УДК 517.91:532.2

О.М. ЛЕНЮК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
О.М. НІКІТІНА
Чернівецький ліцей №1 математичного та економічного профілів
М.І. ШИНКАРИК
Західноукраїнський національний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА-ФУР'Є-ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким використанням композитних матеріалів, існує нагальна потреба у вивченні фізико-технічних характеристик таких матеріалів, що знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами, зокрема, задача динаміки математично призводить до побудови розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень.

У цій роботі побудовано розв'язок задачі динаміки на трискладовому сегменті $[0;R_3]$ з двома точками спряження методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера.

Задача динаміки на трискладовому сегменті математично призводить до побудови обмеженого розв'язку сепаратної системи трьох диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу з відповідними початковими умовами, умовами спряження та крайовими умовами. Застосувавши до цієї крайової задачі гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера, отримаємо задачу Коші. Знайшовши розв'язок задачі Коші, ми застосовуємо до нього обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера.

Пряме інтегральне перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера на сегменті з двома точками спряження записується у вигляді матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до заданої задачі за правилом множення матриць. В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння. Обернене перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення певних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, задача динаміки, гібридне інтегральне перетворення.

O.M. LENYUK
Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych
O.M. NIKITINA
Chernivtsi Lyceum № 1 of Mathematical and Economic Profiles
M.I. SHYNKARYK
West Ukrainian National University

MODELING OF DYNAMIC PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF EULER-FOURIER-EULER TYPE ON THE SEGMENT

At the present stage of scientific and technological progress, especially in connection with the widespread use of composite materials, there is an urgent need to study the physical and technical characteristics of such materials that are in different operating conditions, which mathematically leads to the problems of solving a separate system of differential equations of the second order on a piecewise homogeneous interval with the corresponding initial and boundary conditions, in particular, the dynamics problem mathematically leads to the construction of a solution of a separate system of partial differential equations of hyperbolic type.

One of the effective methods for constructing of integral representations of analytic solutions of the algorithmic nature of the problems of mathematical physics is the method of hybrid integral transforms.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-3

In this paper we construct a solution of the dynamics problem on the three-component segment [0;R_3] with two points of conjugation by the method of hybrid integral Euler-Fourier-Euler transform.

The problem of dynamics on the three-component segment mathematically leads to the construction of a limited solution of a separate system of three partial differential equations of hyperbolic type with corresponding initial conditions, conjugation conditions and boundary conditions. Applying to this boundary-value problem the hybrid integral Euler-Fourier-Euler transform, we obtain the Cauchy problem. Finding a solution to the Cauchy problem, we apply to it the inverse hybrid integral Euler-Fourier-Euler transform.

A straight integral Euler-Fourier-Euler transform on the segment with two points of conjugation is written in the form of a matrix row. The output system and the initial conditions are written in a matrix form and we apply the operator matrix row to the given problem by the rule of multiplication of matrices. As a result we obtain the Cauchy problem for the ordinary differential equation. The inverse Euler-Fourier-Euler transform is written in the form of an operator matrix column and we apply it to the constructed solution of the Cauchy problem. After completing certain transformations, we obtain the unique solution of the original problem.

The constructed solutions of boundary value problems have an algorithmic character, which allows us to use them both in theoretical studies and in numerical calculations.

Keywords: hybrid differential operator, problem of dynamic, hybrid integral transform.

Постановка проблеми

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1–3], зокрема задача динаміки математично приводить до побудови розв'язку сепаратної системи рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоримтічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень [1–6].

В [6] побудовано гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на сегменті [0;R_3] з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Ейлера-Фур'є-Ейлера.

Мета дослідження

Побудувати розв'язок задачі динаміки на трискладовому сегменті [0;R_3] з двома точками спряження за допомогою гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Фур'є-Ейлера.

Викладення основного матеріалу дослідження

Задача динаміки на трискладовому сегменті математично приводить до побудови в області

$$D_2 = \{(t,r) : t > 0, r \in I_2\}\ ,\ I_2 = \{r : r \in (0;R_1) \cup (R_1;R_2) \cup (R_2;R_3)\}$$

обмеженого розв'язку системи рівнянь гіперболічного типу

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\alpha_1}^*[u_1] = f_1(t,r),\ r \in (0;R_1), \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}[u_2] = f_2(t,r),\ r \in (R_1;R_2), \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\alpha_2}^*[u_3] = f_3(t,r),\ r \in (R_2;R_3), \end{gathered} \tag{1}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r), \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_j(r), r \in (R_{j-1};R_j), j = \overline{1,3}, R_0 = 0, \tag{2}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-3

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}\right)u_{k}-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k}=0,\ j,k=1,2, \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0} r^{\gamma}u_1=0,\ \left(\alpha_{22}^{3}d/dr+\beta_{22}^{3}\right)u_3\,|_{r=R_3}=0. \tag{4}$$

Тут беруть участь диференціальні оператори Ейлера другого порядку B_{α}^{*} [6].

На коефіцієнти, що беруть участь в постановці задачі, накладаються певні природні умови обмеження [6].

В [6] побудовано пряме $H_{(\alpha)}$ й обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2 гібридним диференціальним оператором

$$M_{(\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)a_1^2B_{\alpha_1}^{*}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2d/dr+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)a_2^2B_{\alpha_2}^{*}:$$

$$H_{(\alpha)}\left[g(r)\right]=\int_0^{R_3}g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)\,dr\equiv\tilde{g}(\beta), \tag{5}$$

$$H_{(\alpha)}\left[\tilde{g}(\beta)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)©_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta\equiv g(r), \tag{6}$$

та виведена основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $M_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}\left[M_{(\alpha)}\left[g(r)\right]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde{g}_j(\beta)+(\alpha_{22}^{3})^{-1}V_{(\alpha);3}(R_3,\beta)a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}g_R+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z_{(\alpha);12}^{k}(\beta)\omega_{2k}-Z_{(\alpha);22}^{k}(\beta)\omega_{1k}\,. \tag{7}$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда, спектральна вектор-функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\sum_{k=1}^{3}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{(\alpha);k}(r,\beta),\ R_0=0,$$

вагова функція

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1r^{2\alpha_1+1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3r^{2\alpha_2+1}$$

та спектральна щільність $©_{(\alpha)}(\beta)$ [6], а також інші величини та функції, визначені в [6].

Знайдемо інтегральне зображення аналітичного розв'язку задачі (1) – (4) методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Фур'є-Ейлера на трискладовому сегменті $[0;R_3]$ з двома точками спряження, запровадженого правилами (5) – (7).

Запишемо систему (1) та початкові умови (2) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2-a_1^2B_{\alpha_1}^{*}\right)u_1(t,r)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2-a_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_2(t,r)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_3^2-a_3^2B_{\alpha_2}^{*}\right)u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{pmatrix}\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\end{pmatrix},\ \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{pmatrix}\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}\varphi_1(r)\\ \varphi_2(r)\\ \varphi_3(r)\end{pmatrix}. \tag{8}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-3

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}$ згідно правила (5) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\alpha)}[\ldots] == \left[\int_0^{R_1} \ldots V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 dr \quad \int_{R_2 0}^{R_3} \ldots V_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr\right] \tag{9}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (9) за правилом множення матриць до задачі (8). Внаслідок основної тотожності (7) отримуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta^2\right)\tilde{u}(t,\beta)+\left(k_1^2+\gamma_1^2\right)\int_0^{R_1} u_1(t,r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$

$$+\left(k_2^2+\gamma_2^2\right)\int_{R_1}^{R_2} u_2(t,r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 dr +$$

$$+\left(k_3^2+\gamma_3^2\right)\int_{R_2}^{R_3} u_3(t,r)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr = \tilde{f}(t,\beta),$$

$$\tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta), \quad \frac{d\tilde{u}}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\beta).$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_1^2$. Покладемо всюди $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \ge 0$, $k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \ge 0$. Одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta^2+\gamma_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta) = \tilde{f}(t,\beta), \tag{10}$$

$$\tilde{u}\big|_{t=0} = \tilde{g}(\beta), \quad \frac{d\tilde{u}}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\beta).$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (10) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{\varphi}(\beta) + \frac{d}{dt}\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{g}(\beta) + \int_0^t \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}\tilde{f}(\tau,\beta)d\tau. \tag{11}$$

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}^{-1}$ згідно правила (6), як обернений до (9), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ldots V_{(\alpha);1}(r,\beta)\copyright_{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ldots V_{(\alpha);2}(r,\beta)\copyright_{(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ldots V_{(\alpha);3}(r,\beta)\copyright_{(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (12) за правилом множення матриць до матриці-елемента

$$[\tilde{u}(t,\beta)],$$

де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (11), одержуємо єдиний розв'язок гіперболічної задачі (1) – (4):

$$u_j(t,r) = \int_0^t\int_0^{R_1} H_{(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho)+\varphi_1(\rho)\delta_+(\tau)\right]\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2} H_{(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)\left[f_2(\tau,\rho)+\varphi_2(\rho)\delta_+(\tau)\right]\sigma_2 d\rho d\tau +$$

$$\int_0^t\int_{R_2}^{R_3} H_{(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)\left[f_3(\tau,\rho)+\varphi_3(\rho)\delta_+(\tau)\right]\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}d\rho d\tau +$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-3

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_{0}^{R_1} H_{(\alpha);j1}(t,r,\rho)\,g_1(\rho)\,\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}d\rho+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_1}^{R_2} H_{(\alpha);j2}(t,r,\rho)\,g_2(\rho)\,\sigma_2 d\rho+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_{R_2}^{R_3} H_{(\alpha);j3}(t,r,\rho)\,g_3(\rho)\,\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}d\rho,\quad j=\overline{1,3}. \qquad (13)$$

У рівностях (13) беруть участь породжені неоднорідністю системи функції впливу:

$$H_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);k}(r,\beta)©_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta, j,k=\overline{1,3}. \qquad (14)$$

При цьому $\delta_+(t)$ – дельта-функція Дірака, зосереджена в точці $t=0+$. Вона використовується в рівності (13) для скорочення запису і означає, що потрібно брати значення відповідної функції в точці 0.

Зауваження. При $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_m^2$, $k_j^2=\gamma_m^2-\gamma_j^2\geq 0,\ j=1,2,3,\ m=2,3,$ й у формулі (14) вираз $(\beta^2+\gamma_1^2)$ міняється на вираз $(\beta^2+\gamma_m^2)$.

Висновки

Побудований розв'язок (13) гіперболічної задачі (1) – (4) має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Список використаної літератури

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К.: Наук. думка, 1992. 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 188 с.
3. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. Чернівці: Прут, 2004. 276 с.
4. Нікітіна О.М. Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера-Бесселя). Львів, 2008. 86 с. (Препринт. НАН України, Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача; 01-08).
5. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. Тернопіль: Економ. Думка, 2004. 368 с.
6. Нікітіна О.М. Інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[0;R_3]$ гібридним диференціальним оператором Ейлера-Фур'є-Ейлера. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь*: зб. наук. пр. Чернівці: Прут, 2012. Вип. 21. С. 233-239.

References

1. Kolyano, Yu.M. (1992). Metodyi teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela. K.: Nauk. dumka.
2. Leniuk, M.P. (1997). Temperaturni polia v ploskykh kuskovo-odnoridnykh ortotropnykh oblastiakh. K.: In-t matematyky NAN Ukrainy.
3. Konet, I.M., & Leniuk, M.P. (2004). Temperaturni polia v kuskovo-odnoridnykh tsylindrychnykh oblastiakh. Chernivtsi: Prut.
4. Nikitina, O.M. (2008). Hibrydni intehralni peretvorennia typu (Eilera-Besselia). Lviv. (Preprynt. NAN Ukrainy, In-t prykladnykh problem matematyky i mekhaniky im. Ya.S. Pidstryhacha; 01-08).
5. Leniuk, M.P., & Shynkaryk, M.I. (2004). Hibrydni intehralni peretvorennia (Furie, Besselia, Lezhandra). Chastyna 1. Ternopil: Ekonom. Dumka.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-3

6. Nikitina, O.M. (2012). Intehralne peretvorennia, porodzhene na sehmenti [0;R3] hibrydnym dyferentsialnym operatorom Eilera-Furie-Eilera. Kraiovi zadachi dlia dyferentsialnykh rivnian: zb. nauk. pr. Chernivtsi: Prut. 21, 233-239.

Ленюк Олег Михайлович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, e-mail: O.Lenyuk@chnu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9494-2864.

Нікітіна Ольга Михайлівна – к.ф.-м.н., доцент, вчитель математики Чернівецького ліцею №1 математичного та економічного профілів, e-mail: o.nikitina.chv@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0702-0453.

Шинкарик Микола Іванович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики, перший проректор Західноукраїнського національного університету, e-mail: shynkaryk_m@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8191-8953.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-3