УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА
Міжнародний науково-навчальний центр
інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

МОДЕЛЮВАННЯ ПРИРОДНИХ ПРОСТОРІВ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМБІНАТОРИКИ

В природі спостерігають явища, пов'язані з комбінаторними числами, зокрема числами Фібоначчі. Ці числа проявляються під час утворення суцвіття деяких квітів, луски шишок, розміщенні листя дерев та інших рослин. Рукава галактик, спіраль пелюстків троянди, що розпустилася, утворюють логарифмічні спіралі.

Моделювання природних просторів із застосуванням комбінаторики, зокрема знакових комбінаторних просторів, дає змогу пояснити присутність комбінаторних чисел у природі. Ці простори утворюються завдяки генеруванню комбінаторних конфігурацій з елементів базової множини за певними правилами. Якщо підрахувати в комбінаторній множині кількість цих конфігурацій та з їхніх значень утворити скінченні послідовності, то останні утворюють арифметичний трикутник, через який проявляються числа Фібоначчі. Значення цих послідовностей, які геометрично подано через полярні координати, утворюють логарифмічні спіралі.

Впорядкування комбінаторних множин може бути як хаотичне, так і проведено за строгими правилами. Аналогічно генеруванню комбінаторних множин будують знакові комбінаторні простори, точками яких є комбінаторні конфігурації. Вони існують у двох станах: згорнутому (спокої) та розгорнутому (динаміці). Згорнутий задається знаком, який містить всі властивості розгорнутих просторів. В нього входять базові множини, (одна або кілька), тип комбінаторної конфігурації та правила розгортання з елементів базової множини точок розгорнутого простору. Знакові комбінаторні простори мають властивість згортатися. Описані в літературі комбінаторні простори є розгорнутими знаковими.

Подібне спостерігаємо в живій природі. Насінину чи клітину розглянемо як згорнутий біологічний простір, який задамо інформаційним знаком. Під дією певних чинників (для рослин – це тепло, волога і земля) утворюється живий об'єкт – розгорнутий простір, який має здатність до згортання з біологічних просторів різних типів. Утворення мовленнєвого простору проводиться з елементів мовленнєвого тракту, які утворюють базову множину. Тобто, для оговорених просторів властиві аксіоми знакових комбінаторних, які також існують у спокої та динаміці. Точкою цих просторів є такі комбінаторні конфігурації, як вибірки різних типів. Аналогічно можна подати інші природні простори: інформаційний, фізичний тощо.

Ключові слова: знакові комбінаторні простори, комбінаторна конфігурація, природні простори, рекурентний комбінаторний оператор, базові множини, комбінаторна множина.

N.K. TYMOFIJEVA
International Scientific Training Cente
for Information Technologses and Systems

MODELING OF NATURAL SPACES USING COMBINATORICS

Phenomena associated with combinatorial numbers, in particular Fibonacci numbers, are observed in nature. These numbers are manifested during the formation of the inflorescence of some flowers, the scales of cones, the placement of the leaves of trees and other plants. The arms of the galaxies, the spiral of rose petals that have blossomed, form a logarithmic spiral. Modeling natural spaces using combinatorics, in particular sign combinatorial spaces, makes it possible to explain the presence of combinatorial numbers in nature. These spaces are formed due to the generation of combinatorial configurations from the elements of the basic set according to certain rules. If you count the number of these configurations in the combinatorial set and form finite sequences from their values, then the latter form an arithmetic triangle through which the Fibonacci numbers appear. The values of these sequences, which are geometrically presented through polar coordinates, form logarithmic spirals.

The ordering of combinatorial sets can be both chaotic and carried out according to strict rules. Similar to the generation of combinatorial sets, sign combinatorial spaces are constructed, the points of which are combinatorial configurations. They exist in two states: collapsed (at rest) and unfolded (dynamics). Collapsed is given by a sign that contains all the properties of expanded spaces. It is given by the base set, (one or several), its type and the rules of deployment from the elements of the base set of points of the deployed space. Sign combinatorial spaces have the property of convolve. The combinatorial spaces described in the literature are deployed sign spaces.

We observe the same in living nature. Consider a seed or a cell as a collapsed biological space, which will be defined by an information sign. Under the action of certain factors (for plants, it is heat, moisture and earth), a living

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-9

object is formed – an deployed space, which has the possibility to convolve from biological spaces of various types. The speech space is formed from the elements of the speech tract that form the basic set. That is, the specified spaces are characterized by the axioms of sign combinatorial spaces, which also exist in rest and dynamics. The point of these spaces are such combinatorial configurations as samples of different types. Similarly, other natural spaces can be submitted: informational, physical, etc.

Key words: signed combinatorial spaces, combinatorial configuration, natural spaces, recurrent combinatorial operator, basis sets, combinatorial set.

Постановка задачі

В біології існують явища, пов'язані з комбінаторними числами. При формуванні суцвіття деяких квітів, луски шишок, розміщенні листя дерев та інших рослин утворюються правильні спіралі, число рядів яких збігається з числами Фібоначчі.. При рості раковин деяких видів молюсків утворюються логарифмічні спіралі. Використання знакових комбінаторних просторів дозволяє пояснити ці явища в природі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою

Досліджені в літературі комбінаторні простори, як правило, зводять до метричних, наприклад [1–5]. Деякі автори вважають, що точками комбінаторного простору є рекурсивні функції [6–7]. В літературі описано евклідові комбінаторні простори [8]. Метричні комбінаторні простори розглядають і як простори впорядкувань [2]. Їх описують заданою множиною W , точками яких є комбінаторні конфігурації певного типу між якими уведено віддаль $r(x, y)$, $x, y \in W$, яка задовольняє трьом аксіомам метричного простору: 1) $r(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$; 2) $r(x, y) = r(y, x)$ (аксіома симетрії); 3) для будь-яких трьох елементів x, y та z $r(x, y) \le r(x, z) + r(z, y)$ (аксіома трикутника).

Але характерною особливістю комбінаторних просторів є не просто існування заданої множини точок комбінаторного характеру, між якими уведено віддаль, а утворення їх із елементів однієї або кількох базових множин з використанням певної системи правил. Для задання комбінаторного простору достатньо увести одну або кілька базових множин, із елементів яких формуються його точки, тип комбінаторної конфігурації та систему правил, за допомогою яких він розгортається.

Мета дослідження

Представлення природних просторів як знакових комбінаторних дозволяє пояснити деякі природні явища, що пов'язані з комбінаторними числами. Ці дослідження показують, що в природі проявляються властивості, характерні для комбінаторики.

Комбінаторні конфігурації

Оскільки точками знакових комбінаторних просторів є комбінаторні конфігурації, розглянемо деякі їхні властивості. Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів базової множини $A = \{a_1 ,..., a_n\}$ [9]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k,..., w_\eta^k)$, $\eta \in \{1,..., n\}$ – кількість елементів у w^k, $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1,..., q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W , q – кількість w^k у W . Дві нетотожні комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$, $k \ne i$. Підмножину $W_\eta \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації. Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k . Як показав аналіз цих множин, їх можна впорядкувати одними і тими самими процедурами, тобто існують закономірності їхнього генерування. Однією з таких властивостей є властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-9

Генерування комбінаторних конфігурацій включає:

а) правила, за якими формуються комбінаторні конфігурації, тобто задаються рекурентні комбінаторні оператори;

б) правила, за якими упорядковуються комбінаторні об'єкти. Ці правила визначаються на основі аналізу структури певної множини.

З цього видно, що для утворення комбінаторної множин певного типу достатньо ввести базову множину елементів та правила, завдяки яким з елементів останньої формуються комбінаторні конфігурації.

Аксіоми знакових комбінаторних просторів

Ураховуючи утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій, сформулюємо аксіоми, яким задовольняють знакові комбінаторні простори [10].

1. Знакові комбінаторні простори існують в двох станах: спокої (згорнутий) та динаміці (розгорнутий).

2. Згорнутий задається інформаційним знаком $\Re = < A,\ T, P, \Xi >$, який містить властивості розгорнутого простору певного типу, де A – одна або кілька базових множин, з елементів $a_{l_j} \in \mathrm{A}_1 \subset A$, яких утворюються розгорнуті комбінаторні простори, $j \in \{1,...,n\}$, $1 \in \{1,...,\tilde{q}\}$, $\tilde{q}$ – кількість базових множин; T – тип комбінаторного простору; P – система правил, за якою він розгортається (за строгими законами або хаотично); Ξ – правила згортання знакового комбінаторного простору.

3. Утворення із згорнутого розгорнутих комбінаторних просторів проводиться за рекурентними правилами. Точкою розгорнутого простору є комбінаторна конфігурація певного типу. Розгортанню комбінаторного простору характерна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.

4. Згортання знакового комбінаторного простору певного типу проводиться з точок як одного так і кількох просторів. Згорнутий простір має властивості просторів, з яких він згорнувся.

Якщо правила розгортання ґрунтуються на строгих законах, то знаковий розгорнутий комбінаторний простір є структурований. Якщо правила розгортання простору не підпорядковано строгим законам, то розгорнутий простір утворюється безладно. Розгортанню комбінаторного простору характерна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій. Метричні, евклідові, рекурсивні простори – це розгорнуті знакові комбінаторні простори.

Природні знакові комбінаторні простори

Теорема 1. Якщо для певних просторів справедливі аксіоми 1–4, то вони мають комбінаторну природу.

Доведення проводимо на основі емпіричних досліджень. Розглянемо *біологічні простори*. Як було оговорено вище, в біології існують явища, пов’язані з комбінаторними числами, зокрема числами Фібоначчі, послідовність яких має такий вигляд: 1, 1, 2, 3 ,5, 8, 13, 21, 34, 55,….. При рості раковин деяких видів молюсків утворюються логарифмічні спіралі. Рукава галактик, спіраль пелюстків троянди, що розпустилася, також утворюють логарифмічну спіраль, яку геометрично можна подати через «золотий прямокутник», в якого одна сторона довша в 1.618 разів («золоте» число або золотий перетин $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.6180339887$ складається з безкінечного ряду цифр, групи в яких не повторюються) [11].

Присутність золотого перетину в рослинах проявляється через числа Фібоначчі таким чином: 1/1=1; 2 /1= 2; 3/2=1.5; 5/3=1.666; 8/5=1,6; 13/8=1.625; 21/13=1.615348. До сорокового числа результат збігається із золотим перетином $\Phi = 1.6180339887$ [11].

При генеруванні множини розбиттів числа або множини розбиттів n-елементної множини на підмножини з використанням властивості періодичності одержані числові послідовності, які задають у них кількість комбінаторних конфігурацій, містять числа Фібоначчі.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-9

Наприклад, для розбиття натурального числа для $n = 7$ утворена скінченна послідовність, яка задає кількість розбиттів у їхній множині, має вигляд 1, 3, 4, 3, 2, 1, 1, де останні чотири цифри – числа Фібоначчі.

Виходячи з цього, насінину чи клітину розглянемо як згорнутий біологічний простір (інформаційний знак $\Re =< A, T, P, \Xi >$). Під дією певних чинників (для рослин – це тепло, волога і земля) утворюється живий об'єкт – розгорнутий простір, який має здатність до згортання.

Отже, згорнутий біологічний простір задається інформаційним знаком $\Re =< A, T, P, \Xi >$, який містить базові множини та систему правил, за допомогою яких комбінацією елементів цих множин (азотисті основи, амінокислоти) розгортається живий організм – розгорнутий біологічний простір. Точкою знакового біологічного простору може бути розбиття числа, розбиття n-елементної множини на підмножини, сполучення без повторень. Ритмічні (пульсуючі) процеси в живій природі пов'язані з рекурентним способом утворення розгорнутих просторів. Знакові біологічні простори, як і комбінаторні, мають властивість із точок розгорнутого (одного або кількох однотипних) згортатися. Новий згорнутий простір має властивості тих просторів, з яких він утворений. Отже, для цих просторів виконуються аксіоми (1) – (4), тому вони мають комбінаторну природу.

Розглянемо знаковий інформаційний простір. Інформація перш за все пов'язана з функціонуванням людського мозку і перебуває в підсвідомості чи свідомості у вигляді образів, фрагментів мовлення тощо. Вважатимемо, що згорнутий інформаційний простір – це підсвідомість, елементи a_{l_j} базових множин $A_l \subset A$ – образи, фрагменти мовлення. Активізується підсвідомість мисленням – системою правил P, завдяки якій із елементів базових множин розгортається частково розгорнутий інформаційний простір – свідомість, що характеризується поняттями, думкою. Оскільки для формування думки необхідно вибирати елементи із базової множини, то точкою розгорнутого інформаційного простору є розміщення з повтореннями, що вказує на комбінаторну природу цього простору. Передача інформації (думки) проводиться розгорнутим інформаційним простором через мовленнєвий простір, завдяки жестам, рухам, за допомогою письма, графічних зображень тощо. Згортання інформаційного простору із розгорнутих мовленнєвих та різних звукових просторів проводиться слуховим апаратом, а образів – зоровим апаратом.

Отже, *інформаційний простір* існує в двох станах: спокої (згорнутий) та динаміці (розгорнутий). Згорнутий задається інформаційним знаком $\Re =< A, T, P, \Xi >$.

Інформаційний простір, який існує поза межами людського організму та створений людиною, назвемо *штучним інформаційним простором*. Він також існує в двох станах: згорнутому та розгорнутому. Книги, рукописи, електронні бібліотеки – штучний згорнутий інформаційний простір. Для його розгортання необхідно знати певні правила (правила читання, доступу до електронних бібліотек тощо).

Мовленнєвий простір задається згорнутим, який містить базову множину (активні та пасивні органи творення мови), правила, за якими творяться звуки (частково розгорнутий мовленнєвий простір), та правила, за якими із звуків (комбінацією точок частково розгорнутого простору) твориться мовлення. Мовленнєвий розгорнутий простір, як і знаковий комбінаторний під дією певних чинників утворюється різноманітними комбінаціями активних та пасивних органів творення мови.

Під згорнутим мовленнєвим простором розуміємо інформаційний знак $\Re =< A, T, P, \Xi >$, де А – базова множина, елементам $a_j \in A$ якої відповідають органи мовленнєвого тракту, P – система правил, за допомогою яких комбінацією $a_j \in A$ розгортається природний мовленнєвий простір, T – розміщення з повтореннями, Ξ – правила згортання мовленнєвого простору завдяки слуховому апарату.

Період основного тону мовленнєвого сигналу порівняємо з інтервалом нульового рангу комбінаторної множини; мінімальну кількість періодів основного тону, при якій відтворюється певний звук – з інтервалом σ-го рангу; відлік сигналу, з якого починається поточний період

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-9

основного тону – з обмежувальною комбінаторною конфігурацією. Точкою мовленнєвого простору є розміщення з повтореннями. Цим можна пояснити, чому вхідні дані в розпізнаванні мовлення мають нечітку структуру.

З цього випливає, що біологічні, інформаційні, мовленнєві простори, як і знакові комбінаторні, існують у двох станах: спокої та динаміці, та для них справедливі аксіоми 1 – 4. Отже, вони мають комбінаторну природу, що і доводить теорему 1.

Знакові фізичні простори. Існують роботи, в яких досліджуються різні виміри фізичного простору. Наприклад в [12] просторовість з комбінаторикою пов'язують через біноміальні коефіцієнти, які утворюють арифметичний трикутник (трикутник Паскаля), який має такий вигляд для $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

У [12] за допомогою біноміальних коефіцієнтів описано базові характеристики фізичного простору. Одновимірний описується послідовністю 1, 1, де перша одиниця – кількість початків координат, а друга – кількість базисних векторів. Двовимірний простір описується послідовністю 1, 2, 1, де перша одиниця – кількість початків координат, 2 – кількість координатних осей, третя одиниця – кількість площин. Тривимірний простір – світ, в якому ми перебуваємо – описується послідовністю 1, 3, 3, 1, де один початок координат, три координатних осі, три площини та один сформований ними простір. Виходячи з цього припущення, чотирьохвимірний простір описується послідовністю 1, 4, 6, 4, 1.

При розгортанні знакового комбінаторного простору з використанням властивості періодичності, точкою якого є сполучення без повторень або розбиття n-елементної множини на підмножини, одержані числові послідовності, які задають у них кількість комбінаторних конфігурацій, утворюють комбінаторні числа та являють собою біноміальні коефіцієнти, що утворюють арифметичний трикутник. Сформулюємо такі теореми.

Теорема 2. Значення послідовності, які задають кількість сполучень без повторень w у їхній множині W, що упорядкована з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій [9], утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Теорема 3. Значення послідовностей, які задають кількість розбиттів n-елементної множини на підмножини у їхній підмножині W_η для $\eta = 2$, що упорядкована з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій [9], утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Доведення теорем 1 – 2 наведено в [13].

Як описано в [13], одержані послідовності, суми членів яких задають кількість w у підмножинах W_η, утворюють арифметичний трикутник та є біноміальними коефіцієнтами, тобто для $n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$ відповідно маємо послідовності: 1; 1,1; 1,2,1, 1,3,3,1; 1,4,6,4,1; 1,5,10,10,5,1; ….

Можна зробити припущення, що фізичному простору властиві аксіоми знакових комбінаторних просторів, тобто він існує в двох станах: спокої та динаміці.

Полярна система координат

Розглянемо, як утворюється логарифмічна спіраль із застосуванням полярних координатах.

Полярна система координат задається променем, який називають нульовим або полярною віссю [14]. Точка, з якої виходить цей промінь називається початком координат або полюсом.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-9

Будь-яка інша точка на площині визначається двома полярними координатами: радіальною (радіусом) ρ та кутовою ϕ. Радіальна координата відповідає відстані від точки до початку координат. Кутова координата, що також зветься полярним кутом дорівнює куту між полярною віссю та напрямком на задану точку. Визначена таким чином радіальна координата може набувати значення від нуля до нескінченості, а кутова координата змінюється в межах від 0° до 360°. Радіáн – це одиниця вимірювання площинних кутів в Міжнародній системі одиниць SI. Один радіан – це площинний кут, утворений двома радіусами, так, що довжина дуги між ними дорівнює радіусу кола і в градусах позначається як $180\pi \approx 57.296°$.

Існують роботи, в яких елементи скінченних послідовностей чисел подано через полярні координати [15]. В [15] їхнє представлення на поверхні утворює арифметичну спіраль (або спіраль Архімеда). Ця спіраль являє собою криву, яку описує точка M під час її рівномірного руху із заданою швидкістю вздовж прямої, що рівномірно обертається у площині навколо однієї зі своїх точок. У полярних координатах її задають у вигляді: $\rho = a\ \omega$, де ω – кутова швидкість.

Логарифмічна спіраль в полярних координатах задається як $\rho = ae^{b\phi}$ або $\phi = \frac{1}{b}\ln(r/a)$, що пояснює назву логарифмічна, де ρ – віддаль від точки O до точки M, ϕ – кут повороту променя, який обертається навколо точки O, відрізок a називається кроком спіралі. зміщення точки M вздовж променя при повороті останнього на кут в один радіан.

Із теорем 2 – 3 випливає, що при розгортанні знакових комбінаторних просторів утворюються скінченні послідовності. Для елементів послідовності 1, 2, 3, 4, 5, 6,... визначимо полярні координати: для 1: (1,1), де перше число – відстань від початку координат до заданої точки, друге – кутова координата в радіанах; тобто дорівнює 1 радіан, для 2, 3, 4, 5, 6 відповідно координати: (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6). Якщо нанести точки з цими координатами на площину проти часової стрілки і з'єднати їх лінією, то отримаємо арифметичну спіраль (або спіраль Архімеда).

Розглянемо послідовності 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...; та 1, 4, 10, 20, 35, 56,..., Задамо їх у полярних координатах: (1, 1), (3,2), (6,3), (10, 4), (15,5), (21, 6), відповідно (1, 1), (4,2), (10, 3), (20, 4), (35,5), (56, 6). Якщо побудувати криві на площині по годинниковій стрілці, то вони набувають форми, яка наближається до логарифмічної спіралі.

Висновки

Представлення природних просторів як знакових комбінаторних дозволяє пояснити різні явища в природі, які пов'язані з комбінаторними числами та логарифмічними спіралями. При розгортанні цих просторів із згорнутого утворюються скінченні послідовності, суми членів яких задають кількість комбінаторних конфігурацій у підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник (трикутник Паскаля). Із арифметичного трикутника утворюються числа Фібоначчі, відповідно і золоте число. Логарифмічна спіраль вписується в золотий прямокутник, а динаміка її формування передається завдяки утвореним в результаті розгортання знакових комбінаторних просторів скінченних послідовностей, елементи яких подано в полярних координатах.

Список використаної літератури

1. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 281 с.
2. Бурдюк В.Я. Дискретное метрическое пространство. Днепропетровск, ДГУ, 1982. 99 с.
3. Bichara Alessandro. Ruled sets imbedden in a combinatorial space. *Atti Semin. Mat. e fis.* Univ. Modena. 1982. **31**, № 2. P. 213–218.
4. Golenko-Ginzburg Dvitri. Metrics in the permutation space. *Appl. Math. Lett*. 1991. **4**, № 2. P. 5–7.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-9

5. Brown T.C. Affine and combinatorial binary-spaces. *J. Combin Theory*, 1985, A39, №1. P. 25–34.
6. Сосков И. Связь простой вычислимости с рекуррентностью в функциональных комбинаторных пространствах. *Мат. теория программирования*: Сб. науч.тр. Новосибирск, 1985. С. 4–11.
7. D. Skordev. Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astronom. Phys*. 1976. **24,** № 1. P. 23–31.
8. Стоян Ю.Г. Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство. Харьков. 1982. 33 с. (Препринт АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; 173).
9. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.
10. Тимофієва Н.К. Знакові комбінаторні простори та штучний інтелект. *Штучний інтелект*. 2015. 1–2(67–68). С.180 – 189.
11. Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты. Мир математики: в 40 т. Т. 1. / Пер. с англ. М.: Де Агостини, 2014. 160 с.
12. Давидов І.В. Опис лінійних просторів за допомогою комбінаторних конфігурацій. *Комбінаторні конфігурації та їх застосування:* Матеріали тринадцятого Міжвузівського науково-практичного семінару (13-14 квітня 2012 р.). Кіровоград: Кіровогр. техн. ун-т. 2012. С. 45– 49.
13. Тимофієва Н.К. Знакові комбінаторні простори, скінченні послідовності та логарифмічні спіралі. *Системи керування та комп'ютери (УСіМ, Control systems & computers)*. 2022. № 1(297). С. 32–43. DOI https://doi.org/10.15407/csc.2022.01.032.
14. Вірченко Н. О., Ляшко І. І. Графіки елементарних та спеціальних функцій: Довідник. Київ: Наук. думка, 1996. 584 с.
15. Почему простые числа образуют спирали? https://www.youtube.com/watch?v=DxntHp7-wbg (дата звернення: 5.05.2021).

References

1. Sergienko, I. V., & Kaspthitzkaja, M. F. (1981). Modeli i metodu reshenija na EVM kombinatornyx zadath optimizatziji, Kiev: Nauk Dumka.
2. Burduk, V.Ja. (1982). Diskretnoje metritheskoje prostranstvo, DGU.
3. Bichara, Alessandro. (1982). Ruled sets imbedden in a combinatorial space. *Atti Semin. Mat. e fis*. Univ. Modena. **31** (2), 213–218.
4. Golenko-Ginzburg, Dvitri. (1991). Metrics in the permutation space. *Appl. Math. Lett*. **4** (2), 5–7.
5. Brown, T.C. (1985). Affine and combinatorial binary-spaces. *J. Combin Theory*. **A39** (1), 25–34.
6. Soskov, Y. (1985). Svijaz prostoi vychislimosti s rekurrentnostiju v funktsionalny[kombinatornyx prostranstvax. *Mat. teoryia prohrammirovanija*: Sb. nauch.tr. – Novosibirsk, 4–11.
7. Skordev, D. (1976). Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astronom. Phys*. **24** (1), 23–31.
8. Stojan, Ju.G. (1982). Ob odnom otobrajenii kombinatornyx mnojestv v evklidovo prostranstvo. Xarkov. (Preprint AN USSR. In-t probl. mashinostrteija; 173).
9. Tymofiieva, N.K. (2007). Teoretyko-chyslovi metody rozviazannia zadach kombinatornoji optymizatsii: avtoref. dys... dokt. texn. nauk: 01.05.02. Kyiv.
10. Tymofijeva, N.K. (2015). Znakovi kombinatorni prostory ta shtuchy'j intelekt. *Shtuchny`j intelekt.* **67–68** (1–2), 180 –189.
11. Fepnando, Korbalan. (2014). Zolotoje sethenije. Matematitheski'j jazyk krasoty. Mir matematiki: v 40 t. T. 1. / Per. s angl. M.: De Agostini.
12. Davydov, I. V.(2012). Opys linijnyx prostoriv za dopomohoju kombinatornyx konfihuratsi'j. *Kombinatorni konfihuratsii ta jix zastosuvannja*: Materialy trynadtsjatoho Mizhvuzivskoho naukovo-praktychnoho seminaru (13-14 kvitnja 2012 r.). Kirovohrad: Kirovohr. tekhn. un-t. 45–49.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-9

13. Tymofijeva, N.K. (2022). Znakovi kombinatorni prostory, skinchenni poslidovnosti ta loharyfmichni spirali. *Systemy keruvannja ta kompjutery (USiM, Control systems & compjuters)*. **1** (297), 32–43. DOI https://doi.org/10.15407/csc.2022.01.032.
14. Virthenko, N. O., & Ljashko, I. I. (1996). Grafiky elementarnyx ta spetsialnyx funkshi'j: Dovidnyk. Кyjiv: Nauk. dumka.
15. Pothemu prostye thisla obrazujut spirali. https://www.youtube.com/watch?v=DxntHp7-wbg (data obrashenija: 5.05.2021).

Тимофієва Надія Костянтинівна – д-р техн. наук, ст. наук. співр., зав. відділом. Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, Київ, e-mail: Tymnad@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0312-1153.