

УДК 539.3

М.Л. МИРОНЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України
Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПАЛИВНИХ БАКІВ ПРИ РІЗНИХ УМОВАХ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

Дослідження коливань рідини у паливних баках космічних апаратів є необхідним для забезпечення їх стійкості під час польоту. Рідинні ракети-носії мають на борту значні запаси рідких компонентів. В паливних баках та баках окисників виникають коливання вільної поверхні рідини, на характер яких впливають також і зовнішні чинники, такі як гравітація, рівень заповнення баків, їх форма тощо. Виникає необхідність визначення форм та частот коливань вільної поверхні рідини для забезпечення стійкого стану літального апарату під час польоту. Для вирішення цієї задачі застосовано методи математичного моделювання. Розглянуто дослідження задачі малих коливань у резервуарах, частково заповнених рідиною, що стосуються космічної галузі. Також розглянуті роботи вітчизняних та закордонних авторів щодо розв'язання задач коливань рідини в нелінійній постановці. У даній роботі проведено аналіз форм та частот коливань рідини в умовах перевантаження при різних рівнях заповнення. Виконано дослідження малих коливань (лінійне формулювання). Прийнято, що рідина є нестисливою та однорідною, а її рух безвихровий. Існує потенціал швидкості руху, що задовольняє рівнянню Лапласа. Виконуються кінематична та динамічна граничні умови на вільній поверхні. Для врахування впливу низької гравітації виконано узагальнення граничних умов. В динамічній умові на вільній поверхні враховано поверхневий натяг, що має визначальне значення в умовах мікрогравітації. Отримано співвідношення, що має виконуватись на вільній поверхні. Отримане рівняння дозволяє проводити дослідження вимушених коливань жорсткої оболонки обертяння, що частково заповнена рідиною. Отримано числові результати для циліндричної оболонки обертяння. Прийняті нульові початкові умови. Виконані розрахунки при різних рівнях заповнення для циліндричної оболонки. Отримані найнижчі частоти коливань. Також досліджені коливання рідини, що знаходиться під дією вертикального навантаження. Отримані фазові портрети для різних значень частот вертикальної сили збудження. Отримані результати дозволяють дослідити амплітуди коливань вільної поверхні.

Ключові слова: вимушені коливання, оболонка обертяння, вільна поверхня рідини, поверхневий натяг, методи скінчених та граничних елементів.

M.L. MYRONENKO

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences
O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

FORCED VIBRATIONS OF FUEL TANKS UNDER DIFFERENT OPERATING CONDITIONS

The study of fluid vibrations in the fuel tanks in launch vehicles is necessary to ensure their stability during flight. Liquid launch vehicles have significant reserves of liquid components on board. In fuel tanks and oxidizer tanks there are oscillations of the free surface of the liquid, the nature of which is also influenced by external factors such as gravity, the level of filling of the tanks, their shape and so on. There is a need to determine the shapes and frequencies of the free surface vibrations of the liquid to ensure a stable state of the aircraft during flight. To solve this problem, mathematical modeling methods are used. A study of the problem of small oscillations in reservoirs partially filled with liquid in the space industry is considered. The works of domestic and foreign authors on solving the problems of fluid oscillations in a nonlinear formulation are also considered. In this article the analysis of forms and frequencies of fluctuations of liquid in the conditions of an overload at various levels of filling is carried out. The study of small oscillations (linear formulation) is performed. It is accepted that the fluid is incompressible and homogeneous, and its motion is vortex-free. There is a potential for velocity that satisfies the Laplace equation. Kinematic and dynamic boundary conditions on a free surface are fulfilled. To take into account the influence of low gravity, the generalization of boundary conditions is performed. In the dynamic state on the free surface, the surface tension is taken into account, which is the governing quantity under microgravity conditions. The relation to be performed on a free surface is obtained. The obtained equation allows us to study the forced oscillations of the rigid shell of revolution which is partially filled with fluid. Numerical results for a cylindrical shell of revolution are obtained. Zero initial conditions are accepted. Calculations were performed at different levels of filling for the cylindrical shell. The

lowest vibrations frequencies are obtained. The vibrations of the fluid under the action of the vertical load are also investigated. Phase portraits for different values of vertical excitation frequencies are obtained. The amplitudes of vibrations of the free surface are investigated.

Keywords: forced vibrations, shell of revolution, surface tension, liquid free surface, boundary and finite element methods.

М.Л. МИРОНЕНКО

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.Н. Бекетова

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОПЛИВНЫХ БАКОВ ПРИ РАЗНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Исследование колебаний жидкости в топливных баках космических аппаратов необходимо для обеспечения их устойчивости во время полета. Жидкостные ракеты-носители имеют на борту значительные запасы жидких компонентов. В топливных баках и баках окислителей возникают колебания свободной поверхности жидкости, на характер которых влияют также и внешние факторы, такие как гравитация, уровень заполнения баков, их форма. Возникает необходимость определения форм и частот колебаний свободной поверхности жидкости для обеспечения устойчивого состояния летательного аппарата во время полета. Для решения этой задачи применены методы математического моделирования. Рассмотрены исследования задачи малых колебаний в резервуарах, частично заполненных жидкостью, касающиеся космической отрасли. Также рассмотрены работы отечественных и зарубежных авторов по решению задач колебаний жидкости в нелинейной постановке. В данной работе проведен анализ форм и частот колебаний жидкости в условиях перегрузки при различных уровнях заполнения. Выполнены исследования малых колебаний (линейная формулировка). Считаем, что жидкость является несжимаемой и однородной, а ее движение безвихревым. Существует потенциал скорости движения, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Выполняются кинематические и динамические граничные условия на свободной поверхности. Для учета влияния низкой гравитации выполнено обобщение граничных условий. В динамическом условии на свободной поверхности учтено поверхностное натяжение, что имеет определяющее значение в условиях микрогравитации. Полученные соотношения должны выполняться на свободной поверхности. Выведенное уравнение позволяет проводить исследования вынужденных колебаний жесткой оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Получены численные результаты для цилиндрической оболочки вращения. Приняты нулевые начальные условия. Выполнены расчеты при различных уровнях заполнения для цилиндрической оболочки. Получены низшие частоты колебаний. Также исследованы колебания жидкости в резервуаре, находящемся под действием вертикальной нагрузки. Получены фазовые портреты для различных значений частот вертикальной нагрузки. Исследованы амплитуды колебаний свободной поверхности.

Ключевые слова: вынужденные колебания, оболочка вращения, свободная поверхность жидкости, поверхностное натяжение, методы конечных и граничных элементов.

Постановка проблеми

Сфера машинобудування, зокрема галузі авіаційної та ракетно-космічної техніки, пов'язані з вирішенням задач динаміки тіл, які мають заповнені рідиною порожнини, наприклад, баки, резервуари тощо. Особливістю ракет-носіїв є значні обсяги рідкого палива, вага якого більш ніж в тридцять разів перевищує масу корисного навантаження. Тому запас рідкого палива на борту ракети-носія, а також інтенсивний зовнішній вплив впливає на рух літального апарату. Виникають коливання вільної поверхні рідини в баках, на характер яких впливає значна кількість чинників, таких як гравітація, рівень наповнення баків, їх форма, напрямок та параметри зовнішнього впливу та інші. Методом математичного моделювання отримують форми та частоти коливань вільної поверхні в резервуарах, що частково заповнені рідиною. Це є складовою у забезпеченні стійкості руху рідинних ракет-носіїв.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Задачі малих коливань тіл, що містять заповнені рідиною порожнини, подані у лнійному вигляді у роботах вітчизняних вчених 50-60 років ХХ ст. [1-3], а також зарубіжних дослідників [4-6]. Оновлене видання [7] монографії [6] доповнене новими результатами досліджень, що стосуються саме галузі використання космічних апаратів. Наприклад, значно розширено розділ, присвячений поведінці рідкого ракетного палива в умовах мікрогравітації [7].

Завдання ускладнювалось, якщо коливання не вважались малими, а розв'язання виконувалось в нелнійній постановці. У роботі [8] розглянуті асиметричні коливання в частково заповнених рідиною циліндричних резервуарах, які знаходяться під дією періодичного горизонтального впливу. В результаті різкого осьового прискорення (перезапуску двигуна) починається формування гейзера, різке виплескування рідини та захоплення газу, викликані різкою зміною числа Бонда. В роботі [9] виконується аналітичне дослідження впливу тонкої еластичної пластинчастої кришки на паливний бак, заповнений рідиною. Результати показують, що невимірною основною кутовою швидкістю системи рідина-структура є функцією масового співвідношення, числа пружності пластини та співвідношення сторін. Ця функція може використовуватись для проектування резервуарів для рідини з кришкою. Використовуючи мультимодальну теорію плескання, автори у роботі [10] дослідили стаціонарну хвильову характеристику, коли частота вимушених коливань близька до найнижчої природної частоти хлюпання. Побудоване аналітичне рішення показує, що амплітудно-хвильова характеристика має поведінку жорсткої пружини, що підтверджується експериментально.

Існують дослідження плескання рідини у 3D-просторі. Використовуються рівняння мілководдя (відомі як рівняння Сен-Венана) для опису тривимірних коливань рідини у посудині, яка здійснює рух, як тверде тіло [13]. Таким чином, у роботі точно моделюється рух твердого тіла посудини (крен-тангаж-рискання та (або) стрибкоподібне коливання), а наближення приймаються лише для течії рідини. Модель розповсюджується на теорію Пенні-Прайса-Тейлора та розширює її до тривимірної форми для найвищої стоячої хвилі. Рівняння на поверхні моделюються за допомогою неявної схеми перемінних напрямків з розділенням кроків.

Методом топографії еталонного зображення експериментально досліджені форми поверхні розподілу рідина-газ в циліндричному посуді, частково заповненому водою, під час плескання, викликаного за рахунок дії бічних зусиль у вигляді синусоїдального збудження [11]. Запропонована технологія дозволяє перетворювати оптичне поле переміщення у висоту вільної поверхні за допомогою оцінки видимої деформації зображення. Результати включають дані, отримані під час сталого режиму хлюпання, під час перехідної фази при гальмуванні контейнеру та демпфуванні рідини при відсутності зовнішнього збудження. У наступній роботі авторів [12], яка є продовженням даного дослідження, показано, що під час помірних коливань (за відсутності розбрикування та розбиття хвилі) можливо визначати абсолютне положення поверхні розподілу рідина-газ. Одночасне вимірювання у кількох точках дозволило індивідуалізувати площинні та закручені рухи та фазові затримки. Визначення швидкості затухання коливань рідини на границі розподілу рідина-газ у всіх точках області дозволило ідентифікувати області резервуару з більш високою енергією. Результати експериментальних досліджень відіграють важливу роль у розумінні фізичної сторони плескання рідини, а також створюють точну базу даних для оцінки та перевірки чисельного моделювання [12].

Мета дослідження

Метою дослідження є створення методики визначення частот та форм вільних коливань рідини в баках при різних умовах експлуатації: різних рівнях заповнення і перевантажень.

Викладення основного матеріалу дослідження

У даній роботі розглядаються коливання рідини в жорсткій циліндричній оболонці обертання висотою H та радіусом R , яка частково заповнена рідиною на висоту H_1 , має вільну поверхню S_0 . Площа змоченої бічної поверхні складає S_1 (рис. 1).

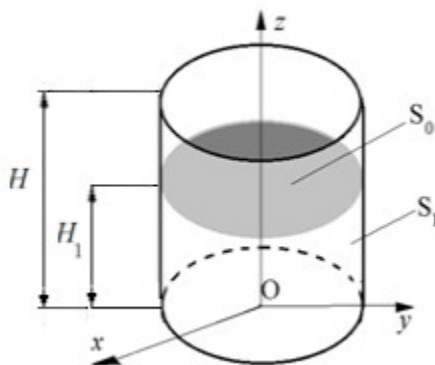


Рис. 1. Циліндрична оболонка обертання, частково заповнена рідиною

Для моделювання руху рідини була розроблена математична модель, що базується на таких гіпотезах: рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух безвихровий. Досліджуємо лише малі коливання (лінійна теорія). В цих умовах існує потенціал швидкості $\phi(x, y, z, t)$, градієнт якого є швидкістю рідини, а саме $V = \nabla\phi$. Використовуючи рівняння руху і умови потенційності потоку, приходимо до інтеграла Коші-Лагранжа в такій формі, як в роботі [14]:

$$p = -\rho_l \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + gz + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 \right], \quad (1)$$

де ρ_l – густина рідини, кг/м³;

$a_x(t), a_z(t)$ – компоненти пришвидшення сили, що збуджує, м/сек²;

g – пришвидшення вільного падіння, м/сек².

Якщо розглядаються малі коливання рідини (лінійне формулювання), то $|\nabla\phi|^2 \ll 1$, та із формули (1) отримуємо:

$$p = -\rho_l \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + gz \right]. \quad (2)$$

У припущенні, що потік є безвихровим, рух ідеальної нестислої рідини описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (3)$$

Для визначення тиску необхідно обчислити потенціал швидкостей. Для цього треба сформулювати граничні умови для потенціалу швидкостей на границях розрахункової області. На вільній поверхні виконуються кінематична та динамічна умови. Означені умови мають такий вигляд:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)\xi + g\xi|_{S_0} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{S_0} = \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\sigma} = 0, \quad (4)$$

де $\xi = \xi(x, y, t)$ – функція, що описує рух вільної поверхні.

Зауважимо, що граничні умови (4) у випадку низької гравітації треба узагальнити. Нехай σ_0 – поверхневий натяг. За формулою Лапласа-Юнга [15] маємо

$$p_s = \sigma_0 k,$$

де k – кривина поверхні.

Вираз для кривини k можна лінеаризувати, як в роботі [15]:

$$k = -\Delta_s \xi,$$

де Δ_s – поверхневий оператор Лапласа.

Таким чином, динамічна гранична умова на вільній поверхні набуває вигляду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a_x(t)x + a_z(t)z + g\xi - \frac{\sigma_0}{\rho_l} \Delta_s \xi \Big|_{s_0} = 0. \quad (5)$$

Умова (5) дозволяє враховувати поверхневий натяг, який стає визначальним фактором при дослідженні коливань оболонкової конструкції в умовах низької гравітації.

Зобразимо потенціал Φ_2 у вигляді ряду по власним формам коливань рідини в жорсткому резервуарі

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k, \quad (6)$$

де $d_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

φ_k – базисні функції;

M – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

Для функцій φ_k формулюємо крайові задачі таким чином:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \Big|_{\sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \Big|_{s_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\xi = 0. \quad (7)$$

При цьому на вільній поверхні маємо співвідношення

$$\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_{2k}, \quad (8)$$

де χ_k – частоти власних коливань вільної поверхні, Гц.

Ці базисні функції побудовано в роботах [16, 17]. При цьому крайові задачі зводились до систем сингулярних інтегральних рівнянь, для чисельного розв'язання яких використано метод, розроблений в [18].

Рівняння вільної поверхні набуває вигляду

$$\xi = \xi(x, y, t) = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}, \quad (9)$$

а для потенціалу швидкостей маємо

$$\Phi = \Phi(x, y, t) = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_k.$$

При цьому на вільній поверхні має виконуватись таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + (g + a_z(t)) \left(\sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) + a_x(t)x - \frac{\sigma_0}{\rho_l} \Delta_s \xi = 0. \quad (10)$$

Рівняння (10) дає змогу дослідити вимушені коливання жорсткої оболонкової конструкції з відсіками, частково заповненими рідиною. Оскільки зазвичай припускалося, що в початковий момент часу система «оболонка-рідина» знаходилась в стані спокою, при розрахунках приймаються нульові початкові умови.

Аналіз числових результатів

Розглянуто циліндричну оболонку з такими параметрами: $R=1\text{м}$, $H=1\text{м}$. Поверхневий натяг $\sigma_0 = 2,87 \times 10^{-2} \text{ Н/м}$. Вивчені вільні коливання такої оболонки при різних рівнях заповнення h та перевантаження n . Ці дані наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Рівні заповнення та перевантаження

n	1	2,3	3,6	4,0	0,2
$h, \text{м}$	1,0	0,7	0,6	0,5	0,4
$\omega, \text{Гц}$	0,659251	0,626516	0,605506	0,576106	0,535326

В цій таблиці також наведені нижчі частоти коливань рідини. Бачимо тенденцію до зниження нижчої частоти. Далі вивчено коливання рідини під дією вертикального навантаження. На рис. 2 подані фазові портрети коливань рідини в координатах ξ, ξ'_t з різними параметрами зовнішнього навантаження. Вважалось, що в рівнянні (10)

$$a_z(t) = -a_v \cos \omega_v t, \quad a_x(t) = 0.$$

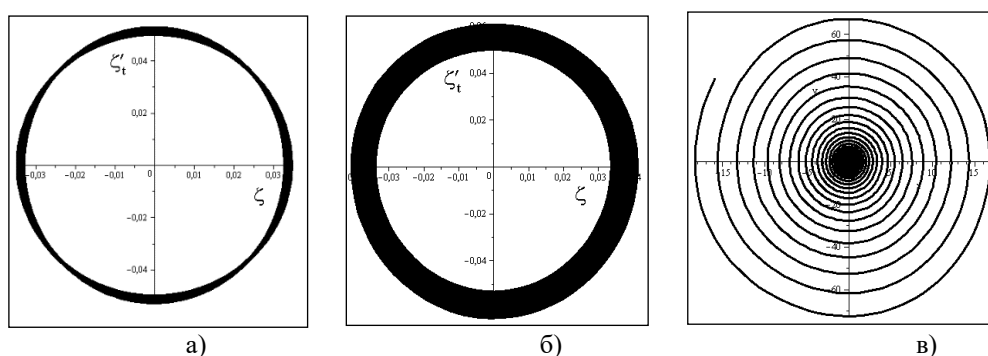


Рис.2. Фазові портрети

За початкові умови обирались рівняння

$$\dot{d}_{01}(0) = 0.05, \dot{d}_{0k}(0) = 0.0, k = \overline{2, M}, d_{0k}(0) = 0, k = \overline{1, M}.$$

Розглянуто випадок $n=3.6$, $h=0.6 \text{ м}$. Вважалось, що $a_v = 1$. Розглянуто різні значення частоти вертикальної сили збудження, а саме $\omega_v = 0.2 \text{ Гц}$, $\omega_v = 0.6 \text{ Гц}$, $\omega_v = 1.2 \text{ Гц}$. Саме цим значенням відповідають фазові портрети, зображені на рис. 2а), 2б), 2в).

З отриманих результатів можна зробити висновок, що при $\omega_v = 0.6$ Гц, яке є близьким до власної частоти, наявне збільшення амплітуди коливань вільної поверхні, а при $\omega_v = 1.2$ Гц спостерігається явище параметричного резонансу.

Висновки

Розроблено методику дослідження поведінки вільної поверхні рідини у циліндричній оболонці обертання за різних умов експлуатації. Методика дозволяє дослідити амплітуди вимушених коливань вільної поверхні при різних рівнях заповнення резервуару та різних перенавантаженнях. У подальшому передбачається дослідити поведінку рідини в резервуарах іншої форми.

Список використаної літератури

1. Крейн С.Г., Моисеев Н.Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. *Прикладная математика и механика*. 1957. № 21 (2). С. 169–174.
2. Рабинович Б.И., Докучаев Л.В., Полякова З.М. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. *Космические исследования*. 1965. № 3 (2). С. 179–207.
3. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета, собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. Москва: ВЦ АН СССР, 1966. 268 с.
4. Hutton R. E. An investigation of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical container: Tech. Rep. 1963. P. 191–194. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1964-1019> (дата звернення: 05.04.2021).
5. Abramson H. N., Chu W. H., and Kana D. D. Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers. *Journal of Applied Mechanics*. 1964. Vol. 33. No. 4. P. 777–784.
6. Abramson H. N. The dynamic behavior of liquids in moving containers with applications to space vehicle technology: Tech. Rep. NASA SP-106. 1966. P. 467.
7. Dodge F. T. The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. San Antonio, Texas: Southwest Research Institute, 2000. 195 p.
8. Hopfinger E. J., Baumbach V. Liquid sloshing in cylindrical fuel tanks *EUCASS Proceedings Series – Advances in Aerospace Sciences*. 2009. Vol. 1. P. 279-292 URL: <https://doi.org/10.1051/eucass/200901279> (дата звернення: 05.04.2021).
9. Abdollahzadeh Jamalabadi M.Y. Analytical Solution of Sloshing in a Cylindrical Tank with an Elastic Cover. *Mathematics*. 2019. Vol. 7. P. 1070.
10. Raynovskyy I., Timokha A. Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Cylindrical Container Performing a Circular Orbital Motion. *Mathematical Problems in Engineering*. 2018. Vol. 2018. P. 1–8. URL: <https://doi.org/10.1155/2018/5487178> (дата звернення: 06.04.2021).
11. Simonini A., Fontanarosa D., De Giorgi M.G., Vetrano M.R. Liquid dynamics sloshing in cylindrical containers: A 3D free-surface reconstruction dataset. Data in Brief. 2020. Vol. 33. ISSN 2352–3409. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352340920314281> (дата звернення: 06.04.2021).
12. Simonini A., Fontanarosa D., De Giorgi M.G., Vetrano M.R. Mode characterization and damping measurement of liquid sloshing in cylindrical containers by means of Reference Image Topography. *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2021. Vol. 120. ISSN 0894-1777, URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0894177720307366> (дата звернення: 06.04.2021).
13. Ardakani H., Bridges T. Shallow-water sloshing in vessels undergoing prescribed rigid-body motion in three dimensions. *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 667. P. 474–519. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112010004477> (дата звернення: 07.04.2021).

14. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Degtyarev, K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. 111. P. 78–87. URL: [https://doi: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008) (дата звернення: 08.04.2021).
15. Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics / Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2005. 972 p.
16. Strelnikova, E., Choudhary, N., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Tonkonozhenko, A. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. 120. 13–27. URL: [https://doi: 10.1016/j.enganabound.2020.07.024](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.024) (дата звернення: 08.04.2021).
17. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering*. 2018. Vol.3. No.1. P.15–52 URL: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf> (дата звернення: 08.04.2021).
18. Gnitko V., Degtyariv K., Karaiev A., and Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, WIT Transactions on Engineering Sciences, *Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods XLII*. 2019. Vol. 122. P.13–25. URL: 10.2495/BE410021(дата звернення: 08.04.2021).

References

1. Kreyn, S.G., & Moiseev, N.N. (1957). O kolebaniyah tverdogo tela, soderzhashego zhidkost so svobodnoy poverhnostyu. *Prikladnaya matematika i mehanika*, **21** (2), 169–174.
2. Rabinovich, B.I., Dokuchaev, L.V., & Polyakova Z.M. (1965). O raschete koeffitsientov uravneniy vozmushchennogo dvizheniya tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. *Kosmicheskie issledovaniya*. **3** (2), 179–207.
3. Moiseev, N.N., & Petrov, A.A. (1966). Chislennyye metodyi rascheta, sobstvennyih chastot kolebaniy ogranichennogo ob'ema zhidkosti. Moskva: VT AN SSSR.
4. Hutton, R. E. (1963). An investigation of nonlinear, nonplanar oscillations of fluid in cylindrical container: Tech. Rep. URL: <https://doi.org/10.2514/6.1964-1019> (Last accessed: 05.04.2021).
5. Abramson, H. N., Chu, W. H., & Kana, D. D. (1964). Some studies of nonlinear lateral sloshing in rigid containers. *Journal of Applied Mechanics*. **33**, 4, 777–784.
6. Abramson, H. N. (1966). The dynamic behavior of liquids in moving containers with applications to space vehicle technology: Tech. Rep. NASA SP-106.
7. Dodge, F. T. (2000). The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. San Antonio, Texas: Southwest Research Institute.
8. Hopfinger, E. J., & Baumbach, V. (2009). Liquid sloshing in cylindrical fuel tanks *EUCASS Proceedings Series – Advances in Aerospace Sciences*. **1**, 279–292. URL: <https://doi.org/10.1051/eucass/200901279> (Last accessed: 05.04.2021).
9. Abdollahzadeh Jamalabadi, M.Y. (2019). Analytical Solution of Sloshing in a Cylindrical Tank with an Elastic Cover. *Mathematics*. **7**, 1070.
10. Raynovskyy, I., & Timokha, A. (2018). Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Cylindrical Container Performing a Circular Orbital Motion. *Mathematical Problems in Engineering*. **2018**, 1–8. URL: <https://doi.org/10.1155/2018/5487178> (Last accessed: 06.04.2021).

11. Simonini, A., Fontanarosa, D., De Giorgi, M.G., & Vetrano M.R. (2020). Liquid dynamics sloshing in cylindrical containers: A 3D free-surface reconstruction dataset. *Data in Brief*. **33**.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352340920314281>
(Last accessed: 06.04.2021).
12. Simonini, A., Fontanarosa, D., De Giorgi, M.G., & Vetrano, M.R. (2021). Mode characterization and damping measurement of liquid sloshing in cylindrical containers by means of Reference Image Topography. *Experimental Thermal and Fluid Science*. **120**.
URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0894177720307366> (Last accessed: 06.04.2021).
13. Ardakani, H., & Bridges, T. (2011). Shallow-water sloshing in vessels undergoing prescribed rigid-body motion in three dimensions. *Journal of Fluid Mechanics*. **667**, 474–519. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112010004477> (Last accessed: 07.04.2021).
14. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Degtyarev, K. (2020). Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **111**, 78–87. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.10.008>.
15. Ibrahim, R.A. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics / Theory and Applications*. Cambridge University Press.
16. Strelnikova, E., Choudhary, N., Kriutchenko, D., Gnitko, V., & Tonkonozhenko, A. (2020). Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. **120**, 13–27. URL: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.07.024> (Last accessed: 08.04.2021).
17. Strelnikova, E., Gnitko, V., Krutchenko, D., & Naumemko, Y. (2018). Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering*. **3**, 1, 15–52 URL: <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf> (Last accessed: 08.04.2021).
18. Gnitko, V., Degtyariov, K., Karaiev, A., & Strelnikova, E. (2019). Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, WIT Transactions on Engineering Sciences, *Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods XLII*. **122**, 13–25. URL: [10.2495/BE410021](https://doi.org/10.2495/BE410021) (Last accessed: 08.04.2021).

Мироненко Марія Леонідівна – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків; тел.: (098) 931-85-19; e-mail: mariamironenko87@gmail.com. ID ORCID: 0000-0002-0266-4463.