УДК 004.942

Л.С. ФОНАР, О.С. КОНОВАЛОВ, Є.Г. ФІЛІППОВ
Національний університет Одеська політехніка

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПЕРЕДАЧІ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ БАТТЕРВОРТА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Метою проведеного дослідження є використання методів та засобів проектування цифрових фільтрів у динамічному стані для зменшення перехідних процесів у цифрових фільтрах Баттерворта другого порядку, скорочення динамічних режимів цифрових кіл та визначення доцільності використання методу динамічного коефіцієнту передачі. У будь-якій лінійній системі з обмеженою смугою пропускання виникають динамічні похибки, які зменшують завадостійкість прийому сигналів і, в першу чергу, сигналів зі швидкозмінними параметрами. Тому при проведенні обчислень треба враховувати перехідні процеси, які виникають у колах. Якщо параметри сигналу безперервно змінюються у часі, то ці процеси можуть існувати нескінченно. Враховуючи перехідні процеси, необхідно усі розрахунки та аналіз досліджувати у динамічному стані. Недоліки цифрової фільтрації при синтезі по аналоговому прототипу методом інваріантної імпульсної характеристики – неможливість отримати нескінченно малу смугу пропускання, а також наявність ефекту накладення спектрів на краях діапазону через дискретизацію. Для аналізу роботи цифрових фільтрів Баттерворта у динамічному стані використовуються дискретні перетворення Фур'є, пряме та зворотне. Для уникнення накладення спектрів, пропонується перехід до z-перетворення, при цьому попередньо використано денормування коефіцієнтів передачі. У розрахунках використовується коефіцієнт, який пов'язує тактову частоту з частотою зрізу фільтра через кількість вибірок частотної характеристики, та через кількість вибірок в межах смуги пропускання. Для вирішення завдань було використано комплекс методів: системного аналізу – для дослідження діючих алгоритмів обробки перехідних процесів, що виникають у колах; z-перетворення – для синтезу цифрових фільтрів; швидкого перетворення Фур'є та динамічного коефіцієнту передачі – для розрахунку двомірних динамічних характеристик цифрових фільтрів Баттерворта другого порядку. Дістав подальшого розвитку метод синтезу цифрових фільтрів Баттерворта, який дозволяє проводити частотно-часовий аналіз, що дає можливість дослідити динамічні характеристики кіл.

Ключові слова: фільтр Баттерворта, динамічний коефіцієнт передачі, цифровий фільтр.

L.S. FONAR, O.S. KONOVALOV, E.G. FILIPPOV
Odesa Polytechnic National University

SIMULATION OF DYNAMIC TRANSMISSION COEFFICIENTS OF SECOND-ORDER BUTTERWORTH DIGITAL FILTERS

The purpose of the conducted research is to use methods and means of designing digital filters in a dynamic state. This is necessary to reduce the transient processes in second-order Butterworth digital filters, to reduce the dynamic modes of digital circuits, and to determine the expediency of using the dynamic transmission coefficient method. Dynamic errors occur in any linear system with limited bandwidth. Errors reduce the immunity of receiving signals and signals with rapidly changing parameters. Therefore, when performing calculations, it is necessary to take into account transient processes that occur in digital filters. If the parameters of the signal change continuously in time, then these processes can exist indefinitely. Taking into account transient processes, it is necessary to examine all calculations and analysis in a dynamic state. Disadvantages of digital filtering when synthesizing an analog prototype using the method of invariant impulse response are the impossibility of obtaining an infinitely small bandwidth, as well as the presence of the effect of overlapping spectra at the edges of the range due to discretization. Discrete Fourier transforms (direct and inverse) are used to analyze the operation of digital Butterworth filters in a dynamic state. In order to avoid overlapping of spectra, it is proposed to switch to z-transformation, while the denormalization of the transmission coefficients is previously used. The calculations use a coefficient that relates the clock frequency to the cutoff frequency of the filter through the number of samples of the frequency response and through the number of samples within the bandwidth. To solve the problems, a set of methods was used: system analysis – to study the current algorithms for processing transient processes occurring in digital filters; z-transformation – for the synthesis of digital filters; fast Fourier transform and dynamic transmission coefficient – for calculating two-dimensional dynamic characteristics of second-order Butterworth digital filters. The method of synthesizing Butterworth's digital filters was further developed, which allows for time-frequency analysis, which makes it possible to study the dynamic characteristics of digital filters.

Keywords: Butterworth filter, dynamic transmission coefficient, digital filter.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-11

Постановка проблеми

Актуальною проблемою сучасних телекомунікаційних, інформаційних, комп'ютерно-інтегрованих систем та автоматизації є цифрова обробка сигналів. Цифрові фільтри відрізняються стабільністю параметрів, простотою зміни амплітудно-частотної характеристики і можливістю адаптації параметрів фільтру під необхідні умови. Ці переваги використовуються в таких областях, як придушення різного роду завад, розпізнавання, пристроях обробки та передачі даних, слідкування за параметрами зовнішнього середовища, акустика, радіолокація, сейсмологія, зв'язок, системи передачі даних, ядерна техніка, випробувальні установки і багатьох інших [1-4].

При цифровій обробці сигналів використовується їх представлення у вигляді послідовностей чисел або символів. Мета такої обробки полягає у визначені параметрів сигналу або в перетворенні сигналу у більш зручну для обробки форму, яка в деякому розумінні зручніша [3, 5]. Формули класичного чисельного аналізу, такі, як формули для інтерполяції, інтеграції і диференціювання, безумовно є алгоритмами цифрової обробки. Наявність швидкодіючих електронних обчислювальних машин сприяла розвитку та ускладненню алгоритмів обробки сигналів; останні ж успіхи в технології інтегральних схем обіцяють високу економічність побудови дуже складних систем цифрової обробки сигналів [6].

Але як для аналогових, так і для цифрових фільтрів існують свої проблеми синтезу. Для перших – це проблеми стабільності і точності елементів. Цифрові фільтри, в свою чергу, мають абсолютно точні елементи, але значення величин в цих фільтрах може бути тільки квантованим, а тому кожна математична операція може стати джерелом помилок округлення, та збільшувати шуми [7].

При обчисленнях треба враховувати перехідні процеси, які виникають у радіотехнічних колах, а якщо параметри сигналу безперервно змінюються у часі, то ці процеси можуть існувати нескінченно. Враховуючи перехідні процеси, необхідно усі розрахунки та аналіз досліджувати у динамічному стані радіокіл.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Традиційні методи аналізу проходження сигналів через лінійні кола та визначення відгуку засновані на використанні часових або частотних характеристик сигналів та кіл. До часових методів належать метод інтегро-диференціальних рівнянь та інтеграл Дюамеля. До частотних – спектральний та операторний методи [1-2, 4-5]. У результаті використання цих методів знаходяться миттєві значення відгуку цифрових фільтрів.

Недоліки цифрової фільтрації при синтезі по аналоговому прототипу методом інваріантної імпульсної характеристики – неможливість отримати нескінченно малу смугу пропускання, а також наявність ефекту накладення спектрів на краях діапазону через дискретизацію [5, 7-9].

Як правило, корисна інформація в радіотехнічних сигналах зосереджена в комплексній обвідній [7]. У цих випадках використовувати традиційних методи аналізу не завжди зручно, тому що не має сенсу визначати миттєві значення відгуку кола. Досить визначити комплексну обвідну відгуку в його аналітичній формі. Це спрощує усі обчислення [8, 9]. У будь-якій лінійній системі з обмеженою смугою пропускання виникають динамічні похибки, які зменшують завадостійкість прийому сигналів і, в першу чергу, сигналів зі швидкозмінними параметрами. Комплексна обвідна – це повільна функція часу, яка накладена на високочастотне заповнення з несучою частотою [7].

Динамічний коефіцієнт передачі (ДКП) знаходимо за наступною формулою [7]:

$$K(j\omega,t)=\int_0^t h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (1)$$

де: τ – стала часу кола, $h(\tau)$ імпульсна характеристика кола, ω частота, t – час.

ДКП є узагальненням частотно-часових характеристик кіл [7-9]. Так, при частоті він перетворюється у перехідну функцію кола

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-11

$$K(0,t) = g(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau \tag{2}$$

А при часі $t \to \infty$ ін стає стаціонарним коефіцієнтом передачі кола:

$$K(j\omega) = \int_0^\infty h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{3}$$

Як функція часу ДКП визначає безпосередньо комплексну обвідну на виході кола при стрибку амплітуди гармонічного сигналу з частотою ω в момент. Двовимірна функція ДКП включає в себе і частотну характеристику кола і часову. Реальне відображення передаточних функцій фільтрів є безперервним (у силу своєї фізичної сутності) і для спрощення подальших розрахунків звичайно задається у аналітичній формі у комплексній *p*-площині по частотному аргументу ω від -∞ до +∞. При z-перетворенні відбувається нелінійне викривлення шкали частот: повний частотний діапазон від – ∞ до +∞ безперервних функцій у *p*-площині стискається до головного частотного діапазону дискретних функцій у z-площині. z- перетворення дозволяє зробити перехід від фактичних частот головного частотного діапазону, котрим повинен відповідати оператор цифрового фільтру, до денормованих частот $\omega_д$ комплексної *p*-площини, на котрій можна задавати необхідну форму передаточної функції фільтру, при цьому апроксимація передаточних функцій, враховуючи існування ω від -∞ до +∞, може проводитися многочленами і раціональними функціями [7-9].

Мета дослідження

Метою проведеного дослідження є використання методів та засобів проектування цифрових фільтрів у динамічному стані для зменшення перехідних процесів у цифрових фільтрах Баттерворта другого порядку, скорочення динамічних режимів цифрових кіл та визначення доцільності використання методу динамічного коефіцієнту передачі (ДКП).

Для вирішення завдань було використано комплекс методів: системного аналізу – для дослідження діючих алгоритмів обробки перехідних процесів, що виникають у радіотехнічних колах; z-перетворення – для синтезу цифрових фільтрів; швидкого перетворення Фур'є та динамічного коефіцієнту передачі – для розрахунку двомірних динамічних характеристик цифрових фільтрів Баттерворта другого порядку.

Дістав подальшого розвитку метод синтезу цифрових фільтрів Баттерворта, який дозволяє проводити частотно-часовий аналіз, що дає можливість дослідити динамічні характеристики кіл.

Викладення основного матеріалу дослідження

В якості вихідних даних використано операторний коефіцієнт передачі:

$$K(p)=M(p)/N(p), \tag{4}$$

де $M(p)$ і $N(p)$ – поліноми, які задаються шляхом вибору типу фільтра, наприклад Баттерворта [1, 7-8].

Виконаємо заміну оператора:

$$p = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \tag{5}$$

у результаті чого отримаємо новий вираз

$$K(z)=M(z)/N(z). \tag{6}$$

Фільтр Баттерворта другого порядку описується операторним коефіцієнтом передачі:

$$K(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}. \tag{7}$$

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-11

Амплітудно-частотна характеристика фільтра Баттерворта другого порядку описується виразом

$$K(\omega) = \left| \frac{1}{p(j\omega)^2 + \sqrt{2} j\omega + 1} \right|. \quad (8)$$

Частотна характеристика фільтру Баттерворта без використання методу z-перетворення, досягає нуля на нескінченній частоті. При переході до цифрових фільтрів робоча ділянка частотної характеристики обмежується частотою $\omega_{max} = \frac{\omega_T}{2}$ де $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ тактова частота (частота Найквіста), T – відстань між вибірками імпульсного відгуку. Усічення частотної характеристики шляхом виключення частот вище ω_{max} призводить до погрішностей у роботі фільтрів.

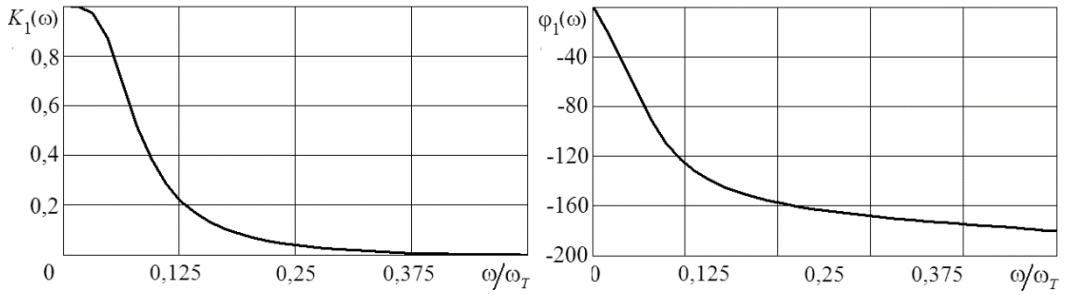
При побудові фільтрів, які синтезуються на підставі операторних характеристик, таку похибку можна виключити. Для уникнення накладення спектрів пропонується перехід до z-перетворення шляхом заміни оператора p на підставі (5), попередньо використано денормування коефіцієнтів передачі. У розрахунках використовується коефіцієнт $R = \frac{\omega_T}{\pi\omega_з}$ який пов'язує тактову частоту ω_T частотою зрізу фільтра. $\omega_з$ через кількість вибірок частотної характеристики N, а через r – кількість вибірок в межах смуги пропускання, тоді:

$$R = \frac{N}{\pi r}. \quad (9)$$

Отримано коефіцієнт передачі для фільтра Баттерворта другого порядку після перетворення та нормування:

$$K(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{R^2 + \sqrt{2}R + 2z^{-1}\left(1 - R^2\right) + z^{-2}\left(R^2 - \sqrt{2}R + 1\right)}. \quad (10)$$

Для переходу з z-площини до частотної площини слід здійснити заміну. $z = e^{j\omega T}$. Використовуючи стандартну програму обчислення модуля і фази комплексного коефіцієнту передачі $K(j\omega)$ визначені вибірки амплітудно-частотних (АЧХ) і фазо-частотних (ФЧХ) характеристик, на підставі яких були побудовані графіки (рис. 1):



а) б)

Рис. 1. АЧХ (а) та ФЧХ (б) фільтру Баттерворта другого порядку, розраховані при використанні методу z-перетворення

Як бачимо, в даному випадку вдається уникнути накладення спектрів, через те що амплітудно-частотні характеристики досягають нуля, а фазо-частотні – 180°.

Для аналізу роботи цифрових фільтрів Баттерворта у динамічному стані використовуються дискретні перетворення Фур'є (ДПФ), пряме та зворотне (ЗДПФ). По частотній характеристиці фільтра обчислена імпульсна характеристика фільтру (рис. 2):

Розрахунок часових характеристик необхідний нам для подальшого аналізу роботи цифрових фільтрів у динамічному режимі. Пряме і зворотне ДПФ розраховуються за допомогою матриць ДПФ і ЗДПФ [7]. Графік динамічного коефіцієнта передачі фільтрів Баттерворта другого порядку наведено на рис. 3:

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-11

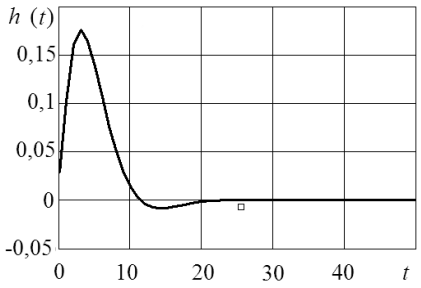


Рис. 2. Імпульсна h(t) характеристики фільтрів Баттерворта другого порядку

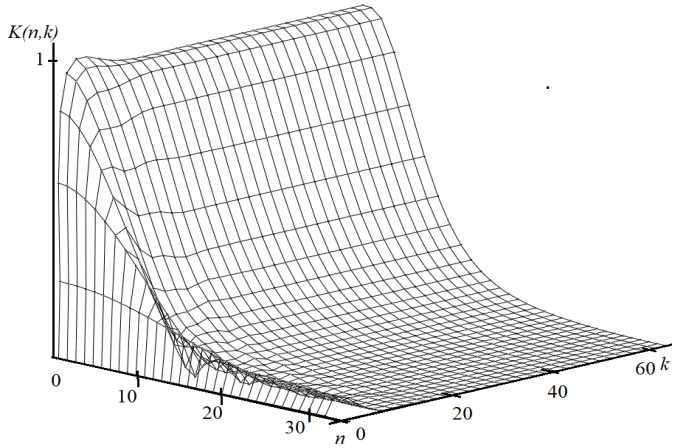


Рис. 3. Динамічний коефіцієнт передачі фільтра Баттерворта 2-го порядку

Висновки

У будь-якій лінійній системі з обмеженою смугою пропускання виникають динамічні похибки. Вони ведуть до зменшення завадостійкості прийому сигналів і, в першу чергу, сигналів зі швидкозмінними параметрами. Синтез цифрових фільтрів Баттерворта за допомогою метода z-перетворення дозволяє отримати частотні характеристики без втрати «хвостів». Для визначення динамічних характеристик цифрових фільтрів Баттерворта після обчислення вибірок імпульсного відгуку слід використовувати усічену матрицю дискретного перетворення Фур'є. Динамічний коефіцієнт передачі цифрових фільтрів Баттерворта другого порядку як функція часу при $t \to \infty$ плавно переходить до стаціонарного значення. Показано і практично підтверджено, що найбільш зручним і інформативним в аналізі динаміки цифрових фільтрів Баттерворта за допомогою комплексних обвідних є частотно-часовий метод динамічного коефіцієнта передачі.

Список використаної літератури

1. Скляр Б. Цифровий зв'язок. Теоретичні основи і практичне застосування. М: Видавничий дім «Вільямс», 2003. 1104 с.
2. Агаджанян А. Р., Філіпський Ю. К. Переваги обробки нестаціонарних сигналів частотно-часовими методами. *Праці ОПУ*. 2011. С. 125–129.
3. Фонар Л. С., Ємельянов С. В., Барабанов М. О. Синхронно-гребінчастий фільтр для виділення регулярних компонентів у віброакустичних сигналах роторних машин. *Вісник херсонського НТУ*. Херсон. 2019. С. 69–74.
4. Proakis J., Manolakis D. Digital Signal Processing. London: Pearson. 1019 p. – (4th Edition).
5. Філіпський Ю. К. Динаміка сигнальних перетворень. – Одеса: ОДПУ, 2006. 89 с.
6. Бойко В. І., Багрій В. В. Цифрова схемотехніка. К: ІЗМН, 2001. 228 с.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-11

7. Filipsky Yu. K., Fonar L.S. Synthesis of highly selective digital filters without analog prototypes. *Proceedings of the XXXI International Scientific Conference ELNANO*. April 12-14, 2011. Kyiv, 2011. C. 44.
8. Фонарь Л.С. Динамические характеристики цифровых фильтров без аналоговых прототипов. *Вісник Хмельницького національного університету*. 2013. № 5 (205). С. 171-176.
9. Фонарь Л.С., Филипский Ю.К. Частотно-временной анализ цифровых гауссовых фильтров. *Труды Одесского политехн. ун-та*. 2013. Вып. 2(41). С. 257-260.

References

1. Skliar, B. (2003)/ Tsyfrovyi zviazok. Teoretychni osnovy i praktychne zastosuvannia [Digital communication. Theoretical foundations and practical application]. M: Vydavnychyi dim «Viliams».
2. Ahadzhanian, A. R., & Filipskyi, Yu. K. (2011). Perevahy obrobky nestatsionarnykh syhnaliv chastotno – chasovymy metodamy [Advantages of processing non-stationary signals by frequency-time methods. *Pratsi OPU*, 125–129.
3. Fonar, L. S., Yemelianov, S. V., & Barabanov, M. O. (2019). Synkhronno-hrebinchastyi filtr dlia vydilennia rehuliarnykh komponentiv u vibroakustychnykh syhnalakh rotornykh mashyn [Synchronous comb filter for extracting regular components in vibroacoustic signals of rotary machines]. *Visnyk khersonskoho NTU*. Kherson., 69–74.
4. Proakis, J., & Manolakis, D. Digital Signal Processing. London: Pearson. (4th Edition).
5. Filipskyi, Yu. K. (2006). Dynamika syhnalnykh peretvoren [Dynamics of signal transformations]. Odesa: ODPU.
6. Boiko, V. I., & Bahrij, V. V. (2001). Tsyfrova skhemotekhnika [Цифрова схемотехніка]. K: IZMN.
7. Filipsky, Yu.K., & Fonar, L.S. (2011). Synthesis of highly selective digital filters without analog prototypes. *Proceedings of the XXXI International Scientific Conference ELNANO April 12-14, 2011 h*. Kyiv, 44.
8. Fonar, L.S. (2013). Dynamycheskye kharakterystyky tsyfrovikh fyltrov bez analohovikh prototypov [Dynamic characteristics of digital filters without analog prototypes]. *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu*. **5** (205), 171-176.
9. Fonar, L.S., & Fylypskyi, Yu.K. (2013). Chastotno-vremennoi analyz tsyfrovikh haussovikh fyltrov [Frequency-time analysis of digital Gaussian filters]. *Trudi Odesskoho polytekhn. un-ta*. **2**(41), 257-260.

Фонар Людмила Сергіївна – к.т.н.. доцент кафедри штучного інтелекту та аналізу даних Національного університету «Одеська політехніка», e-mail: fonar_l_s@ukr.net, ORCID: 0000-0002-7478-6742.

Коновалов Олександр Сергійович – аспірант кафедри штучного інтелекту та аналізу даних Національного університету «Одеська політехніка», e-mail: akonovalov.lux@gmail.com, ORCID: 0000-0001-8023-9633.

Філіппов Євген Геннадійович – аспірант кафедри штучного інтелекту та аналізу даних Національного університету «Одеська політехніка», e-mail: 7161160@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9034-176X.

https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-2-11