

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет ім. Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО, О.М. ДУДЧЕНКО

Херсонський навчально-науковий інститут Національного університету кораблебудування
ім. адм. Макарова

І.О. АСТІОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

ГЕОМЕТРИЧНІ ГІПОТЕЗИ І ФІЗИЧНА НЕАДЕКВАТНІСТЬ СЕРЕНДИПОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Фізичною неадекватністю стандартних серендипових скінченних елементів (СЕ) називають "парадокс гравітаційного відштовхування", тобто від'ємні вузлові навантаження від рівномірної масової сили. Першим на цю особливість звернув увагу сам професор О. Зенкевич, який разом із Ергатудісом і Айронсом відкрив серендипові СЕ. Він був переконаний, що цей недолік усунути неможливо. До такого висновку схилиється більшість фахівців, які використовують матричний метод побудови базисних функцій. Аналізуючи нематричний метод Тейлора, можна знайти причини виникнення від'ємних навантажень в кутових вузлах СЕ. Це своєрідна "помста" математичної моделі за ідеалізацію. В стандартному алгоритмі Тейлора закладені геометричні гіпотези формування лінійчатих проміжних (некутових) базисних поверхонь.

В тих випадках, коли необхідне узгодження між геометричними гіпотезами і фізичною адекватністю моделей серендипових СЕ, краще відмовитись від матричного аналізу. Важливо знайти конструктивний спосіб зменшити середню аплікату проміжних базисних поверхонь. Такі поверхні у рамках інтерполяційної гіпотези Лагранжа придатні для метода Тейлора і можуть успішно замінити традиційні коноїди. Можна зберегти коноїди, якщо звернутися до тригонометричних напрямних. Популярність тригонометричних базисів в МСЕ зростає, а потенціал елегантного метода Тейлора ще не вичерпано. Стосовно кубатури Q_{12} треба відзначити, що вона ефективна і дає точні результати, навіть коли «працюють» лише чотири (або три) вузли із дванадцяти.

Ми пропонуємо замість лінійчатих поверхонь (коїдів) з нульовою кривиною Гаусса подвійно опуклі поверхні з від'ємною кривиною. Ефективність такої модифікації метода Тейлора ілюструють приклади серендипових СЕ: Q_8 (біквдратичний), Q_{12} (бікубічний) та мішаний Q_{10} (квадратично-кубічний). Наведено базиси альтернативних СЕ та інтегральні і локальні характеристики нових моделей.

Ключові слова: метод скінченних елементів (МСЕ), геометрична гіпотеза Тейлора, фізична неадекватність стандартних СЕ, модифікація метода Тейлора.

A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

O.I. LYTVYNNENKO, O.N. DUDCHENKO

Kherson Educational and Scientific Institute of the Admiral Makarov National University of Shipbuilding

I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

GEOMETRICAL HYPOTHESES AND PHYSICAL INADEQUACY OF SERENDIPITY FINITE ELEMENTS

The physical inadequacy of standard serendipity finite elements (FEs) is referred to as the "paradox of gravitational repulsion," i.e., negative nodal loads from a uniform mass force. Professor O. Zenkiewicz who, together with Ergatoudis and Irons discovered serendipitous FEs, was the first to notice this peculiarity. He believed that this drawback could not be eliminated. This conclusion is shared by most experts who use the matrix method of constructing basis functions. By analyzing Taylor's non-matrix method, it is possible to find the causes of negative loads in the angular nodes of the FEs. This is a sort of "revenge" of the mathematical model for idealization. The standard algorithm of Taylor incorporates geometric hypotheses of forming linear intermediate (non-angular) basis surfaces.

In cases where a reconciliation between geometric hypotheses and physical adequacy of serendipity FE models is required, it is better to avoid matrix analysis. It is important to find a constructive way to reduce the average application of intermediate basis surfaces. Such surfaces, under the Lagrange interpolation hypothesis, are suitable for the Taylor method and can successfully replace traditional conoids. Conoids can be preserved if one turns to trigonometric directions. The popularity of trigonometric bases in the FEM is growing, and the potential of the elegant Taylor method has not yet

been exhausted. Regarding the Q_{12} cubature, it should be noted that it is efficient and gives accurate results even when only four (or three) nodes out of twelve are "working".

We propose doubly convex surfaces with negative curvature instead of linear surfaces (conoids) with zero Gauss curvature. The effectiveness of such a modification of the Taylor method is illustrated by examples of serendipity FEs: Q_8 (biquadratic), Q_{12} (bicubic), and mixed Q_{10} (quadratic-cubic). The bases of alternative FEs and the integral and local characteristics of the new models are presented.

Key words: finite element method (FEM), Taylor's geometric hypothesis, physical inadequacy of standard FEs, modification of Taylor's method.

Постановка проблеми

Фізична неадекватність спектра вузлових навантажень завжди була і лишається актуальною проблемою для стандартних серендипових СЕ. Пошуки фізично адекватних спектрів привели до появи альтернативних моделей. Модельний ряд фізично адекватних СЕ поповнюється виключно за рахунок нематричних методів. Це пряме геометричне конструювання базисів або конденсація "дутої" моди. У цій роботі ми використовуємо прихований потенціал елегантного (на думку Р. Галлагера) метода для побудови альтернативних базисів найбільш розповсюджених серендипових СЕ: Q_8 , Q_{12} і Q_{10} . Для спрощення процедури інтегрального усереднення ми пропонуємо зручну кубатуру на мішаному шаблоні Q_{12} .

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Історія серендипових СЕ почалася у 1968 р. [1], коли Ергатудіс, Айронс і Зенкевич (в англійських джерелах EIZ) винахідливо підібрали базисні функції для поліноміальної інтерполяції в моделях Q_4 (білінійна), Q_8 (біквадратична), Q_{12} (бікубічна). У 1971 р. [2] Зенкевич звернув увагу читачів на неприродний з точки зору будівельної механіки зміст розподілу вузлових навантажень в елементах Q_8 і Q_{12} . Нагадаємо, що це був період бурхливого розвитку МСЕ під впливом інженерно орієнтованих науковців. Подальші дослідження [3-5] показали, що це обов'язкова особливість стандартних серендипових базисів, які отримані методом оберненої матриці. Заслуга Тейлора [6] полягає в тому, що він запропонував математичну процедуру конструювання базисів серендипових СЕ. На жаль, геометрична гіпотеза Тейлора спирається на лінійчаті поверхні (коноїди Каталана), що не звільняє стандартні моделі від фізичної неадекватності спектрів вузлових навантажень. Стереометричний аналіз формоутворення некласичних базисів [7-13] показав, що геометричні гіпотези не обов'язково обмежувати коноїдами. Це означає, що існують модифікації метода Тейлора. В нашій роботі модифікований варіант метода Тейлора ілюструється на моделях Q_8 , Q_{12} і Q_{10} . При обчисленні вузлових навантажень замість подвійного інтегрування ми використовуємо спеціальний обчислювальний шаблон Q_{12} і кубатурну формулу для зваженого усереднення аплікату базисних поверхонь. Це квазіметод Монте-Карло на основі стратифікованої вибірки із 12-ти аплікату. Випадковість вже майже 40 років [14] використовується в МСЕ.

Мета дослідження

Мета дослідження – підібрати проміжні базисні поліноми метода Тейлора таким чином, щоб усунути фізичну неадекватність в спектрах вузлових навантажень серендипових елементів Q_8 , Q_{12} і Q_{10} . Протестувати запропонований обчислювальний шаблон і кубатуру для зваженого усереднення інтегральних характеристик нових базисів (квазіметод Монте-Карло).

Викладення основного матеріалу дослідження

Серендипові СЕ ми розглядаємо на канонічному квадраті $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ (рис. 1). В класичному алгоритмі метода Тейлора саме на першому кроці [3, 6] закладено геометричні гіпотези, які стали причиною виникнення «парадокса Зенкевича».

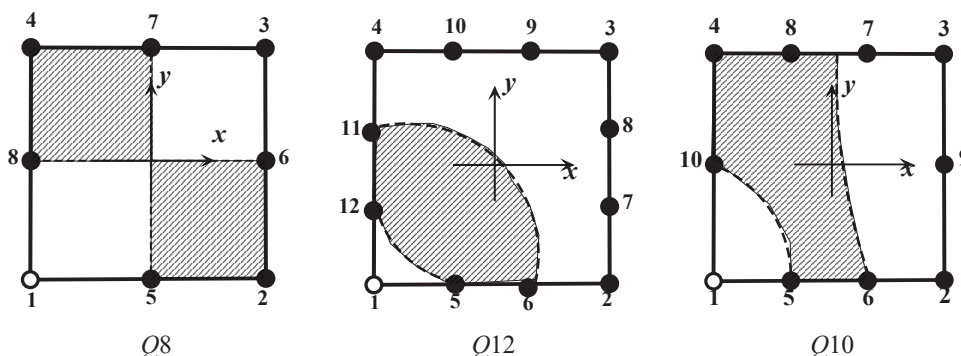


Рис. 1. Портрети ліній нульового рівня кутових поверхонь $N_1(x, y)$; області від’ємних значень (заштриховано)

Щоб уникнути від’ємних навантажень в кутових вузлах, треба зменшити середні аплікати проміжних поверхонь. Тут існує декілька способів. Цікавий приклад неklasичного формоутворення проміжних поверхонь ми спостерігали у стереометричному конструюванні CE Q8 [7]. Аналогічні гіпотези розповсюджені на CE Q10 і Q12. Таким чином, класичний алгоритм метода Тейлора зберігається, але проміжні поверхні інші.

Зрозуміло, що кутові поверхні базисів також відрізняються від стандартних. Важливо, що альтернативні моделі мають фізично адекватні спектри вузлових навантажень.

Покажемо альтернативні моделі. Проста і наочна процедура метода Тейлора докладно описана в [3, 6, 8], тому ми наводимо результати, модель Q8 (рис. 1):

$$N_5(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2)(1 - y)^2, \text{ аналогічно } N_i(x, y) \text{ для } i = 6, 7, 8;$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x)(1 - y)xy, \text{ аналогічно } N_i(x, y) \text{ для } i = 2, 3, 4.$$

Вузлові навантаження:

$$i = \frac{1}{36} \text{ для } i = 1, 2, 3, 4; \quad i = \frac{2}{9} \text{ для } i = 5, 6, 7, 8.$$

Нагадаємо, що для стандартної моделі Q8:

$$i = \frac{1}{12} \text{ для } i = 1, 2, 3, 4; \quad i = \frac{1}{3} \text{ для } i = 5, 6, 7, 8.$$

Модель Q12 (рис. 1):

$$N_5(x, y) = \frac{9}{64}(1 - x^2)(1 - 3x)(1 - y)^2,$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 6, 7, \dots, 12$;

$$N_1(x, y) = \frac{1}{64}(1 - x)(1 - y)(-2 + 9(x^2 + y^2 + x + y - x^2y - xy^2)),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 2, 3, 4$.

Вузлові навантаження: $i = 0$, для $i = \overline{1, 4}$; $i = \frac{1}{5}$, $i = 5, \dots, 12$; для стандартної моделі Q12:

$$i = -\frac{1}{8}, i = \overline{1, 4}; \quad i = \frac{3}{16}, i = 5, 6, \dots, 12.$$

Модель Q10 (рис. 1):

$$N_5(x, y) = \frac{9}{64}(1 - x^2)(1 - 3x)(1 - y)^2,$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 6, 7, 8$;

$$N_{10}(x, y) = \frac{1}{4}(1 - y^2)(1 - x)^2,$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 9$;

$$N_1(x, y) = \frac{1}{64}(1 - x)(1 - y)(-1 + 8x + y + 8xy + 9x^2 - 9x^2y),$$

аналогічно $N_i(x, y)$ для $i = 2, 3, 4$.

Вузлові навантаження:

$$i = \frac{1}{72}, i = \overline{1, 4}; \quad i = \frac{1}{8}, i = 5, 6, 7, 8; \quad i = \frac{2}{9}, i = 9, 10.$$

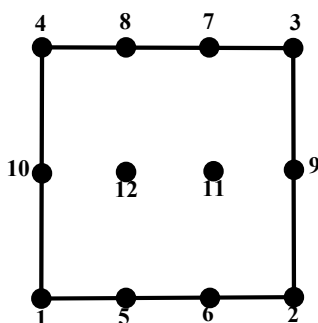
Для стандартної моделі Q10:

$$i = -\frac{5}{48}, i = \overline{1, 4}; \quad i = \frac{1}{48}, i = 5, \dots, 8; \quad i = \frac{1}{3}, i = 9, 10.$$

Вузлові навантаження, зазвичай, визначають подвійним інтегруванням базисної функції за формулою Ньютона-Котеса:

$$i = \frac{1}{S} \int_D N_i(x, y) dx dy, \text{ де } S - \text{ площа області } D.$$

Якщо це незручно, як для кутових поверхонь в нових моделях Q10 і Q12, можна скористатися обчислювальним шаблоном Q12 і відповідною кубатурою (рис. 2). Ця кубатура дає точні результати для всіх розглянутих моделей.



$$\bar{f} = \frac{1}{48} \sum_{i=1}^4 f_i + \frac{1}{16} \sum_{i=5}^8 f_i + \frac{1}{12} \sum_{i=9}^{10} f_i + \frac{1}{4} \sum_{i=11}^{12} f_i.$$

Рис. 2. Обчислювальний шаблон Q12 і кубатура квазіметода Монте-Карло

Висновки

В тих випадках, коли необхідне узгодження між геометричними гіпотезами і фізичною адекватністю моделей серендипових СЕ, краще відмовитись від матричного аналізу. Важливо знайти конструктивний спосіб зменшити середню аплікату проміжних базисних поверхонь. Такі поверхні у рамках інтерполяційної гіпотези Лагранжа придатні для метода Тейлора і можуть успішно замінити традиційні коноїди. Можна зберегти коноїди, якщо звернутися до тригонометричних напрямних. Популярність тригонометричних базисів в МСЕ зростає, а потенціал елегантного метода Тейлора ще не вичерпано. Стосовно кубатури Q12 треба відзначити, що вона ефективна і дає точні результати, навіть коли “працюють” лише чотири (або три) вузли із 12-ти.

Список використаної літератури

1. Ergatoudis J., Irons B.M., Zienkiewicz D.C. Curved isoperimetric quadrilateral elements for finite element analysis, Int. J. Solids Struct., 1968, 4, p. 31-42.
2. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
3. Gallagher R.H. Finite Element Analysis fundamentals, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N.Y. (1975).

4. Akin I.E. Finite Element Analysis with Error Estimators. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2005. 477 p.
5. Onate E. Structural Analysis with the Finite Element Method. Springer Netherlands, 2009. 495 p.
6. Taylor R.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis. J.Num. Meth. Eng.,1972, 4, №1, p. 17-22.
7. Хомченко А. Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О. Тригонометричні субститут-базиси скінченного елемента Q8. Прикладні питання математичного моделювання. 2020. Т. 3, № 1. С. 248-255. DOI: 10.32782/2618-0340/2020.1-3.25.
8. Астіоненко І.О., Литвиненко О.І., Хомченко А.Н. Інтерполяційна процедура Тейлора для побудови базисів серендипових SE: модифікація. Матеріали міжн. наук. конф. “Інтелектуальні системи прийняття рішень і проблеми обчислювального інтелекту”. Т. 1, Херсон: ХНТУ, 2009, с. 9-12.
9. Хомченко А.Н., Астіоненко І.А. Гауссова кривизна серендипових поверхностей или как прогнуть коноид. Вісник ХНТУ, 3 (58), 2016, с.444-447.
10. Хомченко А. Н., Литвиненко О.І., Карпова С.О., Астіоненко І.О. Моделі коноїдів та метод перерізів. Прикладні питання математичного моделювання. 2021. Т. 4, № 1. С. 253-260. DOI: 10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.27.
11. Хомченко А. Н., Тендітна Н.В., Литвиненко О.І., Дудченко О.М., Астіоненко І.О. Кусково-планарне моделювання базисів мішаних серендипових елементів. Прикладні питання математичного моделювання. Т. 3, № 2.2. 2020. С. 283-292. DOI: 10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.28
12. Хомченко А. Н., Литвиненко О.І., Дудченко О.М., Астіоненко І.О. Стереометрія стиснутих коноїдів та фізична адекватність базисів елемента Q8. Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 3 (134). Дніпро, 2021. С. 40-48. DOI: 10.34185/1562-9945-3-134-2021-05
13. Guchek P., Astionenko I., Dudchenko O., Litvinenko O. and Khomchenko A. Inherited Properties of Mixed Finite Elements. 37th IBIMA Conference: 30-31 May 2021, Cordoba, Spain, p. 11307-11317. <https://ibima.org/accepted-paper/inherited-properties-of-mixed-finite-elements/>
14. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты метода конечных элементов. Ивано-Франковский Ин-т нефти и газа, 1982. 9 с. Деп. в ВИНТИ 18.03.1982, № 1213 – 82 Деп.

References

1. Ergatoudis, J., Irons, B.M., & Zienkiewicz, D.C. (1968). Curved isoperimetric quadrilateral elements for finite element analysis, Int. J. Solids Struct., 4, 31-42.
2. Zienkiewicz, O. C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill
3. Gallagher, R.H. (1975). Finite Element Analysis fundamentals, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N.Y.
4. Akin, I.E. (2005). Finite Element Analysis with Error Estimators. Elsevier, Butterworth-Heinemann.
5. Onate, E. (2009). Structural Analysis with the Finite Element Method. Springer Netherlands.
6. Taylor, R.L. (1972). On the completeness of shape functions for finite element analysis. J.Num. Meth.Eng. 4 (1), p. 17-22.
7. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O.I., & Astionenko, I.O. (2020). Tryhonometrychni substytut-bazysy skinchennoho elementa Q8. Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia. 3 (1), 248-255. DOI: 10.32782/2618-0340/2020.1-3.25.

8. Astionenko, I.O., Lytvynenko, O.I., & Khomchenko, A.N. (2009). Interpoliatsiina protsedura Teilora dlia pobudovy bazysiv serendypovykh SE: modyfikatsiia. Materialy mizhn. nauk. konf. "Intelektualni systemy pryiniattia rishen i problemy obchysliuvalnoho intelektu". T. 1, Kherson: KhNTU, 9-12.
9. Homchenko, A.N., & Astionenko, I.A. (2016). Gaussova krivizna serendypovykh poverhnostey ili kak prognut konoid. Visnyk HNTU, 3 (58), 444-447.
10. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O.I., Karpova, S.O., & Astionenko, I.O. (2021). Modeli konoidiv ta metod pereriziv. Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання. 4, (1), 253-260. DOI: 10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.27.
11. Khomchenko, A. N., Tenditna, N.V., Lytvynenko, O.I., Dudchenko, O.M., & Astionenko, I.O. (2020). Kuskovo-planarne modeliuвання bazysiv mishanykh serendypovykh elementiv. Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання. 3 (2.2), 283-292. DOI: 10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.28
12. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O.I., Dudchenko, O.M., & Astionenko, I.O. (2021). Stereometriia stysnutykh konoidiv ta fizychna adekvatnist bazysiv elementa Q8. Systemni tekhnologii. Rehionalnyi mizhvuzivskiy zbirnyk naukovykh prats. Dnipro, 3 (134), 40-48. DOI: 10.34185/1562-9945-3-134-2021-05
13. Guchek, P., Astionenko, I., Dudchenko, O., Litvinenko, O. & Khomchenko, A. (2021). Inherited Properties of Mixed Finite Elements. 37th IBIMA Conference: 30-31 May 2021, Cordoba, Spain, p. 11307-11317. <https://ibima.org/accepted-paper/inherited-properties-of-mixed-finite-elements/>
14. Homchenko, A.N. (1982). Nekotoryie veroyatnostnyie aspektyi metoda konechnyih elementov. Ivano-Frankovskiy In-t nefti i gaza, 9 s. Dep. v VINITI 18.03.1982, #1213 – 82 Dep.

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили, e-mail: khan@chmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Дудченко Олег Миколайович – к.т.н., професор кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін, заступник директора з навчальної роботи Херсонського навчально-наукового інституту Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: kbnuos@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7724-0892.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.