УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШИНА
Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"
В.О. ПАСІЧНИК
Харківська державної академія дизайну і мистецтв

ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ДИНАМІЧНОГО ТРИВИМІРНОГО ТІЛА З ВИКОРИСТАННЯМ МІШАНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Робота присвячена задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, що задані на деякій системі площин, які перетинають об'єкт дослідження. Ця задача виникає на практиці в тих випадках, коли серед площин, які входять в експериментальні дані, немає площини, що складається з того чи іншого набору точок, які цікавлять дослідника. Наприклад, така задача може виникнути після того, як пацієнт пройшов дослідження на медичному томографі. Після аналізу отриманих томограм виникає необхідність знайти за їх допомогою ще одну чи декілька томограм в площинах, які перетинають тіло та не співпадають ні з жодною із заданих площин. В статті зазначається, що оператори інтерфлетації функцій є природнім узагальненням операторів інтерполяції функцій трьох змінних. Ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на заданій системі площин. Саме такі експериментальні дані використовуються в дистанційних методах, зокрема в комп'ютерній томографії. Отже, інтерфлетація – математичний апарат, природно пов'язаний із задачею відновлення характеристик об'єктів за їх відомими проекціями. Як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в даному випадку, в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлетації. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – оператори апроксимації. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою поліномів, раціональних функцій, тригонометричних поліномів, вейвлетів тощо. Будується оператор мішаної апроксимації функції трьох змінних за допомогою поліномів Бернштейна; наводиться загальний вигляд похибки наближення побудованим оператором та оцінка цієї похибки. Також в роботі будується та досліджується чотиривимірна математична модель тривимірного тіла, що змінюється з часом. Наводиться обчислювальний експеримент з відновлення внутрішньої структури рухомого серця людини за томограмами, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин, які поступають з реально діючого комп'ютерного томографа.

Ключові слова: інтерфлетація функцій, комп'ютерна томографія, томограма, мішана апроксимація, поліном Бернштейна.

Ю.И. ПЕРШИНА
Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"
В.А. ПАСЕЧНИК
Харьковская государственная академия дизайна и искусств

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Работа посвящена задаче восстановления внутренней структуры трехмерного тела с помощью информации о ней в виде томограмм, что заданы на некоторой системе плоскостей, пересекающих объект исследования. Эта задача возникает на практике в тех случаях, когда среди плоскостей, которые входят в экспериментальные данные, нет плоскости, состоящей из того или иного набора точек, которые интересуют исследователя. Например, такая задача может возникнуть после того, как пациент прошел исследования на медицинском томографе. После анализа полученных томограмм, возникает необходимость найти с их помощью еще одну или несколько томограмм в плоскостях, пересекающих тело, но несовпадающих ни с одной из заданных плоскостей. В статье отмечается, что операторы интерфлетации функций являются естественным обобщением операторов интерполяции функций трех переменных. Эти операторы восстанавливают функции (возможно, приближенно) по известным их следам на заданной системе плоскостей. Именно такие экспериментальные данные используются в дистанционных методах, в частности, в компьютерной томографии. Таким образом, интерфлетация – математический аппарат, который естественно связан с задачей восстановления

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.19

характеристик объектов по их известными проекциями. Как и в случае интерполяции, погрешности в экспериментальных данных (в данном случае, в томограммах) привносятся также и в операторы интерфлетации. В математике существует альтернатива операторам интерполяции – операторы аппроксимации. Это операторы, построенные путем сглаживания экспериментальных данных с помощью полиномов, рациональных функций, тригонометрических полиномов, вейвлетов и тому подобное. Строится оператор смешанной аппроксимации функции трех переменных с помощью полиномов Бернштейна; приводится общий вид погрешности приближения построенным оператором и оценка этой погрешности. Также в работе строится и исследуется четырехмерная математическая модель трехмерного тела, которое меняется со временем. Приводится вычислительный эксперимент по восстановлению внутренней структуры подвижного сердца человека по томограммам, лежащим на системе взаимно перпендикулярных плоскостей, которые поступают из реально действующего компьютерного томографа.

Ключевые слова: интерлфлетация, компьютерная томография, томограмма, смешанная аппроксимация, полином Бернштейна.

I.I. PERSHINA
National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”
V.O. PASICHNYK
Kharkov State Academy of Design and Arts

RESTORATION OF THE INTERNAL STRUCTURE OF A DYNAMIC THREE-DIMENSIONAL BODY USING BLENDING APPROXIMATION

The work is devoted to the problem of restoring the internal structure of a three-dimensional body using information about it in the form of tomograms, which are given on a certain system of planes intersecting the object of study. This problem arises in practice when, among the planes that are included in the experimental data, there is no plane consisting of a particular set of points that are of interest to the researcher. For example, such a problem may arise after a patient has undergone examinations on a medical tomograph. After analyzing the obtained tomograms, it becomes necessary to find with their help one or more tomograms in the planes intersecting the body, but not coinciding with any of the given planes. The article notes that the operators of interflatation of functions is a natural generalization of the operators of interpolation of three variables functions. These operators restore functions (possibly approximately) from their known traces on a given system of planes. It is these experimental data that are used in remote sensing methods, in particular in computed tomography. Thus, interflatation is a mathematical apparatus, naturally associated with the task of reconstructing the characteristics of objects from their known projections. As in the case of interpolation, errors in experimental data (in this case, in tomograms) are also introduced into the interflatation operators. In mathematics, there is an alternative to interpolation operators - approximation operators. These are operators constructed by smoothing experimental data using polynomials, rational functions, trigonometric polynomials, wavelets, and the like. An operator of blending approximation of a three variables function is constructed using Bernstein polynomials; the general form of the approximation error by the constructed operator and the estimate of this error are given. The work also builds and studies a four-dimensional mathematical model of a three-dimensional body that changes over time. A computational experiment is presented to restore the internal structure of a moving human heart from tomograms lying on a system of mutually perpendicular planes, which come from a really operating computer tomograph.

Keywords: interflatation, computed tomography, tomogram, blending approximation, Bernstein polynomial.

Постановка проблеми

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів. У попередніх роботах авторів [1] розв’язувалася задача комп’ютерної томографії методами інтерфлетації функцій.

Задача побудови математичних моделей динамічної внутрішньої структури тривимірних тіл належить до однієї з найбільш актуальних задач сучасності. Така задача виникає в різних областях науки та техніки, зокрема, в медичній практиці у випадку проведення декількох повторних досліджень пацієнта в різні моменти часу та необхідності аналізу на їх основі ефективності лікування. Таким чином, актуальною є

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.19

розробка та дослідження методу розв’язання 3D задачі комп’ютерної томографії з використанням операторів мішаної апроксимації та методу відновлення динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла, що змінюється з часом, за відомими її томограмами, що поступають з комп’ютерного томографа.

В ряді випадків (наприклад, при дослідженні тривимірної моделі серця) необхідно враховувати, що повна зміна внутрішньої структури об’єкта здійснюється приблизно за одну секунду. Тому, якщо ми бажаємо отримати послідовність математичних моделей тривимірного тіла в різні моменти часу, то для кожного з цих моментів часу необхідно виконати великий об’єм роботи. Для ефективного дослідження змін за часом та, зокрема, для прогнозу, очевидно, необхідно аналітичне представлення внутрішньої структури тривимірного тіла.

Враховуючи викладене, актуальною являється задача побудови аналітичної чотиривимірної моделі внутрішньої структури тіла, яка змінюється з часом, на основі томограм в різні моменти часу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Математичні основи томографії були закладені на початку минулого століття в роботах вченого Дж. Радона [2], який розробив теорію перетворення функцій багатьох змінних (перетворення Радона). Відповідно до цих перетворень функцію багатьох змінних можна охарактеризувати не тільки її значеннями в точках багатовимірного простору, але й інтегралами від цієї функції, взятими за нескінченний набір ліній.

Загальний розв’язок задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, заданих на системі трьох груп площин, що перетинаються, був розроблений в роботі [3]. Ця задача була розв’язана з використанням операторів інтерфлетації функцій трьох змінних. Треба відмітити, що оператори інтерфлетації функцій є природним узагальненням операторів інтерполяції функцій трьох змінних. Тому, як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлетація. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – оператори апроксимації. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою поліномів, раціональних функцій, вейвлетів тощо.

У даній статті пропонується метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. В методі проводиться згладжування експериментальних даних у вигляді томограм, заданих на системі взаємно перпендикулярних площин, за допомогою операторів мішаної апроксимації [4], [5].

У статті [6] автори представляють новий алгоритм відновлення в 4D комп’ютерній томографії, який використовує повторення анатомічних структур в різних місцях між сусідніми фазами дихання при віяльній схемі сканування. В даній роботі представляється метод відновлення динамічного тіла при паралельній (найпростішій) схемі сканування.

Мета дослідження

У даній роботі побудуємо оператор мішаної апроксимації функції трьох змінних для створення математичної моделі тривимірного тіла, яке змінюється з часом. В якості експериментальних даних виступають томограми, що поступають з комп’ютерного томографа.

Побудова оператора мішаної апроксимації поліномами Бернштейна для стаціонарного тримірного тіла

У роботі [7] викладена загальна теорія наближення функції трьох змінних

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.19

операторами мішаної апроксимації. Розглянемо цю теорію на прикладі мішаної апроксимації за допомогою поліномів Бернштейна та застосуємо її до розв'язання просторової задачі комп'ютерної томографії.

Визначення. Поліномами Бернштейна (або операторами Бернштейна) степеня n для функції $g(t) \in C[0, 1]$ однієї змінної називають поліноми

$$B_n g(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right), \; C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Класичне узагальнення поліномів Бернштейна для випадку функцій $f(x, y, z), \; (x, y) \in [0, 1]^3$ трьох змінних має вигляд:

$$B_{nms} f(x, y, z) = B1_n B2_m B3_s f(x, y, z) =$$
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\sum_{p=0}^{s} C_n^k C_m^l C_s^p x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{m-l} z^p (1-z)^{s-p} f(x_k, y_l, z_p),$$
$$B1_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f(x_k, y, z); \qquad B2_m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l y^l (1-y)^{m-l} f(x, y_l, z);$$
$$B3_s = \sum_{p=0}^{p} C_p^s z^p (1-z)^{s-p} f(x, y, z_p).$$

Тобто оператор $B1_n$ діє на змінну x, оператор $B2_m$ – на y, а оператор $B3_s$ – на z.

Зауваження. Оператори $B_{nms} f$ використовують $(n+1)(m+1)(s+1)$ значень $f\left(x_k, y_l, z_p\right)$, але $B_{nms} f\left(x_k, y_l, z_p\right) \neq f\left(x_k, y_l, z_p\right), \; k = \overline{0,n}, \; l = \overline{0,m}, \; p = \overline{0,s}$.

Теорема 1. Для залишку наближення функції $f(x, y, z)$ операторами $B_{nms} f(x, y, z)$ виконується рівність:

$$f(x, y, z) - B_{nms} f(x, y, z) = ((I - B1_n) + (I - B2_m) + (I - B3_s) - (I - B1_n)(I - B2_m) -$$
$$-(I - B1_n)(I - B3_s) - (I - B2_m)(I - B3_s) + (I - B1_n)(I - B2_m)(I - B3_s)) f(x, y, z).$$

Це означає, що для функції $f(x, y, z) \in C^{(2,2,2)}[0, 1]^3$, яка має в точці $(c, d, h) \in [0, 1]^3$ неперервні похідні $f^{(2,0,0)}(x, y, z), \; f^{(0,2,0)}(x, y, z), \; f^{(0,0,2)}(x, y, z)$, виконуватиметься співвідношення: $\left|B_{nms} f(c, d, h) - f(c, d, h)\right| = O((\min\{n, m, s\})^{-1}), \; m, n, s \to \infty.$

Припустимо, що $m = n = s$. Тоді отримаємо: $\left|B_{nnn} f(c, d, h) - f(c, d, h)\right| = O(n^{-1}), \; n \to \infty.$

Сформулюємо визначення мішаної апроксимації поліномами Бернштейна. Нехай внутрішня структура тривимірного об'єкта описується функцією *f(x, y, z),* яка повністю розміщена в одиничному кубі $[0, 1]^3$. Та нехай задані три системи паралельних томограм на взаємно перпендикулярних площинах, які отримані за допомогою комп'ютерного томографу. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що ці групи площин паралельні координатним площинам, тобто маємо такі томограми: 1) $\mathrm{T}1_k(y, z) = f(x_k, y, z), \; k = \overline{1,n}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Ox; 2) $\mathrm{T}2_l(x, z) = f(x, y_l, z), \; l = \overline{1,m}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Oy; 3) $\mathrm{T}3_p(x, y) = f(x, y, z_p), \; p = \overline{1,s}$ – томограми, що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Oz.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.19

Визначення. Операторами мішаної апроксимації поліномами Бернштейна називаються оператори вигляду:

$$Of(x,y,z) = (B1_n + B2_m + B3_s - B1_n B2_m - B1_n B3_s - B2_m B3_s + B1_n B2_m B3_s) f(x,y,z),$$

$$B1_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} T1_k(y,z); \quad B2_m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l y^l (1-y)^{m-l} T2_l(x,z);$$

$$B3_s = \sum_{p=0}^{p} C_p^s z^p (1-z)^{s-p} T3_p(x,y),$$

де n, m, s – кількість томограм, що розташовані на площинах, які перпендикулярні вісям Ox, Oy, Oz відповідно.

Теорема 2. Нехай $f \in C^{2,2,2}[0,1]^3$. Тоді для оператора Of виконується асимптотичне співвідношення:

$$f(x,y,z) - Of(x,y,z) = \frac{f^{(2,2,2)}(x,y,z)x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{8nms} + o\left(\frac{1}{nms}\right). \qquad (1)$$

Зауваження. Якщо в (1) покласти $n = m = s$, то $f(x,y,z) - Of(x,y,z) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \; n \to \infty.$

Тобто, оператор Of, у випадку $n = m = s$, має порядок точності відносно змінної n у три рази більший, ніж при наближенні оператором $B_{nms}f$. Звертаємо увагу на те, що оператор $Of(x,y,z)$ потребує для своєї побудови томограми $T1_k, T2_l, T3_p$, тобто сліди наближуваної функції $f(x,y,z)$ на заданих лініях, паралельних осям координат. Таким чином, для оцінки похибки наближення функції $f(x,y,z)$ оператором $Of(x,y,z)$ виконується нерівність: $\|f - Of\|_{C[0,1]^3} = O(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \; \varepsilon_k \to 0, \; k = 1,2,3,$ де $\varepsilon_1 = \|(I - L1_n)f\|_{C[0,1]^3}$, $\varepsilon_2 = \|(I - L2_m)f\|_{C[0,1]^3}$, $\varepsilon_3 = \|(I - L3_s)f\|_{C[0,1]^3}$.

Побудова чотиривимірної математичної моделі динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла.

Нехай функція $f(x,y,z,t)$ описує деяку фізичну характеристику внутрішньої структури (щільність, коефіцієнт поглинання тощо). Джерелом інформації про функцію $f(x,y,z,t)$, тобто про динамічну внутрішню структуру тривимірного тіла, будемо вважати набір площин $\Pi_p : \omega_p(x,y,z) = \alpha_{p1}x + \alpha_{p2}y + \alpha_{p3}z - \gamma_p = \; = 0, \; p = \overline{1,s}$, а також набір томограм, які лежать на цих площинах, у конкретні моменти часу. Для подальшого викладення нам необхідно сформулювати деякі твердження.

Визначення. Слідом функції $f(x,y,z,t_k)$ у момент часу $t_k, \; k = \overline{1,n}$ на площині $\Pi_p : \omega_p(x,y,z) = 0$ будемо називати функцію двох змінних $\varphi_{k,p}(u,v)$, яка в кожній точці цієї площини Π_p набуває таких самих значень, що і функція $f(x,y,z,t_k)$:

$$f_k(x,y,z)\big|_{\Pi_p} = \varphi_{k,p}(u,v), \; k = \overline{1,n}, \; p = \overline{1,s}. \qquad (2)$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.19

Визначення. Інтерфлетацією функції $f(x, y, z, t_k),\ k=\overline{1,n}$ називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x, y, z, t_k),\ k=\overline{1,n}$ в точках між площинами $\Pi_p : \omega_p(x, y, z)=0$ за допомогою її слідів (2) на цих площинах.

Визначення. Томограмою $T_{k,p}(\overline{x})$ (слідом функції $f(x, y, z, t_k)$) на площині $\omega_p(x, y, z)=0$ в момент часу $t_k,\ k=\overline{1,n}$ будемо називати одну з трьох функцій:

$$\mathrm{T}_{k,p}(\overline{x})=\{f(x_p(y,z), y, z, t_k); f(x, y_p(x,z), z, t_k), f(x, y, z_p(x,y), t_k)\}.$$

Як експериментальні дані будемо використовувати: 1) послідовність n моментів часу: $t_1<t_2<...<t_n$; 2) серію s площин, заданих рівняннями $\Pi_p : \omega_p(x, y, z)=a_{p1}x+a_{p2}y+a_{p3}z-\gamma_p=0,\ p=\overline{1,s}$; 3) томограми тривимірного об'єкта $T_{kp}, k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,s}$, які лежать на заданих площинах Π_p , в задані моменти часу $t=t_k,\ k=\overline{1,n}$.

Спочатку побудуємо n тривимірних математичних моделей $f_k(x, y, z),\ k=\overline{1,n}$ об'єкта $f(x, y, z, t)$ для кожного з моментів часу $t=t_k, k=\overline{1,n}.$ Отже, є функція $f_k(x, y, z)$, яка в точках площини Π_p в k-й момент часу збігається із зображенням p-ї томограми. Для побудови таких функцій можуть бути використані: 1) оператори сплайн-інтерфлетації; 2) оператори мішаної апроксимації, які були побудовані раніше. У випадку 1) побудовані тривимірні математичні моделі $f_k(x, y, z),\ k=\overline{1,n}$ об'єкта $f(x, y, z, t)$ для кожного з моментів часу $t=t_k,\ k=\overline{1,n}$ мають задовольняти властивості: $f(x, y, z, t_k)\big|_{\Pi_p}=f_k(x, y, z)\big|_{\Pi_p}=T_{k,p}(\overline{x}).$

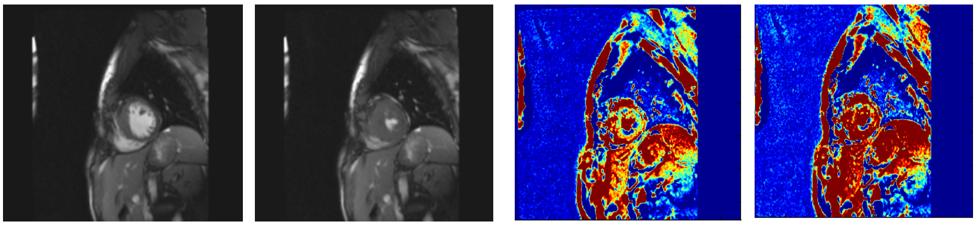
При цьому, якщо експериментальні дані задані точно, то можна використовувати метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетації функцій. Якщо ж експериментальні дані задано з похибкою, то можна використовувати метод розв'язання задач тривимірного комп'ютерної томографії за допомогою мішаної апроксимації. Згадані методи відновлення внутрішньої структури тіла вирізняються високою точністю.

Після побудови тривимірних моделей $f_k(x, y, z),\ k=\overline{1,n}$ будуємо чотиривимірну модель $F(x, y, z, t)$, використовуючи метод інтерполяції за змінною t у вигляді формули: $F(x, y, z, t)=\sum_{k=1}^{n} h_k(t) f_k(x, y, z)$, де $h_p(t)$ – допоміжні функції від однієї змінної t з властивостями: $h_k(t_q)=\delta_{kq}$, $k,q=\overline{1,n}$, δ_{kq} – символ Кронекера.

Зазначимо, що задача в такій постановці немає єдиного розв'язку. Але при певних обмеженнях на клас функцій, вона буде мати єдиний розв'язок. Більш того, для деяких класів наближуваних функцій $f(x, y, z, t)$ можна оцінити похибку наближення.

Було виконано обчислювальний експеримент для відновлення внутрішньої структури серця людини, яка змінюється з часом. Маємо 25 груп томограм. У кожній групі представлені томограми, зроблені в один певний момент часу, в дев'яти перетинах (тобто в кожній групі по 9 томограм). На рис. 1а) і 1б) показано приклади томограм у різні моменти часу в площині x = 0.5, а на рис. 1в) і 1г) відновлене нашим методом зображення серця в площині x = 0.6 в різні моменти часу.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.19



а) б) в) г)

Рис. 1. Зображення томограм: а), б) експериментально заданих в площині $x = 0.5$ в різні моменту часу; в), г) наближено отриманих викладеним методом в площині $x = 0.6$ в різні моменти часу

Висновки

У роботі запропонований новий метод побудови чотиривимірної математичної моделі тривимірного тіла, що змінюється з часом, з використанням операторів інтерполяції або апроксимації за змінною часу t. Отримана 4D модель може бути використана не тільки для знаходження зображення об'єкту в заданому перерізі у фіксований момент часу, який не співпадає з експериментально заданими значеннями часу, але і для аналізу течії хвороби шляхом дослідження поведінки функції чотирьох змінних в залежності від часу та від просторових координат.

Список використаної літератури

1. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій. *Доповіді НАНУ*. 2005. №1. С. 20-24.
2. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Manningfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl*. 1917. Vol. 69. P. 262 – 277.
3. Першина Ю. И., Шилін О. В. Чисельна реалізація методу відновлення внутрішньої структури 3D тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функцій. *Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Харків: НТУ «ХПІ», 2017. № 6 (1228). С. 105 –111.
4. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням мішаної апроксимації. *Матеріали другої міжнародної конференції «Теорія та методи обробки сигналів»*. 2008. С. 85–86.
5. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функції. *Доповіді НАНУ*. 2005. №8. С. 67-71.
6. Jia X., Lou Y., Dong B. 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention: proceedings of the conference*. *Part I*. 2010. P. 143 – 150.
7. Литвин О.Н., Першина Ю.И., Сергиенко И.В. Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы). *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 4. С. 126–134.

References

1. Lytvyn, O.M. & Pershyna, Yu.I. (2005). Matematychna model vidnovlennia vnutrishnoi struktury tryvymirnoho obiekta za vidomymy yoho tomohramamy z vykorystanniam interfletatsii funktsii. *Dopovidi NANU*. **1**, 20-24.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.19

2. Radon, J. (1917) Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Manningfaltigkeiten. *Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl*. **69**, 262 – 277.
3. Pershyna, Yu. Y. & Shylin, O. V. (2017). Chyselna realizatsiia metodu vidnovlennia vnutrishnoi struktury 3D tila za vidomymy yii tomohramamy na systemi dovilnykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsii funktsii. *Visnyk NTU «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats. Seriia : Matematychne modeliuvannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh*. Kharkiv: NTU «KhPI». **6**(1228), 105 – 111.
4. Lytvyn, O.M. & Pershyna, Yu.I. (2008). Matematychne modeliuvannia v kompiuternii tomohrafii z vykorystanniam mishanoi aproksymatsii. *Materialy druhoi mizhnarodnoi konferentsii «Teoriia ta metody obrobky syhnaliv»*. 85–86.
5. Lytvyn, O.M. & Pershyna, Yu.I. (2005). Matematychna model vidnovlennia tryvymirnykh obiektiv za yikh tomohramamy na systemi trokh hrup pererizanykh ploshchyn z vykorystanniam interfletatsii funktsii. *Dopovidi NANU*. **8**, 67-71.
6. Jia, X., Lou, Y. & Dong, B. (2010). 4D Computed Tomography Reconstruction from Few-Projection Data via Temporal Non-local Regularization. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention: proceedings of the conference, Part I*. 143 – 150.
7. Litvin, O.N., Pershyna, I.I. & Sergienko, I.V. (2014). Vosstanovlenie razryivnyih funktsiy dvuh peremennyih, kogda linii razryiva neizvestnyi (pryamougolnyie elementyi). *Kibernetika i sistemnyiy analiz* . **4**, 126–134.

Першина Юлія Ігорівна – д.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», e-mail: yuliapershina78@gmail.com , ORCID: 0000-0002-4719-8195.

Пасічник Валентина Олексіївна – к.т.н., доцент, завідувач кафедри «Дизайн тканин та одягу» Харківської державної академії дизайну і мистецтв, e-mail: pasechnik.va@gmail.com ORCID: 0000-0003-1988-9914.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2021.4.1.19