УДК 519.2

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ
Национальный Научный Центр "Харьковский физико-технический институт"

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ФУНКЦИОНАЛА–СВЕРТКИ РЕГУЛЯРНОГО СИГНАЛА И НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ШУМА

*Рассмотрена суперпозиция регулярной функции $s(t)$ и случайного процесса $x(t)$, обладающего свойствами нормальности и марковости. Для заданного временного интервала на базе указанной функции изучен функционал сверточного типа. Предложен и использован подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность получения аналитического выражения для производящей функции распределения случайных значений функционала-свертки. Проанализированы статистические свойства функционала-свертки. Плотность и интегральный закон распределения находятся численно с помощью обратного преобразования Лапласа для выбранной регулярной функции $s(t)$ и выбранных значений времени наблюдения $T$, декремента случайного процесса $\nu$ и его интенсивности $\sigma_X^2$. Показано, что увеличение параметра $T\sigma_X^2$ приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений. Уменьшение параметра $\nu T$ приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационной области $z \approx 0$. Плотность распределения вероятностей функционала-свертки имеет единственный максимум, две точки перегиба и экспоненциальную асимптотику на периферийх.*

*Ключевые слова: регулярная функция, случайность, нормальность, марковость, интегральные квадратичные функционалы, функционал сверточного типа, производящая функция распределения вероятностей, статистические свойства.*

О.С. МАЗМАНІШВІЛІ
Національний Науковий Центр "Харківський фізико-технічний інститут"

# РОЗПОДІЛ ЙМОВІРНОСТЕЙ ФУНКЦІОНАЛУ-ЗГОРТКИ РЕГУЛЯРНОГО СИГНАЛУ І НОРМАЛЬНОГО МАРКІВСЬКОГО ШУМУ

*Розглянуто суперпозиція регулярної функції $s(t)$ і випадкового процесу $x(t)$, що володіє властивостями нормальності і марковости. Для заданого часового інтервалу на базі зазначеної функції вивчений функціонал згорточного типу. Запропоновано і використаний підхід, заснований на застосуванні реверсних функцій, що дало можливість отримання аналітичного виразу для твірної функції розподілу випадкових значень функціоналу-згортки. Проаналізовано статистичні властивості функціоналу-згортки. Щільність і інтегральний закон розподілу знаходяться чисельно за допомогою зворотного перетворення Лапласа для обраної регулярної функції $s(t)$ і обраних значень часу спостереження $T$, декременту випадкового процесу $\nu$ і його інтенсивності $\sigma_X^2$. Показано, що збільшення параметра $T\sigma_X^2$ призводить до розширення значень функціоналу-згортки в периферійні області великих ухилень. Зменшення параметра $\nu T$ призводить до локалізації значень функціоналу-згортки під флуктуаційної області. Щільність розподілу ймовірностей функціоналу-згортки має єдиний максимум, дві точки перегину і експоненціальну асимптотику на периферії.*

*Ключові слова: регулярна функція, нормальність, марковість, інтегральні квадратичні функціонали, функціонал згорточного типу, твірна функція розподілу ймовірностей, статистичні властивості.*

A.S. MAZMANISHVILI
National Science Center "Kharkov Institute of Physics & Technology"

# PROBABILITY DISTRIBUTION OF CROSS-FUNCTIONAL FROM REGULAR SIGNAL AND NORMAL MARKOVIAN NOISE

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15

*A superposition of a regular function $s(t)$ and a random process $x(t)$ with the properties of normality and Markov property is considered. For a given time interval, based on the specified function, the convolution-type functional is studied. An approach based on the use of reverse functions is proposed and used, which made it possible to obtain an analytical expression for the generating distribution function of random values of the convolution functional. The statistical properties of the convolution functional are analyzed. The density and the integral distribution law are found numerically using the inverse Laplace transform for the selected regular function $s(t)$ and the selected values $T$ of the observation time, the decrement of the random process $\nu$ and its intensity $\sigma_{\mathrm{X}}^2$. It is shown that an increase in the parameter $T\sigma_{\mathrm{X}}^2$ leads to the expansion of the convolution functional to the peripheral regions of large deviations. A decrease in the parameter $\nu T$ leads to the localization of the values of the convolution functional in the fluctuation region. The probability distribution density of the convolution functional has a single maximum, two inflection points and exponential asymptotic behavior at the periphery.*

*Keywords: regular function, normality, Markov property, integral quadratic functional, convolution-type functional, generating probability distribution function, statistical properties.*

## Постановка задачи

В ряде задач возникает необходимость вычисления случайных величин, которые представляют собой квадратичные функционалы от траекторий нормального марковского процесса. Примером таких функционалов может служить сверточный интеграл для заданного временного интервала $T$

$$J_{\mathrm{X}} = \int_0^T x(t)x(T-t)\,dt\,, \qquad T>0\,. \tag{1}$$

Здесь под $\{x(t)\}$ понимается нормальный процесс Орнштейна-Уленбека (ОУ-процесс). Стационарный вещественный случайный ОУ-процесс имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $\mathbf{M}[x^2(t)] = \sigma_{\mathrm{X}}^2$. При этом ОУ-процесс $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}x(t) + \nu x(t) = w(t)\,, \tag{2}$$

где декремент $\nu > 0$, а $w(t)$ – винеровский случайный процесс с дисперсией $\sigma_{\mathrm{W}}^2/2$ и корреляционной функцией $\mathbf{M}[w(t)w(t')] = \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{W}}^2 \min(t,t')$.

В более общем случае можно рассматривать обобщение функционала (1), в котором помимо случайной функции $x(t)$ также фигурирует регулярная детерминированная функция $s(t)$:

$$J_{\mathrm{X+S}} = \int_0^T \left[x(t)+s(t)\right]\left[x(T-t)+s(T-t)\right]dt\,, \qquad T>0\,. \tag{3}$$

Поставим задачу о нахождении плотности распределения $f(y)$ случайных значений $y$ функционала (3) или, что эквивалентно, характеристической функции (ХФ) $Q_{\mathrm{X+S}}(\lambda)$ распределения вероятностей для случайного функционала-свертки с параметром $\lambda$

$$Q_{\mathrm{X+S}}(\lambda) = \left\langle \exp\left(-\lambda J_{\mathrm{X+S}}\right)\right\rangle_{\mathrm{X}}\,. \tag{4}$$

Здесь и ниже уголковыми скобками будем обозначать усреднение в пространстве функций $\{x(t)\}$, а нижним индексом укажем пространство функций, относительно которого ищется математическое ожидание.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15

Подобные задачи ранее рассматривалась в работах [1-3]. В этих работах для вычисления ХФ пришлось преодолеть значительные технические трудности, в частности, найти аналитическое представление для фундаментальной матрицы $\exp(A)$, где $A$ некоторая $(4\times 4)$-матрица. В настоящей работе предложен и использован менее сложный подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность расширить постановку задачи на случай свертки сигнала в смеси с шумом.

Отметим, что квадратичность структуры функционалов $J_{\mathrm{X}}$ и $J_{\mathrm{X+S}}$ дает возможность аналитического вычисления функционального интеграла (4) и получения замкнутого выражения, в котором отсутствует континуальное интегрирование по диссипативной гауссовой мере.

**Вычисление характеристической (производящей) функции**

Рассматривая функциональный интеграл (3) в пространстве, образованном этим множеством функций, запишем его в виде

$$J_{\mathrm{X+S}}=\frac{1}{4}\int_0^T\Big[\big(x(t)+s(t)+x(T-t)+s(T-t)\big)^2-\big(x(t)+s(t)-x(T-t)-s(T-t)\big)^2\Big]dt\,, \quad (5)$$

тогда

$$Q_{\mathrm{X+S}}(\lambda)=\left\langle\frac{1}{4}\int_0^T\Big[\big(x(t)+s(t)+x(T-t)+s(T-t)\big)^2-\big(x(t)+s(T-t)-x(T-t)-s(T-t)\big)^2\Big]dt\right\rangle_{\mathrm{X}}. \quad (6)$$

Введем функции

$$u(t)=x(t)+x(T-t)+s(t)+s(T-t)\,,\qquad v(t)=x(t)+s(t)-x(T-t)-s(T-t)\,. \quad (7)$$

Принимая во внимание явный вид функционала (3), представим его в виде

$$J_{\mathrm{X+S}}=J_+[x]+J_-[x]=\frac{1}{4}\int_0^T dt\big[x(t)+s(t)+x(T-t)+s(T-t)\big]^2-\frac{1}{4}\int_0^T dt\big[x(t)+s(t)-x(T-t)-s(T-t)\big]^2\,. \quad (8)$$

Поскольку для введенных функций $u(t)$ и $v(t)$ справедливо

$$\langle u(t)\rangle_{\mathrm{X}}=s(t)+s(T-t)\,,\ \langle u(t)\rangle_{\mathrm{X}}=s(t)-s(T-t)$$
$$\text{и}\ \ \langle u(t)v(t)\rangle_{\mathrm{X}}=\big(s(t)+s(T-t)\big)\big(s(t)-s(T-t)\big),$$

то в силу этих равенств справедливо $\langle u(t)v(t)\rangle_{\mathrm{X}}=\langle u(t)\rangle_{\mathrm{X}}\langle v(t)\rangle_{\mathrm{X}}$, поэтому они в силу нормального свойства процесса $x(t)$ статистически независимы. Отсюда вытекает, что $Q_{\mathrm{X+S}}(\lambda)$ можно записать в виде

$$Q_{\mathrm{X+S}}(\lambda)=Q_+(\lambda)\,Q_-(\lambda)\,, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}Q_+(\lambda)&=\left\langle\exp\left\{-\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\big[x(t)+s(t)+x(T-t)+s(T-t)\big]^2\right\}\right\rangle_{\mathrm{X}}=\left\langle\exp\left\{-\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\,u^2(t)\right\}\right\rangle_{\mathrm{X}},\\ Q_-(\lambda)&=\left\langle\exp\left\{\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\big[x(t)+s(t)-x(T-t)-s(T-t)\big]^2\right\}\right\rangle_{\mathrm{X}}=\left\langle\exp\left\{\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\,v^2(t)\right\}\right\rangle_{\mathrm{X}}.\end{aligned} \quad (10)$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15

В факторизационном представлении (9) для ХФ сначала рассмотрим первый множитель. В нем наряду с множеством функций $\{u(t)\}$ используем сопряженное с ним множество функций $\{p(t)\}$. Тогда

$$Q_+(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\, u^2(t)\right\}\right\rangle_X = \int Dp(t)\left\langle \exp\left\{-\int_0^T dt p^2(t) + \sqrt{-\lambda}\int_0^T dt\; p(t)u(t)\right\}\right\rangle_X, \quad (11)$$

где $Dp(t)$ – обобщенный дифференциал в пространстве функций $\{p(t)\}$.

В силу нормальности статистическое среднее в (11) равно

$$\left\langle \exp\left\{\sqrt{-\lambda}\int_0^T dt\; p(t)u(t)\right\}\right\rangle_X = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda\int_0^T dt\; p(t)\int_0^T dt'\; p(t')\langle u(t)u(t')\rangle_X\right\}, \quad (12)$$

что после прямого вычисления коррелятора $K_U(t,t') = \langle u(t)u(t')\rangle$ дает

$$Q_+(\lambda) = \int Dp(t)\left\langle \exp\left\{-\int_0^T p^2(t)dt - \frac{\lambda}{2}\sigma_X^2\int_0^T p(t)\,dt\int_0^T p(t')\,dt'\left[\exp\left(-\nu|t-t'|\right) + \exp\left(-\nu|t+t'-T|\right)\right]\right\}\right\rangle. \quad (13)$$

*Утверждение* 1.

Статистические средние, основанные на корреляторе $K_U(t,t') = \langle u(t)u(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\varphi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\Lambda_n\}$, эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе $K_X(t,t') = \langle x(t)x(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\psi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$.

*Доказательство*.

Рассмотрим уравнение для собственных функций $\{\varphi_n(t)\}$ оператора $K_U$ исходного случайного ОУ-процесса с соответствующим им набором собственных чисел $\{\Lambda_n\}$, $n = 1,2,...$,

$$\left(\varphi_n(t) + s(t)\right) = \Lambda_n\int_0^T dt'\left(\varphi_n(t') + s(t')\right)\left[\exp\left(-\nu|t-t'|\right) + \exp\left(-\nu|t+t'-T|\right)\right]. \quad (14)$$

Коррелятор $K_U(t,t')$ имеет вид $K_U(t,t') = \langle x(t)x(t')\rangle + \langle x(t)x(T-t')\rangle$ и выражен через корреляторы ОУ-процесса. Во втором (экспоненциальном) слагаемом под интегралом (14) осуществим реверсную замену во времени $T - t' = t$, тогда, вновь используя переменную $t'$, получим

$$\left(\varphi_n(t) + s(t)\right) = \Lambda_n\int_0^T dt'\left(\varphi_n(t') + s(t') + \varphi_n(T-t') + s(T-t')\right)\exp\left(-\nu|t-t'|\right). \quad (15)$$

Из (15) вытекает, что для реверсной функции справедливо

$$\left(\varphi_n(T-t) + s(T-t)\right) = \Lambda_n\int_0^T dt'\left(\varphi_n(t') + s(t') + \varphi_n(T-t') + s(T-t')\right)\exp\left(-\nu|t+t'-T|\right). \quad (16)$$

или

$$\left(\varphi_n(T-t) + s(T-t)\right) = \Lambda_n\int_0^T dt'\left(\varphi_n(T-t') + s(T-t') + \varphi_n(t') + s(t')\right)\exp\left(-\nu|t-t'|\right). \quad (17)$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15

Складывая (15) и (17), приходим к уравнению

$$\psi_n(t) = 2\Lambda_n \int_0^T dt' \psi_n(t') \exp\left(-\nu|t-t'|\right), \tag{18}$$

где $\psi_n(t) = \varphi_n(t') + s(t') + \varphi_n(T-t') + s(T-t')$. В этом уравнении ядром служит уже коррелятор $K_X(t,t')$ только ОУ-процесса $\{x(t)\}$.

Статистические средние, основанные на корреляторе $K_U(t,t') = \langle u(t)u(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\varphi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\Lambda_n\}$, эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе $K_X(t,t') = \langle x(t)x(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\psi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$.

Из (15) и (18) можно заключить, что нахождение статистических средних, основанных на корреляторе $K_U(t,t') = \langle u(t)u(t')\rangle$, можно свести к нахождению статистических средних, основанных на корреляторе $K_X(t,t') = \langle x(t)x(t')\rangle$. Поэтому

$$Q_U(\lambda) = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\left[x(t') + s(t') + x(T-t') + s(T-t')\right]^2\right\}\right\rangle_X = \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\int_0^T \left(x(t)+s(t)\right)^2 dt\right\}\right\rangle_X . \tag{19}$$

При $s(t) = 0$ в правой части этого выражения имеем производящую функцию $Q_Y(\lambda)$ энергетического функционала $Y = J_X$ (1). Итак, имеем для парциальной производящей функции

$$Q_U(\lambda) = Q_+(\lambda/2). \tag{20}$$

*Утверждение* 2.

Статистические средние, основанные на корреляторе $K_V(t,t') = \langle v(t)v(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\varphi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\Lambda_n\}$, эквивалентны соответствующим статистическим средним, основанным на корреляторе $K_X(t,t') = \langle x(t)x(t')\rangle$ с собственными функциями $\{\psi_n(t)\}$ и собственными числами $\{\lambda_n\} = \{2\Lambda_n\}$.

*Доказательство*.

Преобразования, аналогичные выше изложенным, приводят к выражению

$$Q_V(\lambda) = \left\langle \exp\left\{\frac{\lambda}{4}\int_0^T dt\left[x(t') + s(t') - x(T-t') - s(T-t')\right]^2\right\}\right\rangle_X = \left\langle \exp\left\{\frac{\lambda}{2}\int_0^T \left(x(t)+s(t)\right)^2 dt\right\}\right\rangle_X . \tag{21}$$

Поэтому из (20) и (21) получаем окончательно

$$\begin{aligned} Q_{X+S}(\lambda) &= \left\langle \exp\left\{-\lambda\int_0^T \left(x(t)+s(t)\right)\left(x(T-t)+s(T-t)\right)dt\right\}\right\rangle_X = \\ &= \left\langle \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\int_0^T \left(x(t)+s(t)\right)^2 dt\right\}\right\rangle_X \left\langle \exp\left\{\frac{\lambda}{2}\int_0^T \left(x(t)+s(t)\right)^2 dt\right\}\right\rangle_X . \end{aligned} \tag{22}$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15

Факторизация выражения (22) позволяет заключить, что пространство, отвечающее множеству функций $\{x(t)\}$ вместе с $\{x(T-t)\}$, расслаивается на два подпространства, соответствующие аддитивным процессам $\{u(t)\}$ и $\{v(t)\}$ соответственно. Таким образом, ХФ $Q_{\mathrm{X}}(\lambda)$ формируется в подпространствах, образованных функциями $\{u(t)\}$ и $\{v(t)\}$ совместно, но с двое меньшей интенсивностью $\sigma_{\mathrm{X}}^2$ каждое. При этом их прямое объединение суть пространство, в котором действуют функции $\{x(t)\}$.

*Замечание.*

В частном случае $s(t)=0$ после замены в (22) $2\nu\sigma_{\mathrm{X}}^2 \Rightarrow \sigma_{\mathrm{W}}^2$ и предельного перехода $\nu \to 0$ в получившемся выражении приходим к характеристической функции $Q_{\mathrm{W}}(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_{\mathrm{W}}[w]) \rangle$ функционала-свертки $J_{\mathrm{W}} = \int_0^T w(t)w(T-t)\,dt$ от винеровского процесса $w(t)$ [4-8]:

$$Q_{\mathrm{W}}(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_{\mathrm{W}}) \rangle = \left(\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda}\sigma_{\mathrm{W}}^2 T\right)\right)^{-1/2}. \tag{23}$$

Для искомых функциональных средних можно использовать ранее найденные аналитические представления ([5], стр. 190). Применяя выражение **1.23** ([5], стр. 194), в результате громоздких преобразований окончательно получим для искомой характеристической функции

$$Q_{\mathrm{X+S}}(\lambda) = \left\{ \frac{4r_+\nu\exp(\nu T)}{f_1(r_+)} \exp\left[-\frac{\lambda}{4}\int_0^T S_+^2(t)\,dt\right] \exp\left[\frac{2\lambda^2\nu\sigma_{\mathrm{X}}^2}{r_+ f_1(r_+)} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' S_+(\tau)S_+(\tau')f_2(r_+,\tau,\tau')\right] \times \right.$$
$$\left. \times \frac{4r_-\nu\exp(\nu T)}{f_1(r_-)} \exp\left[\frac{\lambda}{4}\int_0^T S_-^2(t)\,dt\right] \exp\left[\frac{2\lambda^2\nu\sigma_{\mathrm{X}}^2}{r_- f_1(r_-)} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' S_-(\tau)S_-(\tau')f_2(r_-,\tau,\tau')\right] \right\}^{1/2}. \tag{24}$$

В выражении (24) использованы следующие обозначения:

$$S_\pm(t) = s(t) \pm s(T-t),\quad r_\pm = \sqrt{\nu^2 \pm 2\lambda\nu\sigma_{\mathrm{X}}^2/4},\quad f_1(r_\pm) = (r_\pm+\nu)^2\exp(r_\pm T) - (r_\pm-\nu)^2\exp(-r_\pm T),$$
$$f_2(r_\pm,\tau,\tau') = \left[(r_\pm+\nu)\exp(r_\pm\tau) + (r_\pm-\nu)\exp(-r_\pm\tau)\right]\left[(r_\pm+\nu)\exp(r_\pm(T-\tau')) + (r_\pm-\nu)\exp(-r_\pm(T-\tau'))\right].$$

Если записать произведение в правой части выражения (24) в виде $Q_{\mathrm{X+S}}(\lambda) = \left\{Q_{\mathrm{X}}^+(\lambda)Q_{\mathrm{S}}^+(\lambda)Q_{\mathrm{XS}}^+(\lambda)Q_{\mathrm{X}}^-(\lambda)Q_{\mathrm{S}}^-(\lambda)Q_{\mathrm{XS}}^-(\lambda)\right\}^{1/2}$, то можно из вида этого произведения заключить, что множители $\left\{Q_{\mathrm{X}}^+(\lambda)Q_{\mathrm{X}}^-(\lambda)\right\}^{1/2}$ отвечают вкладу нормального ОУ-шума $x(t)$ в формирование случайной величины – функционала-свертки $\mathrm{Z} = J_{\mathrm{X+S}}$. Далее, множители $\left\{Q_{\mathrm{S}}^+(\lambda)Q_{\mathrm{S}}^-(\lambda)\right\}^{1/2}$ ответственны за вклад регулярного сигнала $s(t)$. Наконец, множители $\left\{Q_{\mathrm{XS}}^+(\lambda)Q_{\mathrm{XS}}^-(\lambda)\right\}^{1/2}$ отвечают вкладу перекрестного взаимодействия сигнала и шума, имеющего место из-за квадратичности функционала $J_{\mathrm{X+S}}$ (3).

## Свойства сверточного функционала

Найденная характеристическая функция (24) $Q_{\mathrm{Z}}(\lambda)$ функционала-свертки $\mathrm{Z} = J_{\mathrm{X+S}}$ регулярного сигнала $s(t)$ и нормального марковского процесса $x(t)$ содержит всю статистическую информацию о случайной величине $\mathrm{Z}$. В случае $s(t)=0$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15

плотность $f(z)$ симметрична относительно линии $z=0$. В общем случае она удовлетворяет общим требованиям, предъявляемым к плотностям распределениям вероятностей интегральных квадратичных функционалов, а именно, $f(z)$ имеет единственный максимум, две точки перегиба и экспоненциальную асимптотику на периферия.

Для частного, но важного случая $s(t)=0$, информацию о плотности распределения вероятностей $f(z)$ можно получить с помощью обратного преобразования Лапласа (параметры расчета: $s(t)=0$, $\sigma_{\mathrm{X}}^2=1$, $T=1$).

На рис. 1 приведены зависимости плотности $f(z)$ для указанных значений параметров расчета. Можно показать, что увеличение параметра $T\sigma_{\mathrm{X}}^2$ приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений.

На рис. 2 приведены зависимости интегральной функции распределения $F(z)$. Из расчетов следует, что уменьшение параметра $\chi=\nu T$, равного отношению интервала наблюдения $T$ к длине корреляции $l_{\mathrm{corr}}=\nu^{-1}$ ОУ-процесса, приводит к локализации значений функционала-свертки во флуктуационной области $z\approx 0$.

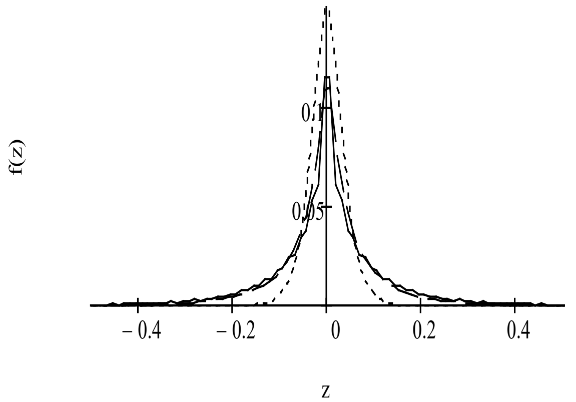


**Рис. 1. Плотность распределения вероятностей $f(z)$ при $s(t)=0$; линия – $\nu=0.1$, пунктир – $\nu=1$, точки – $\nu=10$**

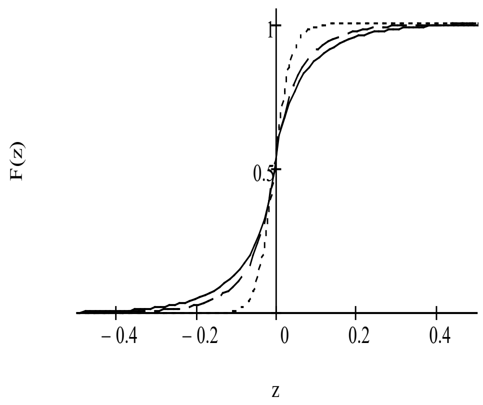


**Рис. 2. Функция распределения вероятностей $F(z)$ при $s(t)=0$; линия – $\nu=0.1$, пунктир – $\nu=1$, точки – $\nu=10$**

В случае отсутствия шумовой компоненты соответствующая плотность распределения имеет вид $\delta$-функции Дирака

$$f(z)=\delta\left(z-\int_0^T s(t)s(T-t)\,dt\right). \tag{25}$$

В общем случае из (24) следует для первого момента, что

$$\mathrm{M}[\mathrm{Z}]=\left\langle J_{\mathrm{X+S}}\right\rangle=\frac{1}{4}\int_0^T S_+^2(t)\,dt-\frac{1}{4}\int_0^T S_-^2(t)\,dt=\int_0^T s(t)s(T-t)\,dt, \tag{26}$$

то есть случайная компонента не дает вклад в первый момент.

Далее, дисперсия функционала-свертки равна

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15

$$\begin{aligned} \mathrm{D[Z]} &= \left\langle J_{\mathrm{X+S}}^2 \right\rangle - \left\langle J_{\mathrm{X+S}} \right\rangle^2 = \\ &= \sigma_{\mathrm{X}}^2 \frac{\nu T - 1 + e^{-\nu T}}{\nu} + \sigma_{\mathrm{X}}^2 \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' \left[ s(\tau)s(\tau') + s(T-\tau)s(T-\tau') \right] \exp\left(-\nu|\tau-\tau'|\right). \end{aligned} \quad (27)$$

В случае достаточно большого отношения сигнал/шум приближенное выражение для плотности распределения вероятностей $f(z)$ случайных значений функционала-свертки $\mathrm{Z} = J_{\mathrm{X+S}}$ регулярного сигнала $s(t)$ и нормального марковского процесса $x(t)$ следующее

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{D[Z]}}} \exp\left( -\frac{\left(z - \mathrm{M[Z]}\right)^2}{2\,\mathrm{D[Z]}} \right). \quad (28)$$

На рис.3 и 4 приведены зависимости, иллюстрирующие асимптотическую формулу (28) для случая, когда $s(t) = t^2$ Лапласа (параметры расчета: $\sigma_{\mathrm{X}}^2 = 1$, $T = 1$)**.**

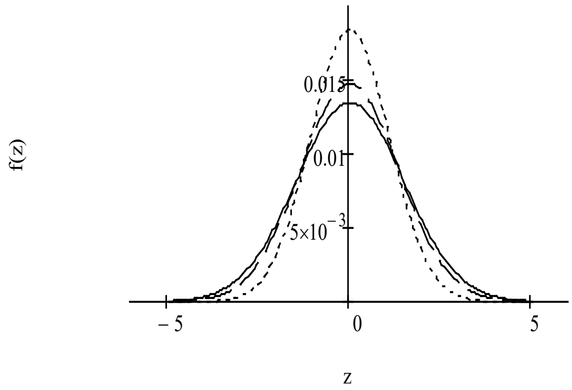


**Рис. 3. Плотность распределения вероятностей $f(z)$ при $s(t) = t^2$; линия – $\nu = 0.1$, пунктир – $\nu = 1$, точки – $\nu = 10$**

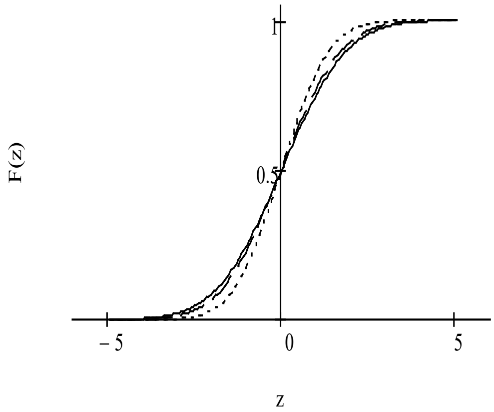


**Рис. 4. Функция распределения вероятностей $F(z)$ при $s(t) = t^2$; линия – $\nu = 0.1$, пунктир – $\nu = 1$, точки – $\nu = 10$**

Из рис. 3 и 4 можно видеть, что плотность распределения $f(z)$ имеет гауссову форму и локализуется вокруг теперь уже ненулевого значения $\mathrm{M[Z]}$.

## Выводы

В работе рассмотрена суперпозиция регулярной (сигнальной) функции $s(t)$ и случайного процесса Орнштейна-Уленбека $x(t)$, обладающего свойствами нормальности и марковости. Для заданного временного интервала $T$ изучен функционал $J_{\mathrm{X+S}}$ сверточного типа. Предложен подход, основанный на применении реверсных функций, что дало возможность получить аналитическое выражение для производящей функции $Q_{\mathrm{X+S}}(\lambda) = \left\langle \exp\left(-\lambda J_{\mathrm{X+S}}\right) \right\rangle_{\mathrm{X}}$ распределения случайных значений функционала-свертки $\mathrm{Z} = J_{\mathrm{X+S}}$. Плотность и интегральный закон распределения получены численно для выбранных значениях времени наблюдения $T$, декремента случайного процесса $\nu$ и его интенсивности $\sigma_{\mathrm{X}}^2$. Получено, что увеличение параметра $T\sigma_{\mathrm{X}}^2$ приводит к расширению значений функционала-свертки в периферийные области больших уклонений. Уменьшение параметра $\nu T$ приводит к локализации значений

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15

функционала-свертки в флуктуационную область $z \approx 0$. Плотность $f(z)$ удовлетворяет общим требованиям, предъявляемым к плотностям распределениям вероятностей интегральных квадратичных функционалов. Приведены численные примеры, характеризующие описанные статистические свойства случайной величины – функционала-свертки $J_{\mathrm{X+S}}$. С помощью предельного перехода и стандартных замен в производящей функции $Q_{\mathrm{Z}}(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_{\mathrm{X}}) \rangle$ получена характеристическая функция $Q_{\mathrm{W}}(\lambda) = \langle \exp(-\lambda J_{\mathrm{W}}) \rangle$ функционала-свертки, основанном на винеровском процессе $w(t)$.

## Список использованной литературы


1. Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S. On the theory of Brownian Motion. *Phys. Rev.* 1930. V. 36. P. 823–841.
2. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. Москва: Государственное издательство иностранной литературы. 1947. 168 с.
3. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. Радио. 1977. 488 с.
4. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. Москва: Наука. 1974. 299 с.
5. Мазманишвили А. С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. Киев: Наукова Думка. 1987. 224 с.
6. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Статистические свойства функционала-свертки от нормального марковского процесса. *Доклады Академии Наук УССР*. 1988. № 1. С. 14–16.
7. Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса. *Проблемы передачи информации*. 1990. Т. 26. Вып. 3. С. 96–101.
8. Клячко А. А., Солодянников Ю. В. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста. *Теория вероятностей и её применение*. 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 569–573.


## References


1. Uhlenbeck, G. E. & Ornstein, L. S. (1930). On the theory of Brownian Motion. *Phys. Rev.* **36**, 823–841.
2. Chandrasekar, S. (1947). Stohasticheskie problemyi v fizike i astronomii. Moskva: Gosudarstvennoe izdatelstvo inostrannoy literaturyi.
3. Tihonov, V. I. & Mironov, M. A. (1977). Markovskie protsessyi. Moskva: Sov. Radio.
4. Leks, M. (1974). Fluktuatsii i kogerentnyie yavleniya. Moskva: Nauka.
5. Mazmanishvili, A. S. (1987). Kontinualnoe integrirovanie kak metod resheniya fizicheskih zadach. Kiev: Naukova Dumka.
6. Virchenko, Yu. P. & Mazmanishvili, A. S. (1988). Statisticheskie svoystva funktsionala-svertki ot normalnogo markovskogo protsessa. *Dokladyi Akademii Nauk USSR*. **1**, 14–16.
7. Virchenko, Yu. P. & Mazmanishvili, A. S. (1990). Raspredelenie veroyatnostey sluchaynogo funktsionala-svertki ot normalnogo markovskogo protsessa. *Problemyi peredachi informatsii*. **26**, 3, 96–101.
8. Klyachko, A. A. & Solodyannikov, Yu. V. (1986). Vyichislenie harakteristicheskih funktsiy nekotoryih funktsionalov ot vinerovskogo protsessa i brounovskogo mosta. *Teoriya veroyatnostey i eYo primenenie*. **31**, 3, 569–573.


МАЗМАНИШВИЛИ Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник ННЦ ХФТИ, e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.15