profiles (0 %, 5 %, 10 %, 40 %). The relaxation parameter α is determined by approximating the exponential decay of the transient response during a 0 % \rightarrow 20 % \rightarrow 0 % cycle, while the diffusion coefficient σ is derived from the stationarity condition $\sigma = V_{rms} \cdot \sqrt{(2\alpha)}$. The measurement results confirmed a statistically significant correlation between the propulsion system load and the intensity of stochastic voltage fluctuations. The identified values of $\alpha = 63,0 \text{ c}^{-1}$ and σ ranging from $315,6 \cdot 10^{-3} \text{ B} \cdot \text{c}^{-1/2}$ (10 % load) to $632,0 \cdot 10^{-3} \text{ B} \cdot \text{c}^{-1/2}$ (40 % load) provide a quantitative basis for evaluating the reliability of control algorithms under stochastic electromagnetic disturbances. The stationary variance $\text{Var}_\infty(U) = \sigma^2 / (2\alpha)$ increases more than fourfold when transitioning from 10 % to 40 % load, serving as a direct quantitative indicator of decreased system reliability. The key contribution of this work is the synthesis of stochastic modeling with experimental parameter identification under realistic electromagnetic interference conditions.

Keywords: UAV, radiophysical processes, stochastic differential equations, stochastic models, Markov switching, diffusion approximation, Ornstein–Uhlenbeck process.

Постановка проблеми

Стрімкий розвиток і масове впровадження безпілотних літальних апаратів (БПЛА) як у цивільному, так і у військовому секторах висунули безпрецедентні вимоги до надійності їхніх бортових електронних систем [1]. Сучасні БПЛА є складними кіберфізичними системами, де мікроконтролер (МК) виступає центральним вузлом, що обробляє високочастотні дані датчиків і виконує алгоритми керування у режимі реального часу. Стійкість функціонування цих систем є критично важливим фактором, особливо в складних умовах експлуатації, що характеризуються високим рівнем електромагнітних завад (ЕМЗ) [2] та нестационарними механічними навантаженнями.

Математичне моделювання радіофізичних процесів у мікроконтролерних системах БПЛА є фундаментальним завданням для забезпечення цієї стабільності. Традиційно такі процеси описувалися детерміністичними моделями, здатними відтворювати базову динаміку ключових параметрів сигналу – амплітуди, фази та потужності – в ідеальних або контрольованих умовах. Проте детерміністичні підходи часто не враховують складнощів реальних умов експлуатації. Експериментальні дані свідчать про те, що сигнали в системах БПЛА зазнають значних флуктуацій, фазового шуму та випадкових відхилень. Ці явища зумовлені передусім нестабільним рівнем напруги живлення, цифровими перехресними завадами між високошвидкісними компонентами та інтенсивними електромагнітними полями, що генеруються безколекторними двигунами постійного струму (BLDC) тягової системи.

Існуючі дослідження у галузі стохастичних систем, зокрема роботи Королюка В. С., Самойленка І. В. та Чабанюка Я. М. [3–7], забезпечують надійну теоретичну базу для аналізу еволюційних систем під дією випадкових збурень. Хоча в багатьох роботах шум трактується як простий адитивний гаусівський білий шум, реальні перехідні процеси в БПЛА краще описуються як багатомасштабні процеси з дискретними перемиканнями між різними режимами роботи. Ці стохастичні ефекти не можуть бути адекватно представлені суто детерміністичними рівняннями, що обумовлює необхідність переходу до більш досконалої стохастичної методологічної бази.

У цій роботі ми пропонуємо методологію, що усуває розрив між теоретичним матричним моделюванням та експериментальними даними. Спочатку будується детерміністична матрична модель динаміки сигналу. Надалі обґрунтовується включення випадкових збурень, змодельованих як швидкі марківські процеси перемикання. Демонструється, що в асимптотичній границі ці збурення призводять до стохастичного диференціального рівняння дифузійного типу у формі Орнштейна–Уленбека [8]. Цей процес особливо придатний для моделювання поведінки «повернення до середнього» у флуктуаціях напруги живлення під навантаженням.

Основна мета цієї роботи полягає в ідентифікації параметрів отриманої стохастичної моделі на основі емпіричних осцилографічних вимірювань напруги живлення мікроконтролерної системи БПЛА. Аналізуючи систему при різних навантаженнях на тягову систему (від холостого ходу до максимальної тяги), ми прагнемо забезпечити кількісну основу для оцінки впливу інтенсивності електричних шумів на надійність алгоритмів керування.

Робота охоплює теоретичне обґрунтування стохастичної моделі, її експериментальну параметричну ідентифікацію та практичну інтерпретацію результатів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз стабільності сигналів у системах БПЛА традиційно здійснювався методами детермінованої теорії керування. Проте зростаюча складність польотних місій та середовище електромагнітних завад спонукали дослідників до стохастичного моделювання. Основоположна робота з процесами Орнштейна–Уленбека [8] заклала підґрунтя для моделювання систем з властивістю «повернення до середнього», характерною для регуляторів напруги мікроконтролерів. У роботах [3–7] проводився асимптотичний аналіз, що дозволяє спрощувати складні

марковські системи перемикавання до неперервних дифузійних процесів. У контексті БПЛА більшість сучасних досліджень зосереджується на злитті даних датчиків (наприклад, розширені фільтри Калмана) для придушення шуму. Однак у цих роботах зазвичай припускається, що шум є стаціонарним гаусівським білим шумом, тоді як реальні радіофізичні процеси у вбудованих цифрових системах демонструють нестационарний фазовий шум та флуктуації, пов'язані з живленням, що спричиняються комутаційною електронікою. Ця робота відрізняється від існуючої в літературі тим, що безпосередньо пов'язує фізичне навантаження тягової системи (комутація ESC та індукція двигуна) зі стохастичними параметрами α та σ блоку живлення мікроконтролера, забезпечуючи підхід «знизу вгору» до надійності системи.

Мета дослідження

У роботі застосовується комбінована теоретично-експериментальна методологія, що охоплює два взаємодоповнюючих етапи. На першому, теоретичному, етапі будується детерміністична матрична модель динаміки радіофізичних сигналів у мікроконтролерній системі БПЛА, після чого за допомогою марківського процесу перемикавання вводяться стохастичні збурення. Далі в границі швидкого марківського перемикавання ($\varepsilon \rightarrow 0$) застосовується асимптотичний аналіз – зокрема принцип усереднення та дифузійне наближення – для виведення зведеного стохастичного диференціального рівняння типу Орнштейна–Уленбека, що описує компоненту напруги живлення $P(t)$. Ця теоретична побудова визначає структурну форму моделі та ідентифікує фізично значущі параметри: швидкість релаксації α та інтенсивність дифузії σ .

На другому, експериментальному, етапі параметри виведеної стохастичної моделі ідентифікуються за прямими осцилографічними вимірюваннями напруги живлення МК при чотирьох контрольованих профілях навантаження тягової системи (0 %, 5 %, 10 % та 40 %). Параметр релаксації α визначається апроксимацією експоненціального затухання перехідного відгуку напруги, зареєстрованого під час циклу навантаження 0 % \rightarrow 20 % \rightarrow 0 %, тоді як коефіцієнт дифузії σ обчислюється при кожному сталому навантаженні з вимірюваного середньоквадратичного значення флуктуацій напруги (V_{rms}) через умову стаціонарності $\sigma = V_{rms} \sqrt{2\alpha}$. Ідентифіковані параметри надалі використовуються для обчислення стаціонарної дисперсії $\text{Var}_{\infty}(U) = \sigma^2 / (2\alpha)$ та оцінювання ймовірності перевищення критичного порогу напруги, що забезпечує кількісну основу для оцінки надійності бортових алгоритмів керування в умовах реалістичних електромагнітних завад.

Виклад основного матеріалу дослідження

Детермінована модель динаміки сигналу

Базове представлення радіофізичних процесів у мікроконтролерній системі БПЛА ґрунтується на підході вектора стану. Визначимо стан системи в довільний момент часу t вектором:

$$u(t) = \begin{pmatrix} A_s(t) \\ \phi(t) \\ P(t) \end{pmatrix},$$

де $A_s(t)$ представляє амплітуду сигналу, $\phi(t)$ є фазою, а $P(t)$ позначає миттєве споживання потужності або рівень напруги живлення.

Еволюція цієї системи в детерміністичному середовищі визначається лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{du(t)}{dt} = Cu(t),$$

де

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha(t) & 0 & 0 \\ 0 & \omega(t) & 0 \\ \beta(t) & 0 & \gamma(t) \end{pmatrix},$$

$\alpha(t)$ коефіцієнт згасання амплітуди сигналу; $\omega(t)$ миттєва кутова частота носія;

$\gamma(t)$ коефіцієнт втрат потужності;

$\beta(t)$ коефіцієнт зв'язку між амплітудою сигналу та потужністю.

Примітка: При подальшій експериментальній ідентифікації (розділ 6) скалярний параметр релаксації α Орнштейна–Уленбека відповідає діагональному елементу $\gamma(t)$ матриці C , що керує компонентою живлення $P(t)$, і не повинен плутатися з коефіцієнтом загасання амплітуди сигналу $\alpha(t)$ у першому рядку матриці C .

Схема усереднення

Еволюційна система з випадковими збуреннями у схемі серій з малим параметром $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) визначається розв'язком еволюційного рівняння [7]:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = C\left(u^\varepsilon(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \quad t \geq 0,$$

де функція швидкості $C(u; x)$, $u \in \mathbb{R}^d$, $x \in X$.

Передбачається, що існує розв'язок сімейства рівнянь:

$$\frac{du_x(t)}{dt} = C(u_x(t), x), \quad x \in X.$$

Випадкові збурення визначаються марківським стрибковим процесом $x(t)$, $t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі (X, \mathcal{F}) , заданим породжуючим оператором (генератором) Q у банаховому просторі $\mathbb{B}(E)$ пробних функцій $\varphi(x) \in \mathbb{B}(E)$:

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)].$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначає рівномірно ергодичний вбудований ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$ зі стаціонарним розподілом $\rho(B)$.

Стаціонарний розподіл $\pi(B)$ марківського процесу $x(t)$ визначається співвідношенням:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \quad q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Принцип усереднення

Якщо марківський процес збурень $x(t)$ є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, то за умов, сформульованих вище, має місце слабка збіжність:

$$u^\varepsilon(t) \xrightarrow{d} u^0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Гранична еволюція $u^0(t)$ визначається розв'язком детерміністичного еволюційного рівняння:

$$\frac{du^0(t)}{dt} = \widehat{C}(u^0(t)), \quad t \geq 0,$$

де усереднена функція швидкості визначається співвідношенням:

$$\widehat{C}(u) = \int_E \pi(dx)C(u; x).$$

Дифузійна апроксимація

Умова балансу для динамічної системи:

$$\hat{C}(u) = \int_E \pi(dx) C(u; x) \equiv 0.$$

За умови балансу усереднена система зберігає постійне значення на нескінченному часовому інтервалі.

У цьому зв'язку виникає задача дослідження флуктуацій динамічної системи, яку за умов балансу слід розглядати з такою нормалізацією:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon^{-1} C\left(u^I(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right).$$

Дифузійна апроксимація динамічної системи

Якщо процес марковських збурень $x(t)$ є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, то за умови балансу має місце слабка збіжність:

$$u^\varepsilon(t) \xrightarrow{d} \zeta^0(t), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Граничний дифузійний процес $\zeta^0(t)$ визначається генератором:

$$\mathbb{L}\varphi(u) = b(u)\varphi'(u) + \frac{1}{2}B(u)\varphi''(u),$$

де:

$$b(u) = \int_x \pi(dx) b(u; x), b(u; x) = C(u; x) R_0 C'_u(u; x);$$

$$B(u) = \int_x \pi(dx) B(u; x), B(u; x) = C(u; x) R_0 C(u; x),$$

а потенціал ергодичного марківського процесу дорівнює:

$$R_0 = \int_0^\infty [\exp(Qt) - \Pi] dt.$$

Процес граничної дифузії $\zeta^0(t)$ також визначається розв'язком стохастичного диференціального рівняння:

$$d\zeta^0(t) = b(\zeta^0(t))dt + \sigma(\zeta^0(t))dW(t),$$

де

$$\sigma^2(u) = B(u)$$

та $W(t)$ є стандартним вінерівським процесом.

Експериментальне налаштування та методологія

Апаратна конфігурація та платформа БПЛА

Для підтвердження запропонованої стохастичної моделі було проведено експериментальне дослідження з використанням платформи квадрокоптера з 7-дюймовою рамою. Апарат оснащено стекмом SpeedyBee F405 V3 з мікроконтролером STM32F405 як основним блоком керування польотом. Цей МК відповідає за злиття даних датчиків у реальному часі та виконання контурів ПІД-регулятора, що робить його надзвичайно чутливим до якості напруги живлення.

Тягова система складається з потужних безколекторних двигунів 2807 1300KV, типових для БПЛА дальньої дії та з великою підйомною силою. Ці двигуни, що керуються регулятором швидкості (ESC) на 50 А, генерують значні зворотні електромагнітні поля (back-EMF) та

високочастотні комутаційні шуми. Радіозв'язок підтримується через приймач ELRS 915 МГц, що працює в діапазоні частот, де потрібна точна стабілізація напруги для запобігання джитеру сигналу. Живлення забезпечує літій-полімерний акумулятор (LiPo) 6S1P (номінальна напруга 22,2 В), що забезпечує необхідну енергощільність для тягової системи, але також збільшує амплітуду пульсацій напруги під навантаженням.

Вимірювальне обладнання

Флуктуації напруги в мережі живлення мікроконтролера реєструвалися за допомогою цифрового запам'ятовуючого осцилографа FNIRSI DS215H. Прилад має аналогову смугу пропускання 200 МГц та частоту дискретизації в реальному часі 500 MS/c, що з надлишком достатньо для виявлення швидких перехідних процесів, спричинених двигунами 1300KV та циклами комутації ESC.

Для виділення стохастичної складової з постійного зміщення постійного струму осцилограф було налаштовано у режим АС-зв'язку. Це дозволило проводити високороздільний аналіз флуктуацій (пульсацій) рівня мілівольт. Щуп підключався безпосередньо до шин живлення 5В/3,3В на виводах МК, щоб виміряні дані відображали реальне шумове середовище цифрової логіки. Частота дискретизації 1 МГц підтримувалася під час реєстрації даних для захоплення детальної структури «стрибків» і сплесків шуму, формуючи основу для подальшої ідентифікації параметрів процесу Орнштейна–Уленбека.

Процедура експерименту та профілі навантаження

Експеримент було розроблено для спостереження за змінами стохастичних параметрів при різних режимах роботи. Чотири окремі профілі навантаження визначено на основі потужності тягової системи:

а) Режим очікування (0 %): Усі двигуни вимкнені; активні лише МК та бортові датчики. Це представляє базовий тепловий та цифровий шум.

б) Мала тяга (5 % навантаження): Двигуни обертаються на мінімальній швидкості; початкова індукція електромагнітних завад.

в) Середнє навантаження (10 % навантаження): Проміжне навантаження; двигуни на низькій робочій швидкості з підвищеними ЕМЗ.

г) Велике навантаження (40 % навантаження): Відповідає швидкому маневруванню або набору висоти, де ESC працюють при великих коефіцієнтах заповнення.

На додаток до чотирьох сталих профілів було виконано допоміжний запис перехідного процесу з профілем навантаження 0 % → 20 % → 0 % (рис. 5). Цей проміжний профіль розроблено спеціально для захоплення чітко вираженого перехідного процесу релаксації напруги з метою ідентифікації параметра релаксації α процесу Орнштейна–Уленбека.

Для кожного режиму записувався безперервний часовий ряд даних напруги. Ці точки даних використовувалися для обчислення статистичних моментів, необхідних для ідентифікації коефіцієнтів дрейфу (α) та дифузії (σ) процесу Орнштейна–Уленбека.

Аналіз стаціонарної дисперсії та ймовірності збою

Ідентифіковані параметри α та σ дозволяють кількісно оцінити стаціонарну дисперсію системи. Для процесу Орнштейна–Уленбека стаціонарна дисперсія V визначається як:

$$Var^{\infty} = \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Використовуючи експериментальні дані при навантаженні 40 % ($\alpha = 63.0 \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 632.0 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s}^{-1/2}$), розрахована дисперсія значно вища, ніж для режимів холостого ходу або малого навантаження. Це збільшення дисперсії безпосередньо впливає на ймовірність перевищення напругою живлення критичного порогу надійності V_{crit} .

Ймовірність того, що флуктуація U_i перевищить поріг δ можна оцінити за допомогою властивостей стаціонарного гаусівського розподілу:

$$P(|U_i| > \delta) = 2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}_{\infty}(U)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\text{Var}_{\infty}(U)}\right) dx.$$

Зі σ зростає, і ця ймовірність зростає нелінійно. Практично це означає, що хоча система може видаватись стабільною в середньому, частота перехідних «збоїв», що можуть спричинити пошкодження даних датчиків або скидання МК через провал напруги, різко зростає при маневрах з великою тягою.

Спектральна інтерпретація та апаратні заходи усунення завад

Хоча процес Орнштейна–Уленбека забезпечує макроскопічний стохастичний опис шуму, його фізичні причини пов'язані з високочастотною комутацією регуляторів швидкості (ESC). Очікується, що частоти комутації ESC (як правило, в діапазоні 24–48 кГц) формують домінуючі спектральні піки у шумі напруги живлення, виступаючи основними фізичними рушіями марківського процесу перемикавання $x(e/\epsilon)$.

Для зменшення ідентифікованої інтенсивності дифузії σ , впровадження електrolітичних конденсаторів з низьким ESR (еквівалентним послідовним опором) є вкрай важливим. Математично додавання конденсатора збільшує «електричну інерцію» системи, що безпосередньо корелює зі збільшенням параметра релаксації α . Більше значення α гарантує, що будь-який стохастичний «стрибок» напруги пригнічується швидше, повертаючи систему до рівноважного стану U_0 до того, як він може спровокувати логічну помилку МК.

Експериментальна ідентифікація $\alpha = 63.0 \text{ s}^{-1}$ вказує на те, що для стека SpeedyBee F405 V3 під навантаженням двигунів 2807 існуюча фільтрація перебуває на межі своїх можливостей. Для БПЛА відповідального призначення ми рекомендуємо підхід спільного проектування апаратного та програмного забезпечення: збільшення фізичної ємності для підвищення α при одночасному налаштуванні цифрових фільтрів нижніх частот у польотному контролері з урахуванням ідентифікованих σ значень.

Результати дослідження та ідентифікація параметрів

Аналіз осцилограм у сталих режимах

Експериментальні дані, отримані за допомогою осцилографа FNIRSI DS215H, демонструють статистично значущу кореляцію між навантаженням тягової системи та інтенсивністю стохастичних флуктуацій у блоці живлення МК.

Аналіз осцилографічних вимірювань напруги живлення (табл. 1) показав, що зі збільшенням навантаження інтенсивність стохастичної складової процесу значно зростає. В режимах роботи тягової системи спостерігається перехід від майже стаціонарного гаусівського шуму до процесів з імпульсними збуреннями, що обґрунтовує застосування стохастичних моделей з дифузійними та стрибковими компонентами.

У випадку, коли динаміка сигналу описується системою диференціальних рівнянь, а випадковість середовища моделюється процесом перемикавання $x(t)$, система набуває вигляду

$$\frac{du(t)}{dt} = C(x(t), u(t)).$$

Припускаючи, що процес $x(t)$ є ергодичним та має стаціонарну міру, можна усереднити динаміку за цією мірою. В границі швидкого перемикавання випадкового середовища флуктуації навколо усередненого руху породжують дифузійний член, і система описується стохастичним диференціальним рівнянням вигляду

Таблиця 1

Результати осцилографічних вимірювань за чотирьох умов навантаження (пікова амплітуда, виміряна осцилографом)

Навантаження	V_{pp} , mV	Amp , mV*	V_{rms} , mV	Градація V_{rms}	Тип процесу
Двигуни вимкнені (рис. 1)	62.5	25.0	~0	V_0	Квазістаціонарний шум
При 5 % навантаженні (рис. 2)	81.3	62.5	9.38	$V_1 > V_0$	Гаусівський процес
При 10 % навантаженні (рис. 3)	225.0	75.0	28.1	$V_2 \gg V_0$	Стационарний стохастичний процес
При 40 % навантаження (рис. 4)	287.5	66.7	56.3	$V_3 \gg V_2$	Дифузійний процес

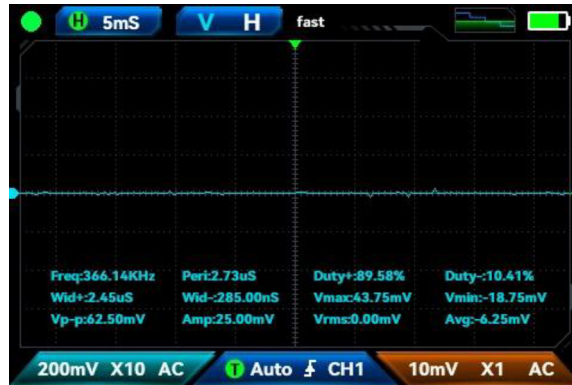


Рис. 1. Осцилограма пульсацій напруги живлення МК у режимі очікування (0 % навантаження)

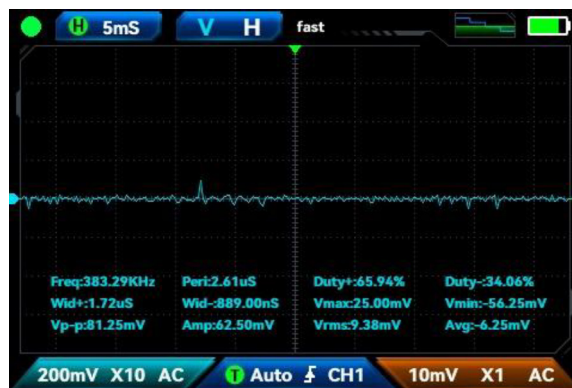


Рис. 2. Пульсації напруги живлення при 5 % навантаженні тягової системи

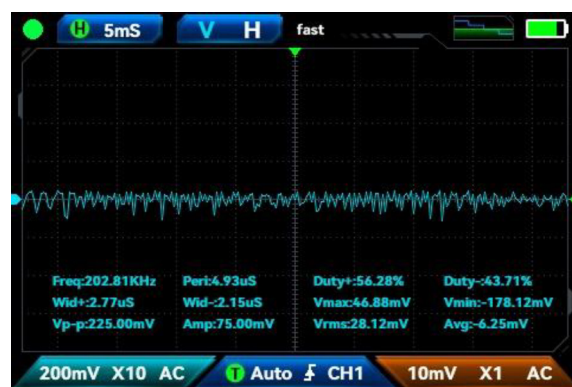


Рис. 3. Пульсації напруги живлення при 10 % навантаженні тягової системи

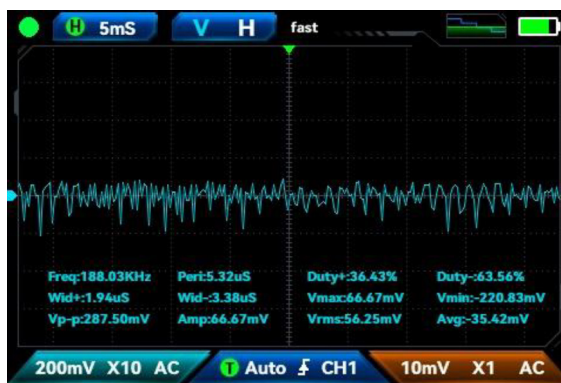


Рис. 4. Пульсації напруги живлення при 40 % навантаженні тягової системи

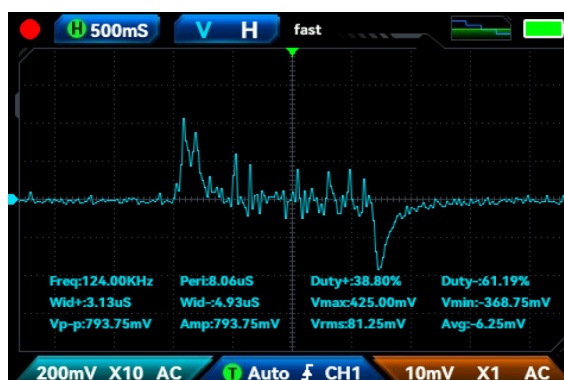


Рис. 5. Перехідна характеристика напруги живлення МК під час зміни навантаження: 0 % → 20 % → 0 %

$$dU(t) = C(u(t))dt + \sum(u(t))dW(t),$$

де матриця $\sum(u)$ визначає інтенсивність стохастичних збурень, що виникають унаслідок випадкової природи середовища.

Для скалярної компоненти живлення $P(t)$ дифузійна матриця зводиться до скалярного коефіцієнта: $\Sigma^2(u) = B(u) = C(u; x)R_0C(u; x)$ (див. рівн. (6)), де $\sigma^2 = B(u)$. Це і є скалярне σ , що ідентифікується експериментально нижче.

Вплив стохастичних збурень на стан системи може бути кількісно описаний у рамках моделі Орнштейна–Уленбека для напруги живлення.

$$U(t) : dU(t) = -\alpha(U - U_0)dt + \sigma dW(t).$$

У такому формулюванні середнє значення визначається детерміністичною частиною, тоді як дисперсія відхилень зростає пропорційно σ^2 і в стаціонарному режимі дорівнює

$$Var_{\infty}(U) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Для кількісного підтвердження отриманих залежностей були проведені осцилографічні вимірювання напруги живлення мікроконтролерної системи БПЛА при ступінчастій зміні навантаження.

На рис. 5 вимірювання проводилося в режимі АС-зв'язку, що дозволяє безпосередньо аналізувати флуктуації напруги відносно середнього рівня U_0 , яке в даному випадку приймається рівним нулю. Слід зазначити, що у моделі $OU \ dU = -\alpha(U - U_0)dt + \sigma dW(t)$ змінна U представляє відхилення напруги живлення від її номінального рівня U_0 (5 В або 3,3 В), а не абсолютну напругу. Режим АС-зв'язку безпосередньо виділяє це відхилення, тому вимірний сигнал точно відповідає U у моделі, при $U_0 = 0$ у системі відліку експерименту.

Після зняття тяги спостерігається характерний процес релаксації напруги до стаціонарного рівня, що має експоненціальний характер і може бути апроксимований залежністю $|U(t)| = |U(0)|e^{-\alpha t}$.

З осцилограми в зоні плавного відновлення напруги після зняття тяги було вибрано кілька характерних точок. Абсолютні значення відхилень напруги та відповідні моменти часу наведено нижче:

$$t = 0 \text{ ms}, |U| = 368 \text{ mV}, \quad t = 10 \text{ ms}, |U| = 200 \text{ mV}, \quad t = 25 \text{ ms}, |U| = 80 \text{ mV}, \quad t = 35 \text{ ms}, |U| = 40 \text{ mV},$$

Остання точка $t = 50 \text{ ms}$, $|U| = 6 \text{ mV}$ знаходиться на рівні шумового фону і не використовується для оцінки параметра релаксації.

Лінійна апроксимація залежності $\ln |U(t)|$ від часу в інтервалі 0–35 мс дозволила оцінити параметр α .

Ідентифіковане значення $\alpha = 63,0 \text{ c}^{-1}$ розглядається як структурна константа мережі розподілу живлення (PDN), оскільки воно визначається пасивними компонентами кола – передусім еквівалентною ємністю та опором шин живлення – а не активним навантаженням тягової системи. Відповідно, те саме α рівномірно застосовується для всіх профілів навантаження при обчисленні σ з вимірних значень V_{rms} .

Коефіцієнт дифузії σ ідентифікується з виміряного V_{rms} через умову стаціонарності процесу OU . Оскільки стаціонарне стандартне відхилення дорівнює $\sigma/\sqrt{2\alpha}$, а осцилограф вимірює $V_{rms} = \sigma/\sqrt{2\alpha}$, правильна формула ідентифікації: $\sigma = V_{rms} \cdot \sqrt{2\alpha}$, де V_{rms} виражається у вольтах (В). Зауважимо, що в неперервному рівнянні $OU \, dU = -\alpha(U - U_0)dt + \sigma dW(t)$ розмірний аналіз вимагає $[\sigma] = \text{В} \cdot \text{c}^{-1/2}$ (оскільки $[dW] = \text{c}^{1/2}$). Тому числові значення нижче подано у $\text{В} \cdot \text{c}^{-1/2}$. При $V_{rms}(10\%) = 28,1 \cdot 10^{-3} \text{ В}$, $V_{rms}(40\%) = 56,3 \cdot 10^{-3} \text{ В}$ та $\sqrt{2 \cdot 63,0} = 11,22$ отримуємо $\sigma = 315,6 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{c}^{-1/2}$ (10 % навантаження) та $\sigma = 632,0 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{c}^{-1/2}$ (40 % навантаження).

Отримане значення параметра α (табл. 2) характеризує швидкість відновлення напруги живлення після збурення, спричиненого зміною навантаження тягової системи. Ідентифіковане значення σ визначає інтенсивність випадкових флуктуацій, а їхній вплив на систему кількісно описується стаціонарною дисперсією $Var_{\infty}(U)$.

Таблиця 2

Ідентифіковані параметри стохастичної моделі напруги живлення

Параметр	Значення
$\sigma(A \text{ at } 10\% \text{ load})$	$315,6 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{c}^{-1/2}$; $632,0 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{c}^{-1/2}$ (40 % навант.)
α (з перехідного процесу 20 % навантаження, рис. 5)	$63,0 \text{ s}^{-1}$
$\tau = \frac{1}{\alpha}$	15,873 мс
Стаціонарна дисперсія $Var_{\infty}(U)$	$\sigma^2/2\alpha = 7,91 \cdot 10^{-4} \text{ В}^2$ (10 % навант.); $3,17 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2$ (40 % навант.)

Таким чином, експериментальні осцилографічні дані (рис. 1–5) дозволяють безпосередньо пов’язати параметри стохастичної моделі з реальними режимами роботи БПЛА.

Практичні висновки та обговорення

Ідентифікація коефіцієнтів дрейфу (α) та дифузії (σ) надає практичні дані для розробників систем БПЛА.

Ідентифіковане $\sigma = 632,0 \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{с}^{-1/2}$ при 40 % навантаженні означає, що відношення сигнал/шум (SNR) у внутрішніх модулях АЦП МК може суттєво погіршитися під час агресивного маневрування. Це свідчить про те, що ПД-регулятори мають включати адаптивну фільтрацію залежно від навантаження. Зокрема, «Д» (диференціальна) складова ПД-контурів, яка є надзвичайно чутливою до високочастотного шуму, може динамічно демпфуватися, коли ідентифіковане σ перевищує певний поріг.

Обмеження дослідження

Хоча запропонована модель та експериментальні результати забезпечують надійну основу для стохастичного аналізу, необхідно визнати кілька обмежень:

Апаратна специфічність: Результати отримано з конфігурацією акумулятора 6S1P та двигунами 1300KV. Системи з акумуляторами 4S або двигунами з вищим KV для гонок (наприклад, 2500KV) можуть демонструвати інші частотні спектри шуму та різні швидкості релаксації α .

Фактори навколишнього середовища: Дослідження проводилося в лабораторних умовах без урахування температурних коливань та зовнішніх РЧ-завад.

Лінійна апроксимація: Матриця C у нашій моделі вважається лінійною. У граничних випадках просідання акумулятора або наближення до критичного режиму відмови система може демонструвати нелінійну динаміку, що вимагає складнішого стохастичного моделювання, ніж стандартний процес Орнштейна–Уленбека.

Висновки

Застосування усереднення та дифузійного наближення до матричної моделі сигналу забезпечує двоетапну теоретичну основу для аналізу динаміки та стохастичних флуктуацій у системах БПЛА.

Етап усереднення дає теоретичне передбачення: коли параметри системи залежать від швидко змінних зовнішніх збурень, змодельованих як марківський процес, гранична динаміка визначається системою з постійними (усередненими) коефіцієнтами. Це передбачає плавну еволюцію траєкторії сигналу та характеризує детерміністичний кістяк системи.

Етап дифузійного наближення застосовується за умови балансу і дає стохастичне диференціальне рівняння, що керує флуктуаціями навколо середньої траєкторії. Член дрейфу фіксує систематичні поправки через кореляції шуму, тоді як дифузійний член кількісно визначає інтенсивність розсіювання сигналу. Цей етап безпосередньо підтверджується експериментальними осцилографічними вимірюваннями напруги живлення МК: ідентифікований параметр релаксації $\alpha = 63,0 \text{ с}^{-1}$ підтверджує структуру ОУ флуктуацій напруги, а коефіцієнти дифузії σ та α свідчать про значне зростання інтенсивності флуктуацій зі збільшенням навантаження тягової системи. Ці експериментально ідентифіковані параметри забезпечують кількісну основу для оцінки надійності алгоритмів керування та розробки адаптивних стратегій обробки сигналів для систем БПЛА в умовах стохастичних електромагнітних збурень.

Список використаної літератури

1. Commission Delegated Regulation (EU) 945/2019. On Unmanned Aircraft Systems. *Official Journal of the EU*. L 152. Luxembourg, 2019. P. 1–40.
2. IEC 61000-4-3. (2020). Electromagnetic Compatibility (EMC) – Part 4–3. Edition 4.1. Geneva : IEC, 2020. P. 100.
3. Королюк В. С., Самойленко І. В., Потенціальний оператор процесу Орнштейна–Уленбека із застосуваннями. *Доповіді Національної академії наук України*. 2013. № 3. С. 21–27.
4. Korolyuk V. S., Limnios N., Average and diffusion approximation of stochastic evolutionary systems in an asymptotic split state space. *The Annals of Applied Probability*. 2004. Vol. 14. № 1. P. 489–516. <https://doi.org/10.1214/aoap/1075828059>

5. Korolyuk V. S., Limnios N., Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific. 2005. P. 330. <https://doi.org/10.1142/5979>
6. Chabanyuk Y. M., Nikitin A. V., Khimka U. T., Control problem for the impulse process under stochastic optimization procedure and Levy conditions. *Matematychni Studii*. 2021. Vol. 55. № 1. P. 107-112. <https://doi.org/10.30970/ms.55.1.107-112>
7. Chabanyuk Y. M., Nikitin A. V., Khimka U. T., Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes. London : Wiley-ISTE, 2020. P. 240. <https://doi.org/10.1002/9781119779759>
8. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S., On the theory of Brownian motion. *Phys. Rev.* 1930. Vol. 36. P. 823–841. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.36.823>

References

1. Commission Delegated Regulation (EU) (2019). On Unmanned Aircraft Systems. *Official Journal of the EU*, L 152, 1–40. [in English].
2. IEC 61000-4-3. (2020). Electromagnetic Compatibility (EMC) – Part 4–3. Edition 4.1. Geneva : IEC. [in English].
3. Koroliuk, V. S., & Samoilenko, I. V. (2013). Potensial-operator protsesu Ornshteina–Ulenbeka iz zastosuvanniam.[The potential operator of the Ornstein–Uhlenbeck process with applications.] *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*, 3, 21–27 [in Ukrainian].
4. Korolyuk, V. S., & Limnios, N. (2004). Average and diffusion approximation of stochastic evolutionary systems in an asymptotic split state space. *The Annals of Applied Probability*, 14 (1), 489–516. <https://doi.org/10.1214/aoap/1075828059> [in English].
5. Korolyuk, V. S., & Limnios, N. (2005). Stochastic Systems in Merging Phase Space, World Scientific, <https://doi.org/10.1142/5979> [in English].
6. Chabanyuk, Y. M., Nikitin, A. V., & Khimka, U. T. (2021). Control problem for the impulse process under stochastic optimization procedure and Levy conditions. *Matematychni Studii*, 55(1), 107–112. <https://doi.org/10.30970/ms.55.1.107-112> [in English].
7. Chabanyuk, Y. M., Nikitin, A. V., & Khimka, U. T. (2020). Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes. London: Wiley-ISTE. <https://doi.org/10.1002/9781119779759> [in English].
8. Uhlenbeck, G. E., & Ornstein, L. S. (1930). On the theory of Brownian motion. *Physical Review*, 36, 823–841. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.36.823> [in English].

Шведюк Володимир Володимирович – аспірант кафедри математичного моделювання Національного університету «Острозька академія». E-mail: volodymyr.v.shvediuk@oa.edu.ua, ORCID: 0009-0002-2906-0958.

Shvediuk Volodymyr Volodymyrovych – Postgraduate Student at the Department of Mathematical Modelling of the National University of Ostroh Academy. E-mail: volodymyr.v.shvediuk@oa.edu.ua, ORCID: 0009-0002-2906-0958.

Дата першого надходження статті до видання: 23.03.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 01.05.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 01.07.2026



Стаття поширюється на умовах ліцензії відкритого доступу (CC BY 4.0)