

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНІ ГЕОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ПОВЕРХОНЬ КУПОЛІВ ПРАВОСЛАВНИХ ХРАМІВ

Нинішній етап розвитку України характеризується складним існуючим суспільно-економічним станом, пов'язаним із військовими діями на території нашої держави. У даний час велика кількість людей стрімко духовно повертається до вічних християнських цінностей. Тому в багатьох містах і селах країни інтенсивно відроджуються православні храми, інші культові споруди, здійснюється їх реставрація, облаштовуються місця паломництва тощо. При цьому актуальними є питання реформування церковного управління, належної реорганізації християнських громад у вигляді єпархій та парафій з метою їх вдосконалення. Успішному виконанню вказаних завдань сприяють комп'ютерні інформаційні технології, зокрема засоби геометричного моделювання. Останні становлять одну з фундаментальних основ відповідного програмного забезпечення для автоматизованого проєктування різноманітних об'єктів і процесів.

У православній архітектурі куполи, що увінчують християнські храми, відіграють особливу провідну роль. Для людей ці будівельні конструкції уособлюють такі небесні образи як Бог, ангели, святі і т. д. У даному випадку доволі важливі застосовувані об'ємно-просторові архітектурні форми, які повинні мати певну індивідуальність. Зазначена особливість сприяє підвищенню символічної святості православних храмів, налаштовує при їх відвідуванні парафіян на духовне піднесення і прагнення до людської досконалості. Тому пророблення багатьох проєктних варіантів опрацьовуваних куполів та вибір із них оптимального являє собою актуальну науково-прикладну задачу.

Прогресивною тенденцією в окресленому плані є методологія структурно-параметричного формоутворення. Викладені далі матеріали становлять продовження попередніх досліджень автора в розглянутому напрямку, розвивають висвітлені раніше у літературі відповідні результати. У статті також визначено шляхи подальшого розвитку запропонованих геометричних моделей для автоматизованого проєктування православних храмів, удосконалення використовуваних при цьому способів, прийомів та алгоритмів комп'ютерного формоутворення.

Ключові слова: автоматизоване проєктування, геометричне моделювання, комп'ютерні інформаційні технології, поверхні куполів, православні храми, структурно-параметричне формоутворення.

STRUCTURAL-PARAMETRIC GEOMETRIC MODELS OF DOMES SURFACES OF ORTHODOX TEMPLES

The current stage of Ukraine's development is characterized by a difficult existing socio-economic situation associated with military operations on the territory of our state. Currently, a large number of people are rapidly spiritually returning to eternal Christian values. Therefore, in many cities and villages of the country, Orthodox temples and other religious buildings are being intensively revived, their restoration is being carried out, places of pilgrimage are being arranged, etc. At the same time, the issues of reforming church administration, proper reorganization, with the aim of improvement, of Christian communities in the form of dioceses and parishes are relevant. The successful implementation of these tasks is facilitated by the available computer information technologies, in particular, geometric modeling tools. The latter constitute one of the basic foundations of proper software for computer-aided design of various objects and processes.

The domes crowning Christian temples play a special leading role in Orthodox architecture. For people, these building structures represent such heavenly images as God, angels, saints, etc. In this case, the applied volumetric-spatial architectural forms, which should have certain individuality, are quite important. This feature helps to increase the symbolic holiness of Orthodox temples, sets up parishioners for spiritual elevation and aspiration for their own human perfection when visiting them. Therefore, the study of many design variants for the researched domes and the choice of the optimal one from them is an actual scientific and applied task.

The progressive trend in the outlined plan is the methodology of structural-parametric shaping. The following materials are a continuation of the author's previous research in the considered direction and develop the corresponding results previously covered in the literature. The article also defines the ways of further development of the proposed geometric models for the automated design of Orthodox temples, the improvement of the methods, techniques and algorithms used for this computer shaping.

Keywords: automated design, geometric modeling, computer information technologies, dome surfaces, Orthodox temples, structural-parametric shaping.

Постановка проблеми

У зв'язку з нинішньою напруженою соціально-економічною ситуацією в Україні, спричиненою військовими діями, все більше наших людей звертаються до вічних духовних християнських цінностей. Останнє обумовлює необхідність будівництва нових та відновлення зруйнованих православних храмів. Куполи в них відтворюють небесні образи й тому мають велике символічне значення для парафіян. Відомо також, що об'ємно-просторові архітектурні форми культових споруд відіграють особливо важливу роль у релігійному плані, вимагають належної індивідуальності. Подані факти обумовлюють актуальність ефективного вирішення окресленої проблеми стосовно підвищення якості розглянутих об'єктів, зменшення витрат на їх проектування, виготовлення та подальшу експлуатацію.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У виданні [1] розглянуто питання національної ідентичності українських християнських храмів, відповідних традицій та новаторства. Ілюстрації належних вітчизняних споруд подано у праці [2]. У публікації [3] проаналізовано формоутворення баневих, тобто купольних, завершень церковних будівель. Показано, що саме ці конструкції забезпечують індивідуальність православних храмів. У роботі [4] досліджено різні форми куполів (конусну, яйцеподібну, маківку, цибульчасту, грушоподібну, гранчасту тощо), існуючі їх ярусності (одно-, дво- і триярусні), кількість у храмі (один, два, три, п'ять, сім, дев'ять і тринадцять). У виданні [5] висвітлено базові теоретичні положення методології структурно-параметричного геометричного моделювання. У публікаціях [6, 7] викладено відповідно його застосування для відтворення у православ'ї організаційного кластерного територіального управління. У статті [8] запропоновано спосіб структурно-параметричної побудови поверхонь куполів православних храмів для автоматизованого проектування.

Мета дослідження

Основне завдання даної роботи полягає в поданні математичного опису геометричних властивостей проєктованих куполів, зокрема, стосовно обчислення площ їх поверхонь та обмежуваних останніми об'ємів засобами комп'ютерних інформаційних технологій. Також в акцентуванні уваги на цих величинах як складових компонентах створюваних варіантних структурно-параметричних моделей, які використовуються для проведення відповідної багатаспектної оптимізації зазначених технічних об'єктів.

Викладення основного матеріалу дослідження

У виданні [8] розглянуто наступну множину форм куполів:

$$\Phi K = (\Phi K_i)_1^{N_{\Phi K}} = (\Phi K_i)_1^5, \quad (1)$$

де $\Phi K_1 = K\Phi$ – конусна, $\Phi K_2 = Я\Phi$ – яйцеподібна, $\Phi K_3 = M\Phi$ – маківка, $\Phi K_4 = Ц\Phi$ – цибульчаста, $\Phi K_5 = Г\Phi$ – грушоподібна.

Як базову твірну лінію для опрацьовуваних поверхонь обертання застосовано векторну параметричну криву другого порядку

$$\mathbf{r}(u) = \frac{(1-u)^2 \mathbf{r}_0 + 2w_1 u(1-u) \mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2}{(1-u)^2 + 2w_1 u(1-u) + u^2}, \quad (2)$$

де $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ – радіус-вектори в декартовій системі координат $Oxyz$ вершин характеристичної ламаної; $w_1 \geq 0$ – ваговий коефіцієнт вершини \mathbf{r}_1 ; $u \in [0, 1]$ – параметр.

Для форм куполів, що аналізуються, використано складений твірний контур із максимальним числом компонентів вигляду (2), яке дорівнює трьом, а саме:

$$TK = (TK_i)_1^{N_{TK}} = (TK_i)_1^3. \quad (3)$$

На рис. 1 показано деякі приклади належних твірних з характеристичними їх вершинами для певних куполів.

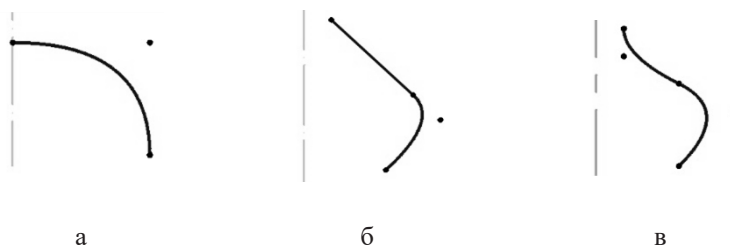


Рис. 1. Деякі структурно-параметричні варіанти твірної контуру (3):
а – яйцеподібний; б – маківка; в – цибульчастий

Яйцеподібному куполу (рис. 1, а) відповідає один елемент множини (3) з ваговим коефіцієнтом $w_1 \neq 0$, тобто дуга кривої другого порядку. Для маківки, див. рис. 1, б, додатково маємо ще відрізок прямої ($w_1=0$). Цибульчата форма (рис. 1, в) створюється двома компонентами, які забезпечують наявність точки перегину. Прийоми реалізації гладкості першого порядку розглянутих складених обводів загальновідомі.

На рис. 2 наведено поверхні куполів, які відповідають попереднім зображенням.

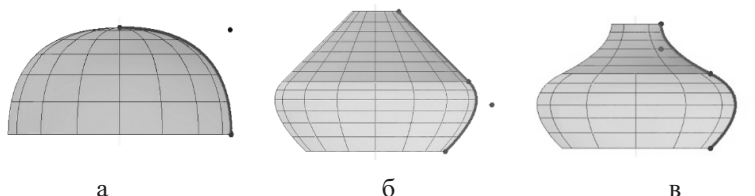


Рис. 2. Куполи:
а – яйцеподібний; б – маківка; в – цибульчастий

Подані фігури в декартовій системі координат $Oxyz$ з вертикальною віссю обертання z та твірним контуром у площині Oxz описуються залежностями:

$$r(u, v) = (x, y, z), \quad x = x(u) \cos v, \quad y = x(u) \sin v, \quad z = z(u), \quad (4)$$

де $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$ – параметри; $x(u)$, $z(u)$ – величини згідно з виразами (2) і (3).

За формулою (4) визначаються й решта об'єктів (1).

У баневих завершеннях православних храмів куполи спираються на барабани, що являють собою вертикальні кругові циліндричні або гранні призматичні поверхні з основами у вигляді правильних багатокутників (див. рис. 3). Так на рис. 3, а зображено поєднання гранчастого барабана та цибульчастого купола, а на рис 3, б додатково проілюстровано ще один ярус, який включає круговий циліндричний барабан і яйцеподібний купол. Можливі також інші комбінації проаналізованих вище поверхонь. Наприклад, маківки з циліндричним або гранчастим барабаном. Акцентуємо увагу, що розглянуті проєктні фігури, зазвичай, різняться не тільки своєю формою, а й розмірами.

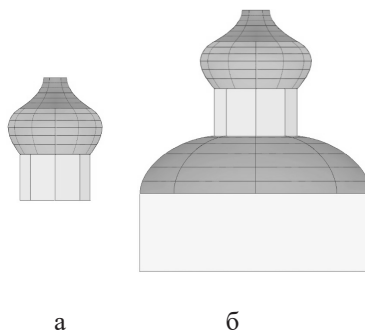


Рис. 3. Поєднання барабанів і куполів:
а, б – одно- та двоярусне банне завершення храму

Обчислення метричних характеристик куполів православних храмів становить головне завдання даної публікації. Стосовно циліндричних барабанів площа їх бічної поверхні розраховується за відомою формулою

$$S = 2\pi RH, \quad (5)$$

де R – радіус основи, H – висота, а об’єм

$$V = \pi R^2 H. \quad (6)$$

Це ж стосується призматичних барабанів з n бічними гранями. Належні величини визначаються співвідношеннями

$$S = 2RnH \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (7)$$

де R – радіус кола, описаного навколо основи барабана, H – його висота,

$$V = \frac{nR^2 H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \quad (8)$$

Площі та об’єми частин куполів, що відповідають окремим кривим (2), обчислюються за виразами

$$S = 2\pi \int_0^1 x(u) \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2} du, \quad (9)$$

$$V = \pi \int_0^1 x^2(u) \cdot z'(u) du, \quad (10)$$

де

$$x'(u) = 2 \left(\frac{(1-w_1)(1-2u)((1-u)^2 x_0 + 2w_1 u(1-u)x_1 + u^2 x_2)}{p^2} + \frac{(u-1)x_0 + w_1(1-2u)x_1 + ux_2}{p} \right),$$

$$z'(u) = 2 \left(\frac{(1-w_1)(1-2u)((1-u)^2 z_0 + 2w_1 u(1-u)z_1 + u^2 z_2)}{p^2} + \frac{(u-1)z_0 + w_1(1-2u)z_1 + uz_2}{p} \right),$$

$$p = (1-u)^2 + 2w_1 u(1-u) + u^2.$$

Надалі отримані за формулами (9) і (10) величини підсумовуються для всіх кривих застосованого твірного контуру (3). У випадку кількох ярусів куполів залежності (5) ... (10) використовуються належну кількість разів.

Проілюструємо запропонований математичний апарат на прикладі рис. 3, б. Нехай у нижнього циліндричного барабана B_1 радіус $R=3000$ мм, а висота $H=2000$ мм. На підставі співвідношень (5) і (6)

$$S_{B_1} = 2\pi RH = 2\pi \cdot 3000 \cdot 2000 \text{ мм}^2 \approx 3,77 \cdot 10^7 \text{ мм}^2 = 37,7 \text{ м}^2, \quad (11)$$

$$V_{B_1} = \pi R^2 H = \pi \cdot 3000^2 \cdot 2000 \text{ мм}^3 \approx 5,655 \cdot 10^{10} \text{ мм}^3 = 56,55 \text{ м}^3. \quad (12)$$

Вважаємо, що твірна яйцеподібного купола визначається вершинами $r_0=(3000, 0, 2000)$, $r_1=(3000, 0, 4000)$, $r_2=(1200, 0, 4000)$, де координати в мм, та ваговим коефіцієнтом $w_1=0,7071$. Тоді, згідно з виразом (9)

$$S_{ЯК} = 2\pi \int_0^1 x(u) \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2} du \approx 4,44 \cdot 10^7 \text{ мм}^2 = 44,4 \text{ м}^2. \quad (13)$$

Відповідно до формули (10)

$$V_{ЯК} = \pi \int_0^1 x^2(u) \cdot z'(u) du \approx 4,394 \cdot 10^{10} \text{ мм}^3 = 43,94 \text{ м}^3. \quad (14)$$

Для гранчастого барабана B_2 маємо радіус $R=1200$ мм описаного навколо основи кола та висоту $H=1400$ мм. На підставі залежностей (7) і (8)

$$S_{B_2} = 2RnH \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2 \cdot 1200 \cdot 8 \cdot 1400 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ мм}^2 \approx 1,029 \cdot 10^7 \text{ мм}^2 = 10,29 \text{ м}^2, \quad (15)$$

$$V_{B_2} = \frac{nR^2H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{8 \cdot 1200^2 \cdot 1400}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) \approx 5,7 \cdot 10^9 \text{ мм}^3 = 5,7 \text{ м}^3. \quad (16)$$

Нижня твірна цибульчастого купола визначається вершинами $r_0=(1200, 0, 5400)$, $r_1=(2300, 0, 6200)$, $r_2=(1000, 0, 7200)$, де координати в мм, та ваговим коефіцієнтом $w_1=1$. Згідно з виразом (9)

$$S_{\text{шк}_1} = 2\pi \int_0^1 x(u) \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2} du \approx 2,07 \cdot 10^7 \text{ мм}^2 = 20,7 \text{ м}^2. \quad (17)$$

Відповідно до формули (10)

$$V_{\text{шк}_1} = \pi \int_0^1 x^2(u) \cdot z'(u) du \approx 1,287 \cdot 10^{10} \text{ мм}^3 = 12,87 \text{ м}^3. \quad (18)$$

Верхня твірна цибульчастого купола визначається вершинами $r_0=(1000, 0, 7200)$, $r_1=(400, 0, 7661)$, $r_2=(400, 0, 8500)$, де координати в мм, та ваговим коефіцієнтом $w_1=1$. Згідно з виразом (9)

$$S_{\text{шк}_2} = 2\pi \int_0^1 x(u) \sqrt{x'(u)^2 + z'(u)^2} du \approx 5,57 \cdot 10^6 \text{ мм}^2 = 5,57 \text{ м}^2. \quad (19)$$

Відповідно до формули (10)

$$V_{\text{шк}_2} = \pi \int_0^1 x^2(u) \cdot z'(u) du \approx 1,45 \cdot 10^9 \text{ мм}^3 = 1,45 \text{ м}^3. \quad (20)$$

На основі величин (11) ... (20) бачимо, що зовнішня площа баневих завершень становить

$$S = S_{B_1} + S_{\text{як}} + S_{B_2} + S_{\text{шк}_1} + S_{\text{шк}_2} = (37,7 + 44,4 + 10,29 + 20,7 + 5,57) \text{ м}^2 = 118,66 \text{ м}^2, \quad (21)$$

а їх об'єм

$$V = V_{B_1} + V_{\text{як}} + V_{B_2} + V_{\text{шк}_1} + V_{\text{шк}_2} = (56,55 + 43,94 + 5,7 + 12,87 + 1,45) \text{ м}^3 = 120,51 \text{ м}^3. \quad (22)$$

Величини (21) ... (22) для проаналізованого варіанта проєктованого храму суттєво впливають не тільки на його індивідуальність та естетичний вигляд, але й на такі технічні особливості розглянутої будівлі як її міцність, довговічність, ефективність функціонування, вартість зведення, подальшої експлуатації і т. д. Зазначені властивості доволі часто мають суперечливий характер, тому потребують здійснення належної багатоаспектної оптимізації. Останнє пов'язано з потребами проведення багатьох ітераційних розрахунків. Одним із прогресивних напрямків у цьому плані є комп'ютерне структурно-параметричне формоутворення. Наведений вище математичний апарат зручно адаптується до вказаної методології автоматизованого проєктування. У її рамках існують належні перспективи напрацювання відповідних нових продуктивних способів, прийомів та алгоритмів геометричного моделювання.

Висновки

Статтю присвячено актуальній проблемі будівництва й відновлення в Україні зруйнованих під час воєнних дій православних храмів, зокрема формоутворенню їх баневих завершень. Головною метою при цьому є зменшення витрат на розроблення, зведення та подальшу експлуатацію вказаних будівель з одночасним підвищенням їх естетичної й технічної досконалості за рахунок ефективного автоматизованого проєктування. Подано математичний апарат для обчислення площ купольних поверхонь та обмежуваних ними об'ємів засобами комп'ютерних інформаційних технологій. Акцентовано увагу на зазначених величинах як складових компонентах варіантних структурно-параметричних моделей, що використовуються для проведення відповідної багатоаспектної оптимізації розглянутих технічних об'єктів. Зазначено, що перспективами подальших наукових досліджень може бути опрацювання прорізів у барабанах куполів, різновидів хрестів, які вінчають храми, і т. д.

Список використаної літератури

1. Гнідець Р. Б. Національна ідентичність архітектури українських церков у традиції та новаторстві їх вираження. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Архітектура*. 2015. № 836. С. 168–175.
2. Івченко А. Православні храми України. *Світгляд*. 2018. № 4(72). С. 7–15.
3. Гнідець Р.Б. Традиція у формах баневих завершень церков українського архітектурного модерну та її вираження в сучасному храмобудуванні. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Архітектура*. 2008. № 632. С. 7–14.
4. Слепцов О. С. Архітектурне проектування і реконструкція православних храмів. Київ: А+С, 2014. 272 с.
5. Ванін В. В., Вірченко Г. А. Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2009. Вип. 23. С. 42–48.
6. Терещук М. О. До питання геометричного моделювання організаційних кластерних структур православ'я. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2021. Вип. 101. С. 195–207.
7. Терещук М. О. Кластерні елементи територіального управління в православ'ї. *Управління розвитком складних систем*. 2022. Вип. 51. С. 94–100.
8. Терещук М. О. Структурно-параметричний спосіб формоутворення куполів православних храмів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2022. Вип. 103. С. 201–208.

References

1. Hnidets, R. B. (2015). The national identity of the architecture of Ukrainian churches in the tradition and innovation of their expression. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika". Arkhitektura*. **836**, 168–175.
2. Ivchenko, A. (2018). Orthodox temples of Ukraine. *Svitohliad*. **4** (72), 7–15.
3. Hnidets, R. B. (2008). The tradition in the forms of banyan ends of Ukrainian architectural modern churches and its expression in modern temple construction. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika". Arkhitektura*. **632**, 7–14.
4. Slietsov, O. S. (2014). Architectural design and reconstruction of Orthodox temples. Kyiv: A+S.
5. Vanin, V. V., & Virchenko, G. A. (2009). Definition and basic provisions of structural-parametric geometric modeling. *Heometrychne ta kompiuterne modeliuвання*. **23**, 42–48.
6. Tereschuk, M. O. (2021). To the question of geometric modeling of organizational cluster structures in Orthodoxy. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. **101**, 195–207.
7. Tereschuk, M. O. (2022). Cluster elements of territorial management in Orthodoxy. *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*. **51**, 94–100.
8. Tereschuk, M. O. (2022). Structural-parametric method of shaping domes of Orthodox temples. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. **103**, 201–208.

Терещук Микола Олександрович – к.т.н., докторант кафедри архітектурних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури. E-mail: nikolatereschuk@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4444-3677.