УДК 519.85

В.М. КОМЯК
Національний університет цивільного захисту України
К.Т. КЯЗІМОВ
Академія Міністерства по Надзвичайним ситуаціям Азербайджану

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ГРУП ЛЮДЕЙ ПРИ ЕВАКУАЦІЇ З БУДІВЕЛЬ

Задачі розкрою та упакування (C&PProblems) активно досліджуються науковою спільнотою протягом останніх років. Такий інтерес пояснюється як великою їх складністю з теоретичної точки зору, так і широким спектром їх застосування при розв'язанні актуальних практичних задач, наприклад, в інформатиці, логістиці, моделюванні виробничих процесів, забезпеченні безпечної життєдіяльності населення та ін.

Одним із найважливіших питань в забезпеченні безпечної життєдіяльності населення є своєчасна евакуація людей, що опинилися в небезпечній для життя ситуації. Для проведення оперативно-тактичних дій по евакуації і порятунку людей з будівель створюються пожежно-рятувальні підрозділи, які, як правило, формуються згідно типу надзвичайної ситуації, яка виникає в будівлі, тобто згідно їх професійної спрямованості. На допомогу пожежно-рятувальним підрозділам в даний час приходять програмні комплекси по керованій евакуації з будівель, головним компонентом яких є програми моделювання руху людського потоку, які в кожний фіксований момент часу являють конфігурацію розміщення людей.

На практиці часто виникає задача моделювання руху людей групами, прикладами яких можуть слугувати члени сім'ї або рятувальники одного підрозділу, які рухаються з вантажем. Тому актуальною задачею є моделювання руху груп людей з урахуванням максимально-допустимих відстаней між членами груп, і типи, які евакуюються з вантажем.

У роботі запропонована модель тіла людини з вантажем, яка представляє собою двокомпонентний складний об'єкт, як об'єднання еліпса та прямокутника, між компонентами якого задані максимально-допустимі відстані. Врахування максимально-допустимих відстаней між об'єктами дозволяє об'єднувати їх в підгрупи, а задані максимальні відстані між підгрупами дозволяють об'єднувати їх в групи. Формалізовані перелічені обмеження на взаємодію об'єктів, побудована математична модель актуальної задачі моделювання руху людей з розбиттям їх на групи. Для аналітичного опису умов неперетинання об'єктів модифіковано квазі-phi-функції складених об'єктів, які є основою алгоритмів моделювання індивідуально-поточного руху людей.

***Ключові слова**: моделювання руху, потік людей, модель горизонтальної проекції тіла людини, квазі-phi-функція, составні об'єкти.*

В.М. КОМЯК
Национальный университет гражданской защиты Украины
К.Т. КЯЗИМОВ
Академия Министерства по Чрезвычайным ситуациям Азербайджана

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУПП ЛЮДЕЙ ПРИ ЭВАКУАЦИИ ИЗ ЗДАНИЙ

Задачи раскроя и упаковки (C & P Problems) активно исследуются научным сообществом на протяжении последних лет. Такой интерес объясняется как большой их сложностью с теоретической точки зрения, так и широким спектром их применения при решении актуальных практических задач, например, в информатике, логистике, моделировании производственных процессов, обеспечении безопасной жизнедеятельности населения и др.

Одним из важнейших вопросов в обеспечении безопасной жизнедеятельности населения является своевременная эвакуация людей, которые оказались в опасной для жизни ситуации. Для проведения оперативно-тактических действий по эвакуации и спасению людей из зданий создаются пожарно-спасательные подразделения, которые, как правило, формируются по типу чрезвычайных ситуаций, которая возникает в здании, то есть согласно их профессиональной направленности. На помощь пожарно-спасательным подразделениям в настоящее время приходят программные комплексы

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

по управляемой эвакуации из зданий, главным компонентом которых являются программы моделирования движения людского потока, которые в каждый фиксированный момент времени представляют конфигурацию размещения людей.

На практике часто возникает задача моделирования движения людей группами, примерами которых могут служить члены семьи или спасатели одного подразделения, которые перемещаются с грузом. Поэтому актуальной задачей является моделирование движения групп людей с учетом максимально допустимых расстояний между членами групп и теми, которые эвакуируются с грузом.

В работе предложена модель тела человека с грузом, которая представляет собой двухкомпонентный сложный объект в виде объединения эллипса и прямоугольника, между компонентами которого заданы максимально допустимые расстояния. Учет максимально допустимых расстояний между объектами позволяет объединять их в подгруппы, а заданные максимальные расстояния между подгруппами позволяют объединять их в группы. Формализованы перечисленные ограничения на взаимодействие объектов, построена математическая модель актуальной задачи моделирования движения людей с разбивкой их на группы. Для аналитического описания условий непересечения объектов модифицированы квази-phi-функции составных объектов, которые являются основой алгоритмов моделирования индивидуально-поточного движения людей.

Ключевые слова: моделирование, движение, поток людей, модель горизонтальной проекции тела человек, квази-phi-функция, составные объекты.

V.M. KOMYAK

National University of Civil Protection of Ukraine

KT KYAZIMOV

Academy of the Ministry of Emergency Situations of Azerbaijan

MATHEMATICAL MODELING OF THE MOTION OF GROUPS OF PEOPLE DURING EVACUATION FROM BUILDINGS

The problems of cutting and packing (C & P Problems) have been actively studied by the scientific community over the past years. This interest is explained both by their great complexity from a theoretical point of view, and by a wide range of their application in solving urgent practical problems, for example, in informatics, logistics, modeling of production processes, ensuring the safe life of the population, etc.

One of the most important issues in ensuring the safe life of the population is the timely evacuation of people who find themselves in a life-threatening situation. To carry out operational and tactical actions to evacuate and rescue people from buildings, fire and rescue units are created, which, as a rule, are formed according to the type of emergency that has arisen in the building, that is, according to their professional orientation. At present, fire and rescue units are being helped by software systems for controlled evacuation from buildings, the main component of which are programs for simulating the movement of the human flow, which at each fixed moment of time represents the configuration of the placement of people.

In practice, the problem often arises of modeling the movement of people in groups, examples of which are family members or rescuers of one unit who move with a load. Therefore, an urgent task is to model the movement of groups of people, taking into account the maximum permissible distances between members of groups and who are evacuated with a load.

The paper proposes a model of a human body with a load, which is a two-component complex object in the form of a union of an ellipse and a rectangle, between which the maximum allowable distances are set. Taking into account the maximum allowable distances between objects allows you to combine them into subgroups, and the specified maximum distances between subgroups allows you to combine them into groups. The listed restrictions on the interaction of objects are formalized, a mathematical model of the actual problem of modeling the movement of people with their division into groups is built. For the analytical description of the conditions of non-intersection of objects, the apparatus of quasi-phi-functions of composite objects is modified, which are the basis of algorithms for modelingindividual flow movementof people.

Keywords: simulation, movement, flow of people, human body plano model, quasi-phi-function, composite objects.

Постановка проблеми

Задачі розкрою та упакування (C&PProblems) активно досліджуються науковою спільнотою протягом останніх років. Такий інтерес пояснюється як великою їх

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

складністю з теоретичної точки зору, так і широким спектром їх застосування при розв'язанні актуальних практичних задач, наприклад, в інформатиці, логістиці, моделюванні виробничих процесів, забезпеченні безпечної життєдіяльності населення та ін. Кількість надзвичайних ситуацій (НС), яка, за статистикою, збільшується, призводить до великої кількості як матеріальних збитків, так і до людських жертв. Евакуація – часто єдиний спосіб порятунку людини, що опинилася в небезпечній для життя ситуації. Для проведення оперативно-тактичних дій по евакуації і порятунку людей з будівель створюються пожежно-рятувальні підрозділи, які, як правило, формуються згідно типу НС, яка виникає в будівлі, тобто згідно їх професійної спрямованості. На допомогу пожежно-рятувальним підрозділам в даний час приходять програмні комплекси по керованій евакуації з будівель, головним компонентом яких є програми моделювання людського потоку, які адекватно відображають реальні процеси його руху. На практиці часто виникає задача моделювання руху людей групами, прикладами яких можуть слугувати члени сім'ї або рятувальники одного підрозділу, які рухаються з вантажем. Тому невирішеною частиною проблеми є актуальна задача моделювання руху груп людей з урахуванням максимально-допустимих відстаней між членами груп, і тими, які евакуюються з вантажем.

Аналіз останніх досягнень та публікацій

Задача моделювання руху людей в кожний дискретний момент часу являє собою конфігурацію розміщення об'єктів [1]. Ці задачі можна охарактеризувати множиною обмежень розміщення та додатковими обмеженнями, серед яких можна визначити орієнтацію об'єктів, обмеження маневреності та комфортності руху тощо.

Як відомо, задачі розкрою та упакування, в тому числі оптимізаційні задачі моделювання руху людей є NP-складними. Тому в переважній більшості досліджень, присвячених цим задачам, використовуються евристичні та статистичні методи, які дозволяють отримати наближені розв'язки [2]. На сьогодні відсутні моделі індивідуально-поточного руху людей, що адекватні реальному потоку [3]. Інтерес до моделі мотивується також, як необхідністю уваги до руху гетерогенних груп людей в потоці, так і неможливістю на теперішній час побудови адекватних математичних моделей на базі аналітичного опису умов неперетинання між людьми або їх групами.

У розглянутій в даній статті прикладній проблемі об'єктом розміщення (переміщення) є людина. У роботах [2, 4] показано, що при вільній категорії руху найбільш адекватною моделлю проекції людського тіла на горизонтальну площину є еліпс. У статті [5] наводиться досить повний огляд зарубіжної літератури, присвячений задачам розміщення еліпсів. Задача оптимального розміщення еліпсів, що допускають неперервні обертання, розглянута в [6, 7]. Для аналітичного опису основних обмежень розміщення використовуються псевдонормалізовані квазі-phi-функції [8, 9]. У роботі [4] пропонується аналітичний опис відносин між еліпсами (неперетинання і розташування на мінімально допустимій відстані) з використанням запропонованої в цій роботі квазі-phi-функції. Для моделювання руху груп людей необхідно враховувати ще максимальнодопустимі відстані між членами кожної з груп. Основи для аналітичного опису умов неперетинання об'єктів з урахуванням максимально-допустимих відстаней закладені в теорії геометричного проектування [10].

При моделюванні руху гетерогенних потоків людей, які евакуюються з вантажем, їх горизонтальна проекція ("просторова" форма) має більш складну форму, ніж еліпс. Тому для розв'язання задач моделювання руху груп людей з вантажем (їх розміщення в кожний дискретний момент часу) необхідна побудова моделей та методів моделювання гетерогенних потоків на базі математичного апарату опису умов

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

неперетинання об'єктів довільної просторової форми з урахуванням максимально-допустимих відстаней між членами груп.

У роботі модифіковано квазі-phi-функції та отримано аналітичний опис умов неперетинання для складних об'єктів (що є об'єднанням еліпсів та прямокутників) з урахуванням максимально-допустимих відстаней між ними. Застосування математичного апарату квазі-phi-функцій дозволило формалізувати взаємодію об'єктів (торкання, неперетинання, перетинання) для більш широкого класу просторових форм, що дало можливість побудувати математичну модель моделювання руху людей, що рухаються групами з вантажем.

Мета дослідження

Метою роботи є розробка математичної моделі моделювання груп людей з вантажем. Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– побудувати адекватну для задач евакуації математичну модель тіла людини з вантажем, отримати аналітичні вирази умов їх неперетинання з урахуванням максимально-допустимих відстаней між ними;

– побудувати математичну модель переміщення людей з вантажем (об'єктів складної просторової форми) згідно заданим обмеженням на ділянці горизонтального шляху.

Викладення основного матеріалу дослідження

4. Постановка задачі і її розв'язування.

4. 1. Побудова адекватної для задач евакуації математичної моделі тіла людини з вантажем (рятувальника з людиною), аналітичні вирази умов їх неперетинання.

Математичний апарат взаємодії геометричних об'єктів є основою методів моделювання розміщення за заданими обмеженнями, моделювання руху потоку людей.

У зв'язку з вищесказаним, виникає необхідність в побудові квазі-phi-функцій для більш широкого класа об'єктів, зокрема:

– прямокутників;

– прямокутника та еліпса;

– об'єкта, складеного із еліпса та прямокутника, з прямокутником;

– об'єкта, складеного із еліпса та прямокутника, з еліпсом.

Представимо проекцію тіла людини в задачі моделювання руху людини у вигляді об'єкта S_i. Кожному об'єкту S_i зіставлені параметри розміщення $u_i = (v_i, \theta_i)$, де – $v_i = (x_i, y_i)$ - вектор трансляції об'єкта S_i відносно нерухомої системи координат, а θ_i - кут його повороту. Позначимо через $S_i(u_i)$ об'єкт $S_i = S_i(0)$, який повернений на кут θ_i і трансльований на вектор v_i. При цьому довільна точка $p = p(0)$ об'єкта відображається в точку $p(v) = v + M(\theta_i)p^T(0)$, де $M(\theta_i)$ – матриця оператора повороту простору на кут θ_i.

Розглянемо наступні відношення між об'єктами $S_i(u_i)$ та $S_j(u_j)$:

– перетинання: $\operatorname{int} S_i(u_i) \bigcap \operatorname{int} S_j(u_j) \neq \varnothing$,

– торкання: $\operatorname{int} S_i(u_i) \bigcap \operatorname{int} S_j(u_j) = \varnothing$ та $frS_i(u_i) \bigcap frS_j(u_j) \neq \varnothing$,

– неперетинання $S_i(u_i) \bigcap S_j(u_j) = \varnothing$,

де $\operatorname{int}(\bullet)$ - топологічна внутрішність, $fr(\bullet)$ - границя множини $(\bullet)$.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

Умови неперетинання двох об'єктів $S_i(u_i)$ та $S_j(u_j)$, де у якості цих об'єктів будемо розглядати перелічені вище класи об'єктів, побудуємо, використовуючи поняття їх квазі-phi-функції [11].

Визначення1. Квазі-phi-функцією $\Phi'^{S_iS_j}(u_i,u_j,u')$ для об'єктів $S_i(u_i)$ та $S_j(u_j)$ називається всюди визначена неперервна по усім змінним функція, для якої функція $\max\limits_{u'\in U\subset R^m} \Phi'^{S_iS_j}(u_i,u_j,u')$ є phi-функцією об'єктів $S_i(u_i)$ та $S_j(u_j)$ [11]. Тут u' - вектор допоміжних змінних, які належать деякій підмножині U простору R^m [11].

Важлива характеристика квазі-phi-функції: якщо для деякого u' виконується $\Phi'^{S_iS_j}(u_i,u_j,u')\ge 0$, то $\operatorname{int} S_i(u_i)\bigcap \operatorname{int} S_j(u_j)=\varnothing$ [11].

Квазі-phi-фуннція для двох прямокутників.

Нехай $T_i(u_i)$ та $T_j(u_j)$ – два прямокутники, які задані вершинами $p_{ij}^i(ij=1,2,3,4)$ та $p_{ij}^j(i=1,2,3,4)$ відповідно з параметрами розміщення $u_i(x_i,y_i,\theta_i)$, $u_j(x_j,y_j,\theta_j)$. Нехай $P(u')=\{(x,y):\ f(x',y')=\cos\phi' x+\sin\phi' y+\gamma'\ge 0$ – півплощина.

Нехай $\Phi^{T_iP}(u_i,u')=\min\limits_{ij=1,2,3,4} f(p_{ij}^{i(')})$ – нормалізована phi-функція для об'єктів $T_i(u_i)$ та P, а $\Phi^{T_jP^*}(u_2,u')=\min\limits_{ij=1,2,3,4}(-f(p_{ij}^{j(')}))$ – нормалізована phi-функція для об'єктів $T_j(u_j)$ та $P^*(u')=R^2\setminus P(u')$, тоді функція

$$\Phi'^{T_iT_j}(u_i,u_j,u')=\min\{\Phi^{T_iP}(u_i,u'),\Phi^{T_jP^*}(u_j,u')\} \tag{1}$$

є квазі-phi-функцією для прямокутників $T_j(u_j)$ та $T_j(u_j)$ [12], $u'=(\phi',\gamma')$.

Квазі-phi-фуннція для двох еліпсів.

Нехай $E_i(u_i)$ та $E_j(u_j)$ – еліпси з піввісями a_i,b_i та a_j,b_j відповідно. Позначимо через $E_i(u_i)$ об'єкт $E_i=E_i(0)$, який повернений на кут θ_i і трансльований на вектор v_i. При цьому довільна точка $p=p(0)$ об'єкта відображається в точку $p(v)=v+M(j)p^T(0)$, де $M(j)$ – матриця оператора повороту простору на кут θ_i. Параметр t_i визначає точку $v_i=(x_i,y_i)=(\lambda a_i\cos t_i+\lambda b_i\sin t_i)$ на границі $E_i, 0\le t_i\le 2\pi, i=1,2.$

Приймемо $u'=(\phi',\gamma',t_1,t_2)$, тоді квазі-phi-функцією для еліпсів $E_i(u_i)$ та $E_j(u_j)$ буде мати вигляд:

$$\Phi'^{E_iE_j}(u_i,u_j,u')=\min\{\Phi'^{E_iP}(u_i,u_1'),\Phi'^{E_jP^*}(u_j,u_2')\}, \tag{2}$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

де $\Phi'^{E_iP}(u_i,u'_1)$ є ***нормалізованою*** квазі-phi-функцією для еліпса $E_i(u_i)$ та півплощини P [12], $u'_1=(t_1,\phi',\gamma')$, $u'_2=(t_2,\phi',\gamma')$.

Квазі-phi-функція для еліпса та прямокутника.

Нехай $E_i(u_i)$ - еліпс з піввісями a_i та b_i, $T_j(u_j)$ – прямокутник, який задано вершинами $p_{ij}^j(ij=1,2,3,4)$ відповідно з параметрами розміщення u_i,u_j. Згідно (1) та (2) квазі-phi-функція для еліпса $E_i(u_i)$ та прямокутника $T_j(u_j)$ буде мати вигляд:

$$\Phi'^{E_iT_j}(u_i,u_j,u')=\min\{\Phi'^{E_iP}(u_i,u'_1),\Phi'^{T_jP^*}(u_j,u'_2)\},\tag{3}$$

де $u'_1=(t_1,\phi',\gamma')$, $u'_2=(\phi',\gamma')$.

Квазі-phi-фуннція для складених об'єктів.

Нехай $P(u_{ij})=\{(x,y):\ \mu_{ij}(x,y)=\cos\phi_{ij}x+\sin\phi_{ij}y+\gamma_{ij}\ge 0\}$ – напівплощина зі змінними параметрами розміщення (ϕ_{ij},γ_{ij}). Як відомо [13], для двох складених об'єктів $H_i(u_i)=\bigcup_{r=1}^{n_i}H_r(u_i)$ і $H_j(u_j)=\bigcup_{m=1}^{n_j}H_m(u_j)$ квазі-phi-функція $\Phi'^{H_iH_j}(u_i,u_j,u'_{ij})$ може бути виписана в вигляді

$$\Phi'^{H_iH_j}(u_i,u_j,\phi_{ij},\gamma_{ij})=\min\{\Phi^{H_iP_{ij}}(u_i,\phi_{ij},\gamma_{ij}),\Phi^{H_jP^*_{ij}}(u_j,\phi_{ij},\gamma_{ij})\},\tag{4}$$

де $\Phi^{H_iP_{ij}}(u_i,\phi_{ij},\gamma_{ij})$ – phi-функція для $H_i(u_i)=\bigcup_{r=1}^{n_i}H_r(u_i)$ і напівплощини $P(u_{ij})$, $\Phi^{H_jP^*_{ij}}(u_j,\phi_{ij},\gamma_{ij})$ – phi-функція *для* $H_j(u_j)=\bigcup_{m=1}^{n_j}H_m(u_j)$ і напівплощини $P^*(u_{ij})$, $u'_{ij}=(\phi_{ij},\gamma_{ij})$ – вектор допоміжних змінних.

Слід відмітити, що квазі-phi-функція $\Phi'^{H_iH_j}(u_i,u_j,\phi_{ij},\gamma_{ij})-0{,}5\rho_{ij}$ є псевдонормалізованою квазі-phi-функцією для $H_i(u_i)=\bigcup_{r=1}^{n_i}H_r(u_i)$ і $H_j(u_j)=\bigcup_{m=1}^{n_j}H_m(u_j)$. Це означає, що якщо $\rho_{ij}>0$ і є відстанню між $H_i(u_i)$ і $H_j(u_j)$ та визначається, як мінімальна евклідова відстань, тоді нерівність $\Phi'^{H_iH_j}_{+}(u_i,u_j,\phi_{ij},\gamma_{ij})=\Phi'^{H_iH_j}(u_i,u_j,\phi_{ij},\gamma_{ij})-0{,}5\rho_{ij}\ge 0$ означає, що $dist(H_i(u_i),H_j(u_j))\le\rho_{ij}$.

Таким чином, розширення просторих форм об'єктів в аналітичному описі умов взаємодії об'єктів дозволяє розширити коло практичних задач, що розв'язується. Зокрема, при моделюванні руху людей з'явилася можливість моделювати переміщення людини (еліпса) з вантажем (прямокутником), людини з допоміжними засобами переміщення тощо.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

4. 2. Математична модель переміщення людей з вантажем (об'єктів складної просторової форми) згідно заданим обмеженням на ділянці горизонтального шляху.

Нехай в області евакуації Ω_m на *k*-ій ітерації знаходиться N_k людей з параметрами розміщення $u_i = (x_i, y_i, \theta_i)$, $i = 1, 2, ..., N_k$, де (x_i, y_i) – координати розміщення початку локальної системи координат (поточної точки), а θ_i – кут повороту *i*-го складного об'єкта H_i, який є моделлю *i*-ої людини. У якості такої моделі розглядається або еліпс, або еліпс з прямокутником. Для кожної поточної точки з координатами $g_i(x_i, y_i)$ визначається вектор швидкості $\vec{v}_i(x_i, y_i)$. Розглянемо також випадок, коли в моделі враховується маневреність кожної людини, тобто можливість відхилятися від основного напрямку руху. Таким чином, об'єкту H_i приписані характеристики швидкості $\left|\vec{v}_i\right|$ (в метрах в секунду) і маневреності $m_i, |m_i| < 1$ (в метрах). При моделюванні індивідуально-потокового руху розглядається переміщення двох основних видів об'єктів: підгруп людей $S_g, g = 1, 2, ..., n_S$ (прикладом підгрупи може служити сім'я або працівники одного підрозділу); груп $G_l, l = 1, 2, ..., n_G$, що складаються з підгруп (наприклад, кілька знайомих сімейних пар або декілька підрозділів рятівників). Нехай задана максимальна відстань, на яку можуть віддалятися члени підгруп один від одного та підгрупи одна від одної.

Нехай кількість людей в g-тій підгрупі S_g складає n_g (можливий випадок, коли $n_g = 1$), позначимо $\sum_{g=1}^{n_S} n_g = N_S$, максимальна відстань між людьми *g*-тої підгрупи складає ρ_g. Кожна підгрупа утворює складений об'єкт $S_g = \bigcup_{r=1}^{n_g} H_r$, умови неперетинання між об'єктами цієї підгрупи можна записати за допомогою нормалізованих квазі-phi- функцій:

$$\Phi'^{H_i H_j}_{+}(u_i u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) = \Phi'^{H_i H_j}(u_i u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) - 0{,}5\rho_g \geq 0,$$

$$i > j, (i, j) \in \Sigma_g \times \Sigma_g,\ g \in I_{n_S}. \tag{5}$$

Розглянемо групи $G_l, l = 1, 2, ..., n_G$. Нехай кількість підгруп в G_l групі складає n_l (можливо випадок $n_l = 1$). Позначимо через $\sum_{l=1}^{n_G} n_l = n_S$ кількість підгруп, N_G - загальну кількість людей в n_G групах, а максимальну відстань між підгрупами позначимо через ρ_l. Кожна група – складений об'єкт $G_l = \bigcup_{g=1}^{n_l} S_g = \bigcup_{g=1}^{n_l} (\bigcup_{i=1}^{n_g} H_i)$, умову неперетинання між об'єктами (підгрупами) з дотриманням максимально допустимих відстаней можна записати за допомогою нормалізованих квазі-phi-функцій:

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

$$\Phi_{+}'^{S_g S_q}(u_g, u_q, \phi_{gq}, \gamma_{gq}) = \Phi'^{S_g S_q}(u_g, u_q, \phi_{gq}, \gamma_{gq}) - 0{,}5\rho_l \geq 0,$$
$$g > q \in I_{n_S}, \ u_g = (u_1, ..., u_i, ..., u_{n_g}), \ u_q = (u_1, ..., u_j, ..., u_{n_q}). \qquad (6)$$

Підгрупи S_g, $g > q \in I_{n_S}$ (об'єкти $H_i, i = 1,2,..., N_k$) повинні належати області Ω_m, тобто повинні виконуватись умови

$$\Phi^{S_g \Omega_m^*}(u_i) \geq 0_i, \ g > q \in I_{n_S}, \ \Omega_m^* = R^2 \setminus \Omega_m. \qquad (7)$$

Ступінь зв'язності людей в підгрупах і підгруп між собою визначається попарно заданими коефіцієнтами. При цьому рівність відповідного коефіцієнта 1 означає практично нерозривний зв'язок (наприклад, мати і дитина), рівність 0 означає відсутність зв'язку.

Тоді математична модель підзадачі на *k*-ій ітерації може бути сформульована у вигляді пошуку максимуму сукупного переміщення людей, які знаходяться в області евакуації [4], для яких зберігаються максимально-допустимі відстані між ними та підгрупами людей, технологічні обмеження маневреності руху, тобто:

$$F(u^*) = \max_{u \in W_k \subset R^n} F(u), \qquad (8)$$

$$W_k = \{u \in R^n : \gamma_{ij} \geq 0; \gamma_{gq} \geq 0; \gamma_i \geq 0; T_i \geq 0; \ i > j, (i,j) \in \textstyle\sum_g \times \sum_g, g > q \in I_{n_S};\}, \qquad (9)$$

де

$$u = (\Delta t_1, z_1, x_1, y_1, \theta_1, \quad , \Delta t_i, z_i, x_i, y_i, \theta_i, ..., \Delta t_{N_k}, z_{N_k}, x_{N_k}, y_{N_k}, \theta_{N_k}, \phi_{12}, \gamma_{12}, ...,$$
$$\phi_{(N_k-1)N_k}, \gamma_{(N_k-1)N_k}), \ I_{n_S} \subset I_{N_k},$$
$$n = 5N_k + (N_k - 1)N_k, \ F(u) = \Delta t \sum_{i=1}^{N_k} \Delta t_i \left| \vec{v}_i \right|,$$

$\gamma_{ij} \geq 0$ – умови неперетинання об'єктів в підгрупах:

$$B_i B_j \Phi_{+}'^{H_i H_j}(u_i, u_j, \phi_{ij}, \gamma_{ij}) \geq 0, \ i > j, (i,j) \in \textstyle\sum_g \times \sum_g, \ g \in I_{n_S},$$

$\gamma_{gq} \geq 0$ – умови неперетинання підгруп:

$$B_g B_q \Phi_{+}'^{S_g S_q}(u_g, u_q, \phi_{gq}, \gamma_{gq}) \geq 0, \quad g > q \in I_{n_S},$$

$T_i \geq 0$ – технологічні обмеження:

$$\begin{cases} 0 \leq \Delta t_i \leq 1, \\ -m_i \leq z_i \leq m_i, i \in I_{N_k}, \end{cases}$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

$\Omega_m^* = R^2 \setminus \Omega_m$, $B_i' \in \{0,1\}$, Δt_i– відносний крок в часі руху *i*-ої людиниу на *k*-тій ітерації, коефіцієнт $B_i' = 1$, якщо об'єкт H_i належить області Ω_m, $B_i = 1$, $B_j = 1$, $i > j, (i,j) \in \sum_g \times \sum_g$, $g \in I_{n_S}$, ($B_g = 1$, $B_q = 1, g > q \in I_{n_S}$), якщо відповідні об'єкти належать підгрупам (групам) . Коефіцієнти дорівнюють нулю в протилежному випаду.

Задача умовної оптимізації (8)–(9) є *NP*-складною задачею нелінійного програмування. Область допустимих розв'язків W_k має складну структуру: це, взагалі кажучи, незв'язна множина, кожна компонента зв'язності якої є багатозв'язною.

Висновки

У роботі отримані аналітичні вирази умов неперетинання складених об'єктів з урахуванням максимально-допустимих відстаней між ними, що є основою для побудови математичної моделі моделювання руху людей з вантажем.

Побудована математична модель переміщення груп людей з вантажем згідно заданим обмеженням: неперетинання людей та їх розміщення в зоні евакуації, умовам маневреності руху. Властивості моделі є основою для побудови методів, алгоритмів та програм моделювання руху груп людей на горизонтальному шляху за переліченими обмеженнями.

Список використаної літератури

1. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. V. 54, No 5. P. 716–726.
2. Холщевников В.В., Самошин Д.А. Эвакуация и поведение людей на пожарах. М.: Академия ГПС МЧС России, 2009. 210с.
3. Холщевников В.В. Сопоставление различных моделей движения людских потоков и результатов программно-вычислительных комплексов. *Пожаровзрыво-безопасность*. 2015. Т. 24, №5. С. 68–74.
4. Komyak Va., Komyak Vl., Danilin A.A. Study of ellipse packing in the high-dimensionality problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. V. 1/4 (85). P. 17–23.
5. Kallrath J., Rebennack S. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles. *Journal of Global Optimization*. 2013. V.59 (2–3). P. 405–437. Doi: 10.1007 / s10898-013-0125-3.
6. Pankratov A.V., Romanova T.E., Subota I.A. Optimal packing of ellipses with allowance for allowable distances. *Journal of calculus mathematics*. 2014. V.1. P. 27–42.
7. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2016, № 65. C. 283-307. Doi: 10.1007/s10898-015-0331-2.
8. Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. *Springer Optimization and Its Applications*. 2015. V. 105. P. 265–293.
9. Pankratov A. V., Romanova T. E., Chugay A. M. Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. *Проблемы машиностроения*. Харків, 2015. Т. 18, № 2. С. 55–65.
10. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М. и др. Элементы теории геометрического проектирования / Под ред. В.Л. Рвачева. К.: Наук. думка, 1995. 241с.
11. Панкратов А.В. Информационная система решения оптимизационной задачи размещения произвольных неориентированных *2D* объектов. *Системи обробки інформації*. Харків: ХУПС, 2013. Т. 1(108). С.82–86.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13

12. Гиль Н.И., Суббота И.А. Квази-phi-функция для сегментов эллипсов. *Системи обробки інформації*. 2014, Т. 8 (124). С. 79–82.
13. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Чернов Н.И., Панкратов А.В. Полный класс Ф-функций для базовых объектов. *Доповіді НАН України*. 2010. № 12. С. 25–30.

References

1. Stoyan, Y.G. & Yakovlev, S.V. (2018). Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. **54**, 5, 716–726.
2. Holschevnikov, V.V. & Samoshin, D.A. (2009). Evakuatsiya i povedenie lyudey na pozharah. M.: Akademiya GPS MChS Rossii.
3. Holschevnikov, V.V. (2015). Sopostavlenie razlichnyih modeley dvizheniya lyudskih potokov i rezultatov programmno-vyichislitelnyih kompleksov. *Pozharovzryivo-bezopasnost*. **24**, 5, 68–74.
4. Komyak, Va., Komyak, Vl. & Danilin, A.A. (2017). Study of ellipse packing in the high-dimensionality problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. **1 / 4**, (85), 17–23.
5. Kallrath, J. & Rebennack, S. (2013). Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles. *Journal of Global Optimization*. **59** (2–3), 405–437. Doi: 10.1007 / s10898-013-0125-3.
6. Pankratov, A.V., Romanova, T.E. & Subota, I.A. (2014). Optimal packing of ellipses with allowance for allowable distances. *Journal of calculus mathematics*. **1**, 27–42.
7. Stoyan, Yu., Pankratov, A. & Romanova, T. (2016). Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. **65**, 283-307. Doi: 10.1007/s10898-015-0331
8. Stoyan, Y., Romanova, T., Pankratov, A. & Chugay, A. (2015). Optimized object packings using quasi-phi-functions. *Springer Optimization and Its Applications*. **105**, 265–293.
9. Pankratov, A. V., Romanova, T. E. & Chugay, A. M. (2015). Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. *Problemyi mashinostroeniya*. **18**, 2, 55–65.
10. Yakovlev, S.V., Gil, N.I., Komyak, V.M. & dr. (1995). Elementyi teorii geometricheskogo proektirovaniya / Pod red. V.L. Rvacheva. K.: Nauk. dumka.
11. Pankratov, A.V. (2013). Informatsionnaya sistema resheniya optimizatsionnoy zadachi razmescheniya proizvolnyih neorientirovannyih 2D ob'ektov. *Systemy obrobky informatsii.* **1** (108), 82–86.
12. Gil, N.I. & Subbota, I.A. (2014). Kvazi-phi-funktsiya dlya segmentov ellipsov. *Systemy obrobky informatsii.* **8** (124), 79–82.
13. Stoyan,Yu.G, Romanova, T.E,, Chernov, N.I. & Pankratov, A.V. (2010Polnyiy klass F-funktsiy dlya bazovyih ob'ektov. *Dopovidi NAN Ukrainy*. **12**, 25–30.

Кязімов Кязім Тахірогли – к.т.н., начальник кафедри Академії Міністерства по Надзвичайним ситуаціям Азербайджана. E-mail: kazim.kazimov@fhn.gov.az..ORSID: 0000-0003-0790-9770

Комяк Валентина Михайлівна – д.т.н., професор кафедри фізико-математичних дисциплін Національного університету цивільного захисту України.
E-mail:vkomyak@ukr.net. ORSID: 0000-0002-9840-2635

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.13