

УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ,
Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»
І.В. ВОРОНЦОВА
Полтавський коледж нафти і газу Національного університету
«Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»

ЗАКОНОМІРНОСТІ ЗМІНИ ВЕЛИЧИН КОЕФІЦІЄНТІВ СУПЕРПОЗИЦІЇ У ПРОЦЕСІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ГІПЕРБОЛІЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

У проектуванні сучасних будівельних споруд, архітектурних форм покриттів значне місце займає геометричне проектування, коли на стадії ескізу обумовлені основні геометричні форми з їх перевагами і недоліками.

Застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні з класичним методом скінчених різниць, дозволяє істотно підвищити ефективність та розширити можливості процесу дискретного моделювання геометричних образів (ГО). Зокрема, дослідити можливість використання у якості інтерполянтів не тільки параболічних, а й будь-яких інших функціональних залежностей.

У процесі створення методик дискретного моделювання ГО звичайні способи інтерполяції не дозволяють застосовувати трансцендентні функції як інтерполянти, тому що при підстановці в них значень вихідних умов отримують систему трансцендентних рівнянь, яку не вдається розв'язати у загальному випадку.

У даній статті досліджено закономірності змін величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для дискретного моделювання ланцюгової лінії. Дані дослідження визначають загальний підхід до одержання подібних закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для визначення координат n точок модельованих будь-яких одновимірних функціональних залежностей та довільних одновимірних множин точок.

Розроблений спосіб дозволяє проводити трансцендентні криві через задані точки, що у більшості випадків є неможливим при застосуванні звичайних методів інтерполяції.

У подальшому результати даної роботи дозволять визначати закономірності зміни величини одного із трьох коефіцієнтів суперпозиції, як для суміжних, так і для не суміжних заданих трьох вузлових точок різних елементарних функцій, що дозволить розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних та трансцендентних рівнянь.

Ключові слова: дискретне моделювання, геометричні образи, метод скінчених різниць, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, ланцюгова лінія, гіперболічні функції.

О. В. ВОРОНЦОВ,
Национальный университет «Полтавская политехника имени Юрия Кондратюка»
И.В. ВОРОНЦОВА
Полтавский колледж нефти и газа Национального университета
«Полтавская политехника имени Юрия Кондратюка»

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ВЕЛИЧИН КОЭФФИЦИЕНТОВ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОЦЕССЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

В проектировании современных строительных сооружений, архитектурных форм покрытий значительное место занимает геометрическое проектирование, когда на стадии эскиза обусловлены основные геометрические формы с их преимуществами и недостатками.

Применение геометрического аппарата суперпозиций в сочетании с классическим методом конечных разностей позволяет существенно повысить эффективность и расширить возможности процесса дискретного моделирования геометрических образов (ГО). В частности, исследовать возможность использования в качестве интерполянтов не только параболических, но и любых других функциональных зависимостей.

В процессе создания методик дискретного моделирования ГО обычные способы интерполяции не позволяют применять трансцендентные функции как интерполянты, потому что при подстановке в них значений исходных условий получают систему трансцендентных уравнений, которую не удается решить в общем случае.

В данной статье исследованы закономерности изменений величин коэффициентов суперпозиции трех произвольно заданных, как смежных, так и не смежных узловых точек для дискретного моделирования цепной линии. Данные исследования определяют общий подход к получению подобных закономерностей изменения величин коэффициентов суперпозиции трех произвольно заданных, как смежных, так и не смежных узловых точек для определения координат n точек моделируемых любых одномерных функциональных зависимостей и произвольных одномерных множеств точек.

Разработанный способ позволяет проводить трансцендентные кривые через заданные точки, что в большинстве случаев невозможно при использовании обычных методов интерполяции.

В дальнейшем результаты данной работы позволят определять закономерности изменения величины одного из трех коэффициентов суперпозиции, как для смежных, так и для не смежных заданных трех узловых точек различных элементарных функций, что позволит решать задачи сплошной дискретной интерполяции и экстраполяции числовыми последовательностями любых одномерных функциональных зависимостей (определять ординаты искомых точек дискретных кривых) без трудоемких операций составления и решения больших систем линейных и трансцендентных уравнений.

Ключевые слова: дискретное моделирование, геометрические образы, метод конечных разностей, статико-геометрический метод, геометрический аппарат суперпозиций, цепная линия, гиперболические функции.

O.V. VORONTSOV,

National University «Yuri KondratyukPoltava Polytechnic»

I.V. VORONTSOVA

Poltava Oil and Gas College ofNational University «Yuri KondratyukPoltava Polytechnic»

REGULARITIES OF VALUES CHANGE OF SUPERPOSITION COEFFICIENTS IN INTERPOLATION BY HYPERBOLIC FUNCTIONS

In design of modern building structures, architectural coating forms, geometric design takes a significant place, when at a sketch stage basic geometric shapes are determined together with their advantages and disadvantages

Using the geometric apparatus of superpositions in combination with the classical finite difference method we can significantly increase efficiency and expand capabilities of discrete modeling of geometric images. In particular, we can investigate the possibility of using as parabolic functional dependencies as any other ones as interpolants.

Creating discrete modeling techniques, traditional interpolation methods do not allow using transcendental functions as interpolants. This is due to the fact that the system of transcendental equations, which is obtained by substituting initial conditions into these functions, cannot be solved in the general case.

In this article it was investigated regularities of values change of superposition coefficients of three arbitrarily specified nodal points (both adjacent and non-adjacent) for discrete modeling of a catenary. These researches determine a general approach to obtaining similar regularities of values change of superposition coefficients of three arbitrary given nodal points (as adjacent as not-adjacent) to determine coordinates of n points of any modeled one-dimensional functional dependencies and arbitrary one-dimensional sets of points.

The developed method allows transcendental curves to be drawn through specified points, which is not possible with usual interpolation methods.

In the future, the results of this work will make it possible to determine regularities of change a value of one from three superposition coefficients for three given nodal points (as adjacent as not-adjacent) of various elementary functions. This will allow solving problems of continuous discrete interpolation and extrapolation by numerical sequences of any one-dimensional functional dependencies (to determine ordinates of desired points of discrete curves) without cumbersome operations of compiling and solving huge systems of linear and transcendental equations.

Key words: discrete modeling, geometric images, finite difference method, static-geometric method, geometric apparatus of superpositions, catenary, hyperbolic functions.

Постановка проблеми

У процесі створення методик дискретного моделювання геометричних образів (ГО) звичайні способи інтерполяції не дозволяють застосовувати трансцендентні функції як інтерполянти тому, що при підстановці в них значень вихідних умов отримаємо систему трансцендентних рівнянь, яку не вдається розв'язати у загальному випадку.

Залучення геометричного апарату суперпозицій для розв'язання задач інтерполяції значно розширює можливості дискретного моделювання ГО. Дослідивши закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції, як для суміжних, так і для не суміжних заданих трьох вузлових точок трансцендентних функцій, зможемо розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції трансцендентними функціями без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем трансцендентних рівнянь.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Питанням застосування для дискретного моделювання ГО геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом скінченних різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей присвячені роботи авторів даної статті [1, 2, 3, 4].

Формулювання мети дослідження

Метою даної статті є дослідження закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок у процесі дискретної інтерполяції гіперболічними функціями, що дозволить розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції трансцендентними функціями без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем трансцендентних рівнянь.

Викладення основного матеріалу дослідження

Згідно доведеної у роботі [1] Властивості 1, координати будь-якої точки одновимірної множини точок є суперпозицією координат трьох довільних точок цієї множини і виведено формули для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції із системи рівнянь (1):

$$\begin{cases} x_0 - x_3 = k_1(x_1 - x_3) + k_2(x_2 - x_3) \\ y_0 - y_3 = k_1(y_1 - y_3) + k_2(y_2 - y_3) \end{cases}, \quad (1)$$

у вигляді (2):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(x_0 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_0 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}, \\ k_2 &= \frac{(x_1 - x_3)(y_0 - y_3) - (x_0 - x_3)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ – відомі числові параметри, k_1, k_2 – невідомі.

У задачах дискретної інтерполяції та екстраполяції невідомою величиною є ордината y_0 , тому розв'яжемо дану систему рівнянь, у якій відомими числовими параметрами будуть $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, k_1$, а y_0 , та, наприклад, k_2 – невідомі, або y_0 , та k_1 – невідомі.

Результатом такого розв'язку будуть формули (3) і (4):

$$y_0 = k_1(y_1 - y_3) + y_3 - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} [k_1(x_1 - x_3) + (x_3 - x_0)],$$

або:

$$y_0 = k_1 y_1 + ((k_1(x_2 - x_1) + (x_0 - x_2))y_3 + (k_1(x_1 - x_3) + (x_3 - x_0))y_2) / (x_3 - x_2);$$

$$y_0 = k_2 y_2 + ((k_2(x_1 - x_2) + (x_0 - x_1))y_3 + (k_2(x_2 - x_3) + (x_3 - x_0))y_1) / (x_3 - x_1); \quad (3)$$

$$k_1 = (k_2(x_2 - x_3) + (x_3 - x_0)) / (x_3 - x_1);$$

$$k_2 = (k_1(x_1 - x_3) + (x_3 - x_0)) / (x_3 - x_2). \quad (4)$$

Дослідивши закономірності зміни величини коефіцієнта суперпозиції k_i при моделюванні дискретних аналогів певних одновимірних числових послідовностей, зможемо розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Розглянемо, наприклад, процес формування дискретних аналогів трансцендентних функціональних залежностей.

Наприклад, для вихідних умов замкненої форми числової послідовності (5)

$$y_i = chi; \quad (5)$$

$$i + 1 = 0, i + 2 = 1, i + 3 = 2, i_0 = i + 4 = 3;$$

$$y_{i+1} = 1, y_{i+2} = 1,543080635, y_{i+3} = 3,762195691,$$

$$y_0 = y_{i+4} = 10,067662,$$

числові дискретні значення якої представлені графічно на рисунку 1, величини коефіцієнтів суперпозиції, обчислені за формулами (2), матимуть значення: $k_1 = 2,4381069994, k_2 = -5,8762139987, k_3 = 4,4381069993$.

Величини коефіцієнту суперпозиції k_1 :

$$k_1 = 2,4381069994; 11,4006053799; 38,060320756;$$

$$112,812110429; 318,286580244 \quad (6)$$

і величини k_2, k_3 представляють собою числові послідовності, що, як і значення ординат числової послідовності $y_i = chi$, описуються рекурентною формулою на підставі шаблону (7):

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \approx \textcircled{2,368} - \textcircled{-1,736} - \textcircled{0,368} \end{array}, \quad (7)$$

одержаного в результаті досліджень у роботі [3].

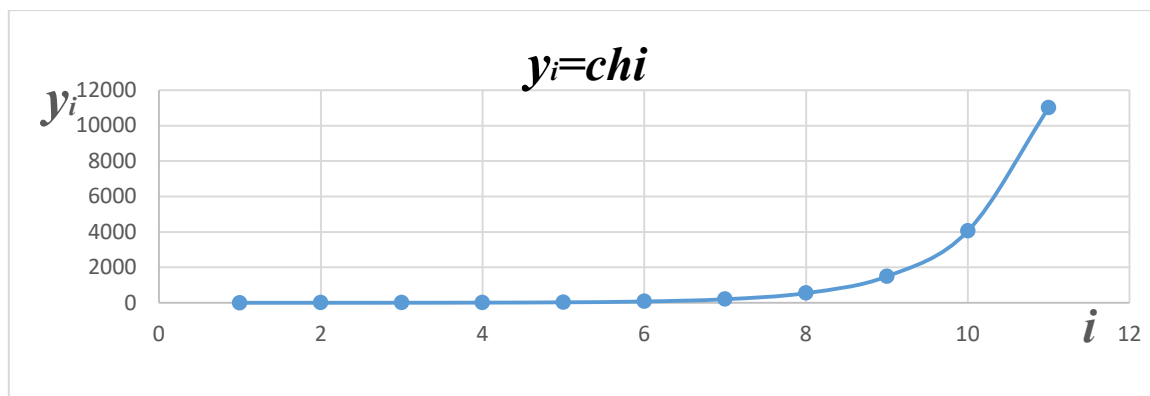


Рисунок 1. Графік дискретного ряду вузлових точок числової послідовності $y_i = \chi i$

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції графічно представлені на рисунку 2.

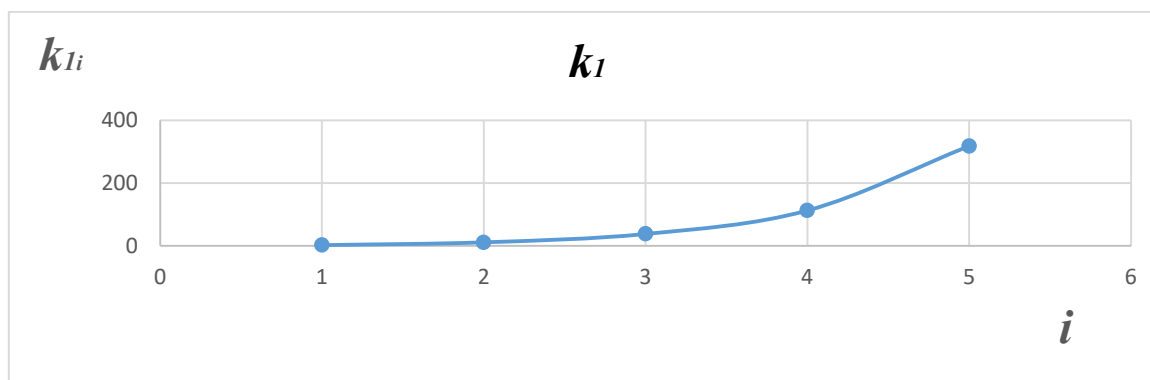


Рисунок 2. Графік дискретного ряду значень коефіцієнту суперпозиції k_i .

У шаблоні (7) величини коефіцієнтів суперпозиції трьох суміжних із шуканою точок одержані з точністю до третього знаку після коми. Тому, як і для величин коефіцієнтів суперпозиції даного обчислювального шаблону, отримуємо результат з точністю до третього знаку після коми:

$$\begin{aligned}
 y_{i-2} &= 2,368 \cdot y_{i-1} - 1,736 \cdot y_i + 0,368 \cdot y_{i+1}, & (8) \\
 2,4381069994 &= 2,368 \cdot 11,4006053799 - 1,736 \cdot 11,4006053799 + \\
 &+ 0,368 \cdot 38,060320756 = 2,438773.
 \end{aligned}$$

Тому достатньо мати три члени послідовності для визначення її n членів.

На підставі одержаних вище закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох суміжних вузлових точок (8) зможемо обчислити n дискретних значень вузлових точок числової послідовності (5) як суперпозиції трьох довільно заданих суміжних вузлових точок.

Отримані дискретні значення ординат модельованої кривої представляють собою числову послідовність, що, як і значення ординат числової послідовності (5), описується рекурентною формулою (8) і також є ланцюговою лінією.

Дискретні значення ординат вузлових точок модельованої кривої показано на рисунку 3.

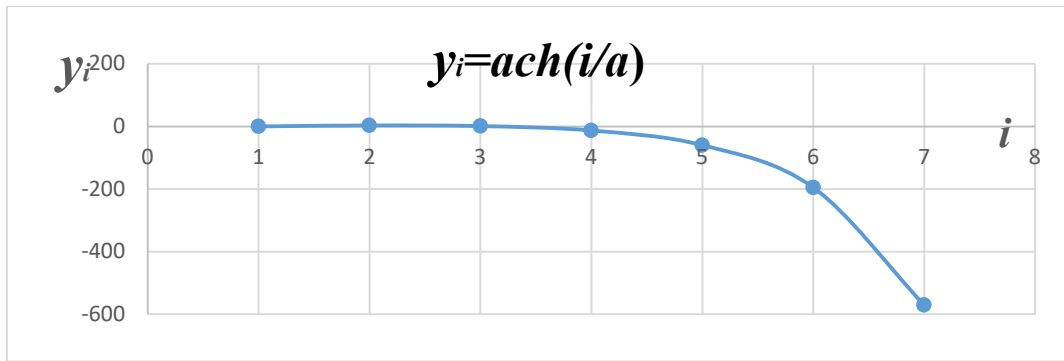
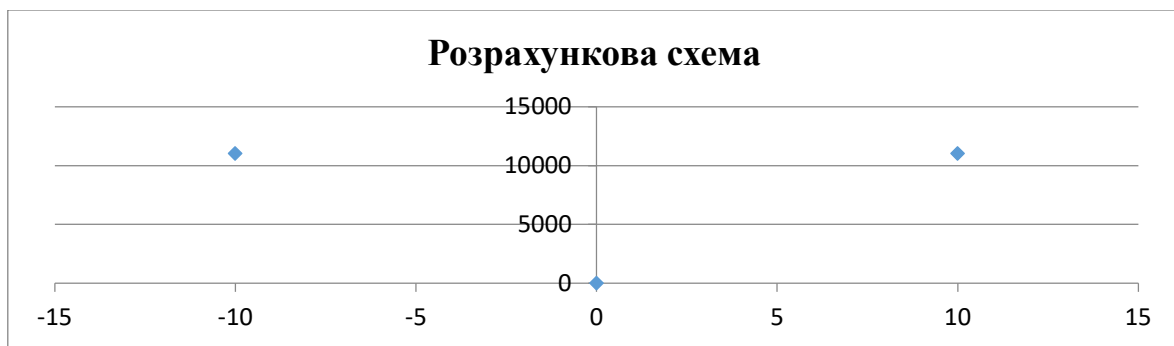
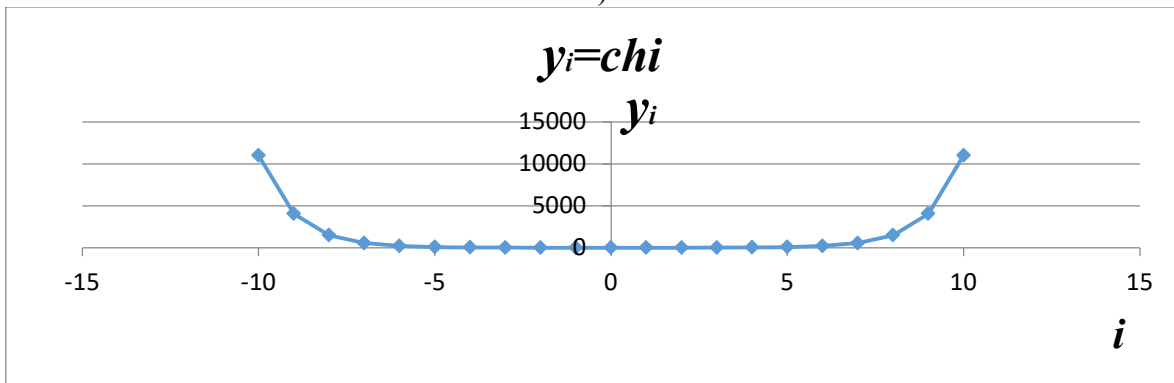


Рисунок 3. Графік дискретних значень ординат вузлових точок модельованої кривої

Розглянемо процес формування дискретних аналогів функціональних залежностей також на основі числової послідовності (5), члени якої представлені графічно на рисунку 4 б).



а)



б)

Рисунок 4 а), б). Розрахункова схема і графік дискретного ряду вузлових точок числової послідовності $y_i = \chi i$

Для симетричних вихідних умов розрахункової схеми, представленої на рисунку 4 а):

$$i_1 = -10, i_2 = 0, i_3 = 10 ;$$

$$y_{i_1} = 11013,2329201; y_{i_2} = 1, y_{i_3} = 11013,2329201;$$

за формулами (2) обчислимо величини коефіцієнтів суперпозиції заданих двох контурних і центральної вузлових точок для визначення ординат проміжних вузлових точок.

Величини коефіцієнтів суперпозиції представляють собою числові послідовності, що, як і значення ординат числової послідовності $y_i = ch_i$, описуються рекурентною формулою (10) на підставі шаблону (9):

$$1 \approx 0,422 \cdot 0,733 \cdot -0,155, \quad (9)$$

одержаного в результаті досліджень у роботі [3],

$$y_{i-1} = 0,422 \cdot y_{i-2} + 0,733 \cdot y_i - 0,155 \cdot y_{i+1}, \quad (10)$$

Результати обчислень дискретних значень ординат модельованої кривої представлено графічно на рисунку 5.

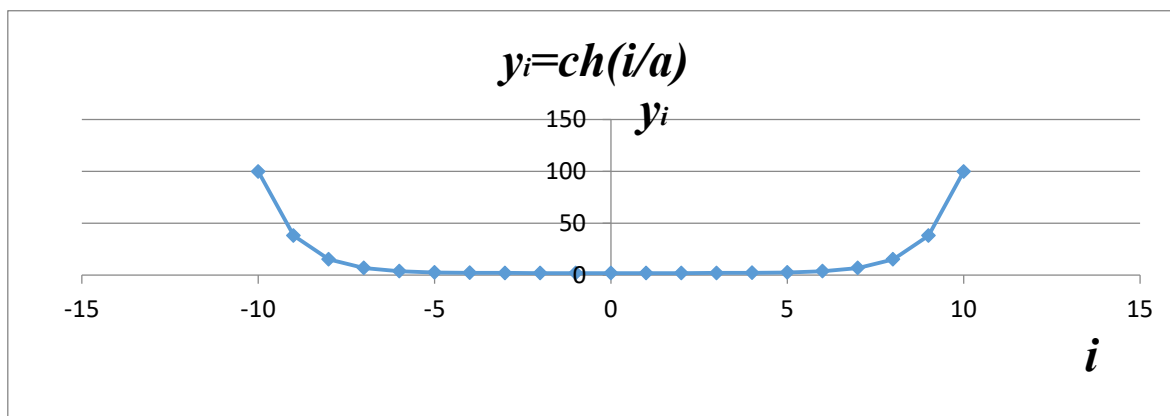


Рисунок 5. Графік дискретних значень ординат вузлових точок модельованої кривої

Таким чином виконано дискретну інтерполяцію гіперболічною функцією суперпозиціями координат трьох довільно заданих точок.

Висновки

У даній статті досліджено закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок у процесі дискретної інтерполяції гіперболічними функціями. Результати даних досліджень визначають загальний підхід до одержання подібних закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для визначення координат n точок модельованих будь-яких одновимірних функціональних залежностей та довільних одновимірних множин точок.

Список використаної літератури.

1. Воронцов О.В., Тулупова Л.О. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств. *Сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике»*. Новосибирск. 2014. №11 (36). С. 7–16.
2. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Спосіб одновимірної дискретної інтерполяції за координатами трьох точок числових послідовностей на прикладі показникових функцій. *Прикладні питання математичного моделювання*. Херсон: ХНТУ. 2020.Т.3. №2.2. С. 35–43.

3. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Discrete modeling of building structures geometric images. *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. Vol. 7/ No. 3.2. P. 727–731.
4. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Modeling of shell type spatial structural forms by superpositions of support nodes coordinates. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2019. Vol. 73. P. 501–513.

References.

1. Vorontsov, O.V., & Tulupova, L.O. (2014). Diskretnoe modelirovanie krivyyih poverhnostey superpozitsiyami dvumernyyih tochechnyyih mnozhestv: *sbornik statey po materialam XL mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Tehnicheskie nauki – ot teorii k praktike»*. Novosibirsk, **11**(36), 7–16.
http://sibac.info/sites/default/files/archive/2014/2014.11.19_teh._nauki_pravka.pdf
2. Vorontsov, O.V., & Vorontsova, I.V. (2020). Sposib odnovymirnoi dyskretnoi interpoliatsii za koordynatamy trokh tochk chyslovykh poslidovnostei na prykladi pokaznykovykh funktsii. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. Kherson, **3**, 2.2, 35–43. DOI:10.32782.2618-0340/2020.3.2-2.3
3. Vorontsov, O.V., Tulupova, L.O., & Vorontsova, I.V. (2018). Discrete modeling of building structures geometric images. *International Journal of Engineering & Technology*. **7**, 3.2, 727–731. DOI: 10.14419/ijet.v7i3.2.15467
4. Vorontsov, O.V., Tulupova, L.O., & Vorontsova, I.V. (2019). Modeling of shell type spatial structural forms by superpositions of support nodes coordinates. *Lecture Notes in Civil Engineering*. **73**, 501-513. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-42939-3>

Воронцов Олег Вікторович – к.т.н., доцент, завідуючий кафедрою нарисної геометрії і графіки Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», e-mail: voronoleg6163@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7339-9196.

Воронцова Ірина Валеріївна – к.пед.н., викладач Полтавського коледжу нафти і газу Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», e-mail: ira061061@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9131-2816.