УДК 539.3

Т.С. КАГАДІЙ, А.Г. ШПОРТА
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
О.В. БІЛОВА
Український державний університет науки і технологій (НМетАУ)
І.В. ЩЕРБИНА
Дніпровський державний аграрно-економічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Розв'язки багатьох важливих для практики задач, що виникають в сучасній техніці, не завжди можуть бути отримані традиційними методами теорії аналітичних функцій або за допомогою інтегральних перетворень. Це відноситься, наприклад, до контактних задач, в яких враховуються скінченні розміри області хоча б в одному напрямку, або досліджуються середовища з криволінійною анізотропією тощо. Засоби математичної теорії пружності виявляються не надто ефективними для дослідження таких задач. У цьому випадку доцільно використовувати досягнення теорії потенціалу. Застосування ж асимптотичних методів при цьому, навіть в складних випадках, дозволяє отримувати обґрунтовані наближені рівняння, уточнювати якісні закономірності і отримувати аналітичні розв'язки задач.

У даній роботі представлене узагальнення методу збурень, яке дозволяє звести дослідження складних задач геометрично нелінійної теорії пружності (в плоскій та просторовій постановці) до послідовного розв'язання більш простих крайових задач теорії потенціалу. Геометрично нелінійна теорія пружності містить в собі деякі особливості, завдяки яким вона відрізняється від класичної (лінійної) теорії. Головна відмінність полягає в урахуванні різниці між геометрією недеформованого та деформованого станів досліджуваного тіла, коли мають місце переміщення, які викликають значні зміни геометрії тіла. При цьому рівняння рівноваги необхідно складати з урахуванням зміни форми і розмірів конструкцій. Врахування кінцевих деформацій, які при створенні математичних моделей веде до значних труднощів при розв'язуванні задач, але в той же час наближає модель до реальної проблеми.

Метод збурень, що використовується для розв'язання нелінійних рівнянь у частинних похідних, має теоретичне і практичне значення. Він універсальний і може використовуватися для аналізу різних завдань математичної фізики. Розроблений підхід може бути застосований для вирішення завдань, в яких істотну роль грають залишкові деформації. Наприклад, згин тонких пластин і оболонок. У розглянутій модельній задачі вдалося виділити вплив геометричної нелінійності на напружено-деформований стан досліджуваного тіла.

Саме тому результати представленої роботи мають як теоретичне, так і прикладне значення, а дослідження є актуальним.

Ключові слова: асимптотичний метод, анізотропія, геометрична нелінійність.

Т.С. КАГАДИЙ, А.Г. ШПОРТА
Национальный технический университет «Днепровская политехника»
О.В. БЕЛОВА
Украинский государственный университет науки и технологий (НМетАУ)
И.В.ЩЕРБИНА
Днепровский государственный аграрно-экономический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Решения многих важных для практики задач, возникающих в современной технике, не всегда могут быть получены традиционными методами теории аналитических функций или с помощью интегральных преобразований. Это относится, например, к контактным задачам, в которых учитываются конечные размеры области хотя бы в одном из направлений, или исследуются среды с криволинейной анизотропией и т. д. Средства математической теории упругости оказываются не слишком эффективными для исследования таких задач. В этом случае целесообразно использовать достижения теории потенциала. Применение же асимптотических методов при этом, даже в

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11

сложных случаях, позволяет получать обоснованные приближенные уравнения, уточнять качественные закономерности и получать аналитические решения задач.

В данной работе представлено обобщение метода возмущений, которое позволяет свести исследование сложных задач геометрически нелинейной теории упругости (в плоской и пространственной постановке) к последовательному решению более простых краевых задач теории потенциала. Геометрически нелинейная теория упругости содержит в себе некоторые особенности, благодаря которым она отличается от классической (линейной) теории. Главное отличие заключается в учете разницы между геометрией недеформированного и деформированного состояний исследуемого тела, когда имеют место перемещения, которые вызывают значительные изменения геометрии тела. При этом уравнения равновесия необходимо составлять с учетом изменения формы и размеров конструкций. Учет конечных деформаций, при создании математических моделей ведет к значительным трудностям при решении задач, но в то же время приближает модель к реальной проблеме.

Метод возмущений, который используется для решения нелинейных уравнений в частных производных, имеет теоретическое и практическое значение. Он универсален и может использоваться для анализа различных задач математической физики. Разработанный подход может быть применен для решения задач, в которых существенную роль играют остаточные деформации. Например, изгиб тонких пластин и оболочек. В рассматриваемой модельной задаче удалось выделить влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние исследуемого тела.

Именно поэтому результаты представленной работы имеют как теоретическое, так и прикладное значение, а исследования являются актуальными.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропия, геометрическая нелинейность.

T.S. KAGADIY, A.H. SHPORTA
Dnipro University of Technology
O.V. BILOVA,
National Metallurgical Academy of Ukraine (NMetAU)
I.V. SCHERBINA
Dnipro State Agrarian and Economic University

MATHEMATICAL MODELING IN GEOMETRICALLY NONLINEAR ELASTICITY THEORY PROBLEMS

The resolve of many important problems in practice that arise in modern technology cannot always be obtained by traditional methods of analytic function theory or by means of integral transformations. This applies, for example, to contact problems, which take into account the finite size of the region in at least one direction, or investigate environments with curvilinear anisotropy and the like. The means of mathematical theory of elasticity are not very effective for the study of such problems. In this case, it is advisable to use the achievements of the theory of potential. The use of asymptotic methods, even in complex cases, allows to obtain reasonable approximate equations, to clarify the qualitative patterns and to obtain analytical solutions.

This paper presents a generalization of the perturbation method, which allows us to reduce the study of complex problems of geometrically nonlinear elasticity theory (in plane and spatial formulation) to the sequential solution of simpler boundary value problems of potential theory. Geometrically nonlinear theory of elasticity contains some features that make it different from classical (linear) theory. The main difference is to take into account the difference between the geometry of the undeformed and deformed states of the studied body, when there are displacements that cause significant changes in the geometry of the body. The equilibrium equation must be made taking into account changes in the shape and size of structures. Taking into account the final deformations, which in the creation of mathematical models leads to significant difficulties in solving problems, but at the same time brings the model closer to the real problem.

The perturbation method, which is used to solve nonlinear equations in partial derivatives, has theoretical and practical significance. It is universal and can be used to analyze various problems of mathematical physics. The developed approach can be applied to solve problems in which residual deformations play a significant role. For example, the bending of thin plates and shells. In the considered model problem it was possible to allocate influence of geometrical nonlinearity on a stress-strain state of the investigated body.

That is why the results of the presented work have both theoretical and applied significance, and the study is relevant.

Keywords: asymptotic method, anisotropy, geometric nonlinearity.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11

Постановка проблеми

Врахування нелінійності, геометричної або фізичної, часто приводить до значних проблем при розв’язуванні задач. Особливо багато питань виникає в просторових задачах для анізотропних матеріалів. Асимптотичні методи [1] майже у будь-яких складних випадках дозволяють отримати обґрунтовані наближені рівняння, з’ясувати якісні закономірності та отримати аналітичні розв’язки задач [2]. Методи малого параметра не втрачають своєї ваги на тлі розвитку чисельних методів і часто є основою для розробки останніх. Створення будь-яких нових підходів до розв’язування задач геометрично нелінійної теорії пружності є актуальним і цікавим питанням сучасного математичного моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Однією з найважливіших цілей досліджень останніх років є врахування складних властивостей матеріалів (нелінійність, анізотропія, електропружність, в’язкопружність, тощо), що наближає математичну модель до реальних задач. Наприклад в [3] запропоновано метод розв'язання задачі електро-в'язкопружності для багатозв'язних пластин. Методом малого параметра задача зведена до рекурентної послідовності задач електров'язкопружності, що розв'язуються з використанням комплексних потенціалів.

Мета дослідження

Створення нового підходу до розв’язання рівнянь геометрично нелінійної теорії пружності (урахування кінцевих деформацій), що дозволяє звести складну вихідну крайову задачу теорії пружності до послідовного розв’язування крайових задач теорії потенціалу. Узагальнення методу на випадок просторової то осесиметричної постановок. Дослідження ефективності методу на прикладі модельної задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай система координат матеріальна і при деформуванні деформується. Цей метод описання деформованого стану відомий як метод Лагранжа, коли координати поточних точок недеформованої системи (чисельно) співпадають з координатами деформованої системи.

В тривимірній задачі теорії пружності з урахуванням кінцевих деформацій роль характеристик деформації грають компоненти тензора деформацій, що в декартовій системі координат ***x, y, z*** мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&e_{11} = u_x + \frac{1}{2}\left(u_x^2 + v_x^2 + w_x^2\right),\ e_{22} = v_y + \frac{1}{2}\left(u_y^2 + v_y^2 + w_y^2\right),\\
&e_{33} = w_z + \frac{1}{2}\left(u_z^2 + v_z^2 + w_z^2\right),\ e_{13} = u_z + w_x + u_x u_z + v_x v_z + w_x w_z,\\
&e_{23} = v_z + w_y + u_y u_z + v_y v_z + w_y w_z,\\
&e_{12} = u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де u, v, w - компоненти вектора зміщення.

Введені наступні перетворення координат та шуканих функцій, що залежать від малого параметру ε, що характеризує анізотропію матеріалу [2, 4]

$$
\begin{aligned}
&\xi_i = \gamma_1^{(i)} \varepsilon^{\alpha_1^{(i)}} x,\ \eta_i = \gamma_2^{(i)} \varepsilon^{\alpha_2^{(i)}} y,\ \varsigma_i = \gamma_3^{(i)} \varepsilon^{\alpha_3^{(i)}} z,\\
&u^{(i)} = \varepsilon^{\beta_1^{(i)}} U^{(i)},\ v^{(i)} = \varepsilon^{\beta_2^{(i)}} V^{(i)},\ w^{(i)} = \varepsilon^{\beta_3^{(i)}} W^{(i)},\ i = 1,2,3.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11

Таким чином, як і в лінійній постановці [5], в нелінійній теорії пружності можуть бути отримані три види деформованих станів з різними властивостями, що виявляються в відмінності порядків компонент вектора зміщень та їх різній відмінності за координатами. Показано, що можна отримати три відповідних напружених стани.

Питання про напружено-деформований стан тривимірного геометрично нелінійного тіла зведено до інтегрування рівнянь рівноваги в декартовій системі координат x, y, z:

$$\begin{gathered}
\left[\left(1+u_x\right)\sigma_{11}+u_y\sigma_{12}+u_z\sigma_{13}\right]_x+\left[\left(1+u_x\right)\sigma_{12}+u_y\sigma_{22}+u_z\sigma_{23}\right]_y+ \\
+\left[\left(1+u_x\right)\sigma_{13}+u_y\sigma_{23}+u_z\sigma_{33}\right]_z=0, \\
\left[v_x\sigma_{11}+\left(1+v_y\right)\sigma_{12}+v_z\sigma_{13}\right]_x+\left[v_x\sigma_{12}+\left(1+v_y\right)\sigma_{22}+v_z\sigma_{23}\right]_y+ \\
+\left[v_x\sigma_{13}+\left(1+v_y\right)\sigma_{23}+v_z\sigma_{33}\right]_z=0, \\
\left[w_x\sigma_{11}+w_y\sigma_{12}+\left(1+w_z\right)\sigma_{13}\right]_x+\left[w_x\sigma_{12}+w_y\sigma_{22}+\left(1+w_z\right)\sigma_{23}\right]_y+ \\
+\left[w_x\sigma_{13}+w_y\sigma_{23}+\left(1+w_z\right)\sigma_{33}\right]_z=0
\end{gathered} \tag{3}$$

при відповідних крайових умовах.

Шукані функції розкладаються в ряди за степенями ε. Показано, що коефіцієнти в цих розвиненнях можуть бути підібрані таким чином, що основні функції в перших двох наближеннях знаходяться з рівнянь Лапласа

$$\begin{aligned}
&U^{1,j}_{\xi_1\xi_1}+U^{1,j}_{\eta_1\eta_1}+U^{1,j}_{\zeta_1\zeta_1}=0, \\
&V^{2,j}_{\xi_2\xi_2}+V^{2,j}_{\eta_2\eta_2}+V^{2,j}_{\zeta_2\zeta_2}=0, \\
&W^{3,j}_{\xi_3\xi_3}+W^{3,j}_{\eta_3\eta_3}+W^{3,j}_{\zeta_3\zeta_3}=0,
\end{aligned}$$

В більш високих наближеннях розв'язуються рівняння Пуассона, праві частини яких визначаються з попередніх наближень. Допоміжні функції знаходяться інтегруванням.

Доведено можливість постановки крайових задач для основних функцій.

Проведено аналіз співвідношень між деформаціями та переміщеннями ортотропного тіла в межах плоскої постановки задачі теорії пружності з урахуванням скінченних деформацій.

$$\begin{aligned}
e_{11}&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right], \\
e_{22}&=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right], \\
e_{12}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Показано, що після введення перетворень

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11

$$\begin{aligned} &\xi_i = \varphi_i \varepsilon^{\alpha i} x,\ \eta_{\,i} = \omega_{\,i} \varepsilon^{\beta i} y, \\ &u = \varepsilon^{\gamma_i} U^{(i)},\ v = \varepsilon^{\delta_i} V^{(i)},\ \left(i = 1, 2\right) \end{aligned} \tag{5}$$

може бути виділено два види деформованого стану з різними властивостями. Зв'язок між цими станами здійснюється через зсувну компоненту деформації, яка містить рівноцінні складові обох типів.

Виділяються два види напруженого стану, які відповідають вказаним типам деформованого, при чому дотичні напруження містять однакові складові обох типів.

Проведено асимптотичне інтегрування рівнянь рівноваги

$$\begin{aligned} &\left[\left(1 + \underline{u_x}\right)\sigma_{11} + \underline{u_y \sigma_{12}}\right]_x + \left[\left(1 + u_x\right)\sigma_{12} + u_y \sigma_{22}\right]_y = 0, \\ &\left[v_x \sigma_{11} + \left(1 + v_y\right)\sigma_{12}\right]_x + \left[\underline{v_x \sigma_{12}} + \left(1 + \underline{v_y}\right)\sigma_{22}\right]_y = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Розглядаючи рівняння без підкреслених членів та вважаючи величину $\dfrac{G}{E}$ (як і для лінійної постановки) за малий параметр, після застосування перетворень вдається розщепити напружено-деформований стан на дві складові з різними властивостями.

Функції $U^{(i)}$, $V^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ та коефіцієнти φ_1, ω_2, розшукуються у вигляді рядів за параметром ε $(\varphi_2 = \omega_1 = 1)$. Коефіцієнти $\varphi_{1j}, \omega_{2j}$ при однакових ступенях ε вдається підібрати таким чином, що основні функції $U^{1,j}$, $V^{1,j}$ у кожному наближенні розшукуються з рівнянь Лапласа. Допоміжні функції знаходяться через основні інтегруванням.

Якщо розглядаються повні рівняння (6), тоді, як і для тривимірної задачі, у нульовому та першому наближеннях основні функції розшукуються з рівнянь Лапласа, для більш високих наближень необхідно розв'язувати рівняння Пуассона, у правих частинах яких містяться відомі функції з попередніх наближень. Однак і в цьому випадку маємо безсумнівну перевагу, тому що є добре розроблені загальні методи розв'язування крайових задач для таких рівнянь.

Проведено аналіз граничних умов, показано можливість їх формулювання для основних функцій.

Розв'язано модельну задачу про дію нормального навантаження

$$\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}$$

на межу ($x = 0$) пружної ортотропної півплощини ($x \ge 0$, $|y| < \infty$) при відсутності дотичних напружень на межі. Одержані значення переміщень та напружень, наприклад для нормального напруження σ_1^* на лінії $y = 0$, маємо

$$\sigma_1^* = \frac{1}{1 + \varepsilon^{1/2} t_1} + C \frac{\varepsilon^{1/2} t_1}{\left(1 + \varepsilon^{1/2} t_1\right)^2} + \varepsilon \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^{1/2} t_1} - \frac{1}{1 + \varepsilon^{-1/2} t}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^{1/2} t_1} - \frac{1}{1 + \varepsilon^{-1/2} t_1}\right) + \ldots,$$

$$\sigma_1^* = -\sigma_{11} \pi\alpha / P_0, C = P_0 / 4\pi E_1 \alpha, t_1 = \frac{x}{\alpha}.$$

Доданок, який містить C характеризує внесок геометричної нелінійності.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11

На рис. 1 показане нормальне напруження при $y = 0$, якщо $\varepsilon = 0{,}1$ (суцільна лінія), $\varepsilon = 0{,}35$ (пунктирна лінія). Криві 1 відповідають лінійній постановці задач, криві 2 враховують кінцеві деформації.

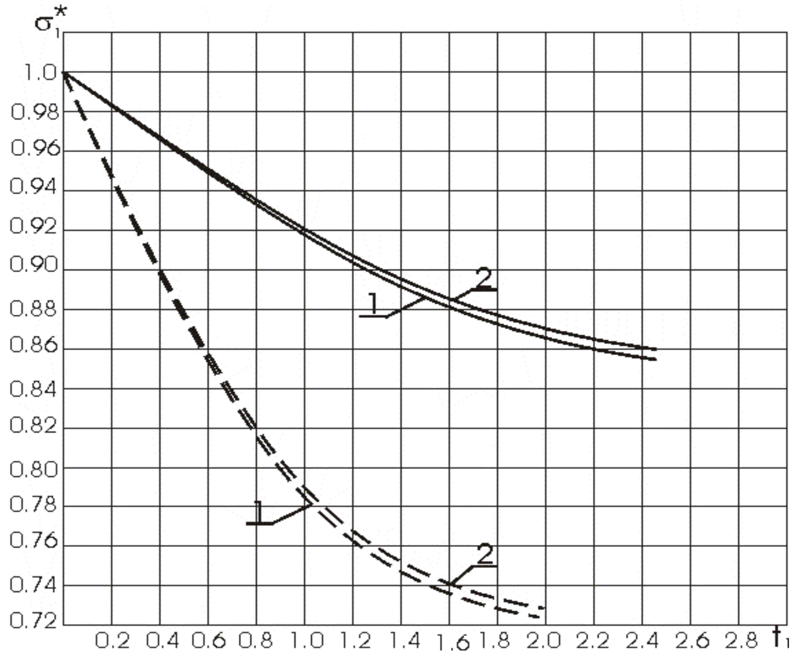

Рис.1. Зміна нормального напруження.

Розглянуто також геометрично нелінійні осесиметричні задачі. Як і в лінійному випадку задача розділяється на дві незалежні: задачу про деформацію, в якій відсутня компонента переміщення υ (але, звісно, існує нормальне напруження σ_{22}) та задачу кручення. Зупинимося на першій з них.

У випадку врахування геометричної нелінійності компоненти тензора деформації в циліндричній системі координат мають вигляд

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2,$$

$$e_{22} = \frac{u}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2,$$

$$e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2, \tag{7}$$

$$e_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r},$$

$$e_{12} = e_{23} = 0.$$

Вводяться перетворення координат та шуканих функцій

$$r_1 = r, \quad \varsigma_1 = \lambda_1 \varepsilon^{\gamma_1} z; \quad \mathrm{u} = \varepsilon^{\delta_1} U^{(1)}, \quad w = \varepsilon^{\mu_1} W^{(1)}, \tag{8}$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11

$$r_2 = r, \quad \varsigma_2 = \chi_2 \varepsilon^{\gamma_2} z; \quad \mathrm{u} = \varepsilon^{\delta_2} U^{(2)}, \quad w = \varepsilon^{\mu_2} W^{(2)}. \tag{9}$$

Для осесиметричної задачі також виділяють два типи деформованого стану. В стані першого типу переміщення $W^{(1)}$ значно перебільшує $U^{(1)}$. Основну роль відіграє деформація e_{33} і складова $e_{13}^{(1)}$, що може бути виражена через $W^{(1)}$, а в деформованому стані другого типу компонента переміщення $U^{(2)}$ перебільшує $W^{(2)}$ і відповідно головний внесок надають e_{22} та компонента $e_{13}^{(2)}$, що обчислюється через $U^{(2)}$. Як і в плоскому випадку, зв'язок між двома типами деформованого стану здійснюється через компоненту e_{13}, що містить складові обох типів $e_{13}^{(1)}$ і $e_{13}^{(2)}$.

Виходячи із співвідношень між напруженнями та деформаціями

$$\sigma_{11} = E_1 e_{11}, \qquad \sigma_{22} = E_2 e_{22}, \qquad \sigma_{33} = E_3 e_{33},$$
$$\sigma_{13} = G e_{13}, \qquad \sigma_{23} = \sigma_{12} = 0$$

отримують також два типи напруженого стану, що відповідають вказаним типам деформованого.

Інтегрування рівнянь рівноваги з урахуванням запропонованих перетворень і розвинень функцій та коефіцієнтів у ряди зводиться до розв'язання рівнянь відносно основних функцій.

Наприклад, в нульовому наближенні основна функція для напружено-деформованого стану першого типу визначається з рівняння

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial W^{(1)}}{\partial r_1} + \chi_1^2 \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \varsigma_1^2} = 0, \tag{10}$$

а основна функція для другого типу з наступного рівняння:

$$\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \chi_2^2 \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \varsigma_2^2} - \frac{U^{(2)}}{r^2} = 0. \tag{11}$$

З рівнянь (10), (11) видно, що як і в лінійній постановці, для визначення основних функцій треба розв'язувати крайову задачу для знаходження однієї функції (при сформульованих крайових умовах). Допоміжні функції знаходяться через основні інтегрування.

Висновки

Метод збурення, запропонований для розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, має теоретичне і практичне значення, є універсальним і може бути застосований для аналізу різноманітних задач математичної фізики. Він дозволяє звести розв'язання складних задач геометрично нелінійної теорії пружності (в плоскій та просторовій постановках) до послідовного інтегрування крайових задач теорії потенціалу.

Потрібно вказати, що розроблений підхід може бути застосований до розв'язання задач, в яких залишкові деформації відіграють значну роль (згин тонких пластин та оболонок). В розглянутій модельній задачі вдалось відокремити внесок геометричної нелінійності, але вказаний вище клас задач продемонструє ефективність методу більш наочно.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11

Список використаної літератури

1. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 302 с.
2. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов: монография. Киев: Вища школа, 1991. 131 с.
3. Кагадий Т.С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов: монография. Дніпропетровск: РИК НГА України, 1998. 260 с.
4. Калоеров С. А., Самодуров А. А. Задача электровязкоупругости для многосвязных пластинок. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2014. Т. 57. № 3. С. 62–77.
5. Кагадій Т.С., Шпорта А.Г., Білова О.В., Щербина І.В. Напружено-деформований стан шаруватої основи з підкріплюючим елементом. *Прикладні питання математичного моделювання.* 2020. Т.3. № 2.1. С. 107–116.

References

1. Aleksandrov, V.M., & Chebakov, M.I. (2004). Analiticheskie metody v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti. Moskva: FIZMATLIT.
2. Manevych, & L.I., Pavlenko, A.V. (1991). Asimptoticheskiy metod v mikromehanike kompozitsionnyih materialov. Kyiv: Vyscha shkola
3. Kagadiy, T.S. (1998). Metod vozmuscheniy v mehanike uprugih (vyazkouprugih) anizotropnyih i kompozitsionnyih materialov. Dnipropetrovsk: RYK NGA Ukrainy.
4. Kaloerov, S. A., & Samodurov, A. A. (2014). Zadacha elektrovyazkouprugosti dlya mnogosvyaznyih plastinok. *Matematichni metodi ta fIziko-mehanichni polya.* **57**, 3, 62–77.
5. Kahadii, T.S., Shporta, A.G., Bilova, O.V., & Shcherbyna, I.V. (2020). Napruzheno-deformovanyi stan sharuvatoi osnovy z pidkripliuiuchym elementom. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuvannia*. **3**, 2.1, 107–116.

Кагадій Тетяна Станіславівна, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри віщої математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: tkagadiy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6116-4971.

Білова Оксана Вікторівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри віщої математики Українського державного університету науки і технологій (Національної металургійної академії України). E-mail: okbelova00@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6258-6164.

Щербина Ірина Володимирівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри віщої математики та фізики Дніпровського державного аграрно-економічного університету. E-mail: sherbinaiv@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3968-4326.

Шпорта Анна Григорівна, асистент кафедри вищої математики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка». E-mail: , ORCID: 0000-0002-1260-7358.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.11