

УДК 519.711-519.6

А. В. УСОВ, М. В. КУНИЦІН, Ю. Є. СІКІРАШ  
Державний університет «Одеська політехніка»**МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ГЕТЕРОГЕННОЇ СТРУКТУРИ СПЛАВІВ НА ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ НА ФІНІШНИХ ОПЕРАЦІЯХ**

*У роботі запропоновано моделювання термомеханічних явищ, які формуються у виробках на фінішних операціях і впливають на якість поверхневого шару з урахуванням спадкових неоднорідностей, сформованих на попередніх технологічних операціях, встановлення впливу їх на тріцино- і припікоутворення на основі кількісного аналізу теплового і напруженого стану і з урахуванням гетерогенності матеріалу виробів. Коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_I$ ,  $K_{II}$  і  $K_{III}$  служать мірою сингулярності напружень біля вершини тріциноподібного дефекту. Коли навантаження призводить до того, що інтенсивність напружень стає рівною критичній, то тріциноподібний дефект перетворюється в магістральну тріцину. В умовах нерівномірного нагріву в поверхневому шарі виникають напруження, які при наявності в тілі тріциноподібних дефектів можуть привести до їх розповсюдження навіть при відсутності зовнішніх механічних навантажень. Встановлено, що на величину коефіцієнтів інтенсивності напружень для дефектів типу тріцини впливають розміри і орієнтація цих дефектів, глибина їх залягання і взаємне розташування в поверхневому шарі, величина теплового потоку, який діє на оброблювану поверхню. Для будь-яких коефіцієнтів теплопровідності, лінійного температурного розширення і модулів зсуву матриці і включення показано зміни коефіцієнтів інтенсивності напружень ( $K_{IN}$ ), якщо тепловий потік спрямований перпендикулярно тріцині, яка знаходиться у включенні, і навпаки, якщо паралельно тріцині. Розглянуті геометрія і властивості включень, які можуть створювати умови, як для гальмування так і для розвитку шліфувальних тріцини. Якщо тепловий потік направлений паралельно більшій осі еліптичного включення і прямолінійній термоізолюваній тріцині, то при температурному коефіцієнті лінійного розширення (ТКЛР) включення більшому, ніж в основному матеріалі виробу, збільшення жорсткості включення призводить до зростання коефіцієнтів інтенсивності напружень для різних коефіцієнтів теплопровідності складових матеріалу. Це призводить до розвитку мікротріцини. І навпаки, якщо ТКЛР включення менше, ніж у основного матеріалу, зменшення жорсткості включення призводить до зниження коефіцієнтів інтенсивності напружень  $K_I$  ( $K_{II} = 0$ ) для тих же коефіцієнтів теплопровідності, тобто є сприятливі умови для нерозповсюдження мікротріцини.*

*Ключові слова: моделювання, термомеханічні процеси, дефекти, коефіцієнт інтенсивності напружень, утворення тріцини, поверхневий шар, неоднорідність.*

А. В. УСОВ, М. В. КУНИЦЫН, Ю. Е. СИКИРАШ  
Государственный университет «Одесская политехника»**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕТЕРОГЕННОЙ СТРУКТУРЫ СПЛАВОВ НА ОБЕСПЕЧЕНИЕ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ НА ФИНИШНЫХ ОПЕРАЦИЯХ**

*В работе предложено моделирование термомеханических явлений, формирующихся в изделиях на финишных операциях и влияющих на качество поверхностного слоя с учетом наследственных неоднородностей, сформированных на предшествующих технологических операциях, установление влияния их на трещино- и прижогаобразование на основе количественного анализа теплового и напряженного состояния и с учетом гетерогенности материала изделий. Коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $K_{III}$  служат мерой сингулярности напряжений у вершины трещиноподобного дефекта. Когда нагрузка приводит к тому, что интенсивность напряжений становится равной критической, то трещиноподобный дефект превращается в магистральную трещину. В условиях неравномерного нагрева в поверхностном слое возникают напряжения, которые при наличии в теле трещиноподобных дефектов могут привести к их распространению даже при отсутствии внешних механических нагрузок. Установлено, что на величину коэффициентов интенсивности напряжений для дефектов типа трещин оказывают влияние размеры и ориентация этих дефектов, глубина их залегания и взаимное расположение в поверхностном слое, величина теплового потока, действующего на обрабатываемую поверхность. Для любых коэффициентов теплопроводности, линейного температурного расширения и модулей сдвига матрицы и включения*

показаны изменения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), если тепловой поток направлен перпендикулярно трещине, находящейся во включении, и наоборот, если параллельно трещине. Рассмотрены геометрия и свойства включений, которые могут создавать условия как для торможения, так и для развития шлифовочных трещин. Если тепловой поток направлен параллельно большей оси эллиптического включения и прямолинейной термоизолированной трещине, то при температурном коэффициенте линейного расширения (ТКЛР) включения больше, чем у матрицы, увеличение жесткости включения приводит к возрастанию коэффициентов интенсивности напряжений для различных отношений коэффициентов теплопроводности составляющих материала. Это приводит к развитию микротрещины. И наоборот, если ТКЛР включения меньше, чем у матрицы, уменьшение жесткости включения приводит к снижению коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$  ( $K_{II} = 0$ ) для тех же отношений коэффициентов теплопроводности, т.е. имеются благоприятные условия для нераспространения микротрещин.

Ключевые слова: моделирование, термомеханические процессы, дефекты, коэффициент интенсивности напряжений, трещинообразование поверхностный слой, неоднородность.

A. V. USOV, M. V. KUNITSYN, Y. E. SIKIRASH  
Odessa Polytechnic State University

## MODELING THE INFLUENCE OF THE HETEROGENEOUS STRUCTURE OF ALLOYS ON PROVIDING QUALITATIVE CHARACTERISTICS OF THE SURFACE LAYER IN FINISHING OPERATIONS

The paper proposes modeling thermomechanical phenomena that form in products at finishing operations and affecting the quality of the surface layer, taking into account hereditary inhomogeneities formed in previous technological operations, establishing their influence on cracking and scallop formation based on a quantitative analysis of the thermal and stress state and taking into account heterogeneity material of products. The stress intensity coefficients  $K_I$ ,  $K_{II}$  i  $K_{III}$  serve as a measure of the stress singularity at the apex of the crack-like defect. When the load leads to the fact that the stress intensity becomes equal to the critical, the crack-like defect turns into the main crack. Under conditions of uneven heating in the surface layer, there are stresses, which in the presence of cracked defects in the body can lead to their spread even in the absence of external mechanical loads. It was found that the size and orientation of these defects, the depth of their occurrence and their relative position in the surface layer, and the magnitude of the heat flux acting on the treated surface affect the value of the stress intensity factors for defects such as cracks. For any coefficients of thermal conductivity, linear thermal expansion, and shear moduli of the matrix and inclusion, changes in stress intensity factors (SIF) are shown if the heat flux is directed perpendicular to the crack in the inclusion, and vice versa, if parallel to the crack. The geometry and properties of inclusions, which can create conditions for retardation and the development of grinding cracks, are considered. Suppose the heat flux is directed parallel to the greater axis of the elliptical inclusion and a rectilinear thermally insulated crack. In that case, when the temperature coefficient of linear expansion (TCLE) of the inclusion is greater than that of the matrix, an increase in the stiffness of the inclusion leads to an increase in the stress intensity factors for different ratios of the thermal conductivity coefficients of the material constituents. It leads to the development of microcracks. Furthermore, vice versa, if the TLEC of the inclusion is less than that of the matrix, a decrease in the stiffness of the inclusion leads to a decrease in the stress intensity factors  $K_I$  ( $K_{II} = 0$ ) for the exact ratios of the thermal conductivity coefficients, i.e., there are favorable conditions for the non-proliferation of microcracks. The presence of a rigid inclusion in the case of a power load leads to an increase, and in the case of a thermal one, to a decrease in the  $K_I$  value.

Keywords: modeling, thermomechanical processes, defects, stress intensity factor, cracking surface layer, heterogeneity.

### Постановка проблеми

Встановлення зв'язків між найважливішими експлуатаційними властивостями деталей (зносостійкість, втомна і тривала міцність, контактна жорсткість, магнітні властивості та ін.) і технологічними параметрами — мікрорельєфом обробленої поверхні, мікротвердістю, наявністю микротріщин, відколів, глибиною поширення зміцненого шару є однією з найважливіших задач технології машинобудування [1], [2], [3], [4].

Вивчення впливу тільки механічної обробки на експлуатаційні властивості виробів є недостатнім, так як попередні види обробок (термічна, термомеханічна,

хіміко-термічна й ін.) і, особливо, способи отримання заготовок, вносять істотний внесок у зміну властивостей поверхневого шару, що піддається надалі механічній обробці [5, 6].

Розробка моделей технологічної спадковості є основою нового наукового і практичного спрямування в технології машинобудування, що має на меті підвищення експлуатаційних якостей деталей машин технологічними методами в самому процесі виготовлення деталей.

Складність процесів, що протікають у металі приповерхневого шару, схильного до тріщиноутворення при механічній обробці, а також при експлуатації цих деталей, робить необхідним розгляд проблеми технологічної спадковості тільки на операції кінцевої обробки.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Найбільш поширеним методом кінцевої обробки є шліфування, що забезпечує високу точність і високу продуктивність виготовлення деталей [7, 8].

Але із застосуванням шліфування пов'язана поява в поверхневих шарах деталей припиків, тріщин, розтягуючих напружень, які значно впливають на надійність і довговічність цих деталей у процесі їх експлуатації [9, 10].

Методи, що використовуються при існуючій технології виготовлення, в тому числі, й у зв'язку з появою композиційних матеріалів, не дозволяють повністю виключити дефекти, що виникають у поверхневому шарі. Цьому сприяють: неминучі коливання припуску від похибок попередніх операцій механічної обробки; макронеоднорідність самого матеріалу, що характеризується величиною зерна, дефектами упаковки, дислокаціями і структурними перетвореннями, порушенням прецизійності деталей при термічній і їй подібній обробці, недостатньо вивчені термомеханічні явища, які супроводжують процес шліфування і внаслідок яких на оброблюваних поверхнях з'являються припики, мікротріщини, структурні перетворення, залишкові напруження.

Висока теплова напруженість процесів алмазно-абразивної обробки призводить до того, що теплофізика цих процесів часто є домінуючою у формуванні якісних характеристик обробленої поверхні [11-12].

Відсутність досліджень щодо особливостей процесу зародження шліфувальних тріщин, їх формуванні в магістральні залежно від конструктивних, технологічних параметрів і структурних неоднорідностей матеріалу виробів не дозволяють однозначно користуватися наявними рекомендаціями щодо усунення розглянутих дефектів.

**Метою даної роботи** є моделювання термомеханічних явищ, які формуються у виробках на фінішних операціях і впливають на якість поверхневого шару з урахуванням попередніх видів обробки виробів і спадкових неоднорідностей, сформованих на попередніх технологічних операціях, встановлення впливу їх на тріщино- і припикоутворення на основі кількісного аналізу теплового й напруженого стану і з урахуванням гетерогенності матеріалу виробів.

### Основний зміст роботи

Коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_I$ ,  $K_{II}$  і  $K_{III}$  служать мірою сингулярності напружень біля вершини тріщиноподібного дефекту. Критичне значення інтенсивності напружень  $K_c$  є характеристикою матеріалу. Коли навантаження призводить до того, що інтенсивність напружень стає рівною критичній, то тріщиноподібний дефект перетворюється в магістральну тріщину. Критичне напруження обернено пропорційне квадратному кореню з початкової довжини тріщиноподібного дефекту [13]:

$$\sigma_c = \frac{K_1 c}{\sqrt{\pi l}}, \quad (1)$$

де  $l$  – початкова довжина тріщиноподібного дефекту, а індекс 1 – означає перший тип руйнування.

Розглянемо задачу про визначення напружено-деформованого стану кусково-однорідного виробу, верхній шар якого містить тонкі включення і тріщиноподібні дефекти. На ділянці  $(-a, a)$  оброблюваної поверхні виділяється тепловий потік, а за її межею реалізується тепловий обмін за законом Ньютона.

В умовах нерівномірного нагріву в поверхневому шарі виникають напруження, які при наявності в тілі тріщиноподібних дефектів можуть привести до їх розповсюдження, навіть при відсутності зовнішніх механічних навантажень.

Нехай у поверхневому шарі виробів на лініях  $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = 0, \dots, \tilde{x}_k = 0$  є дефекти  $|\tilde{y}_1| < l_1, |\tilde{y}_2| < l_2, \dots, |y_k| < l_k$ , при переході через які виникають розриви поля зміщень і напружень. Надалі будемо розглядати систему дефектів із 2-х тріщин ( $k = 1, 2$ ), розташованих у локальних координатах відповідно  $\tilde{x}_1 o_1 \tilde{y}_1$  ( $k = 1$ ) і  $\tilde{x}_2 o_2 \tilde{y}_2$  ( $k = 2$ ). На рис. 1 представлена розрахункова схема для визначення впливу дефектів на утворення тріщин при термічному навантаженні.

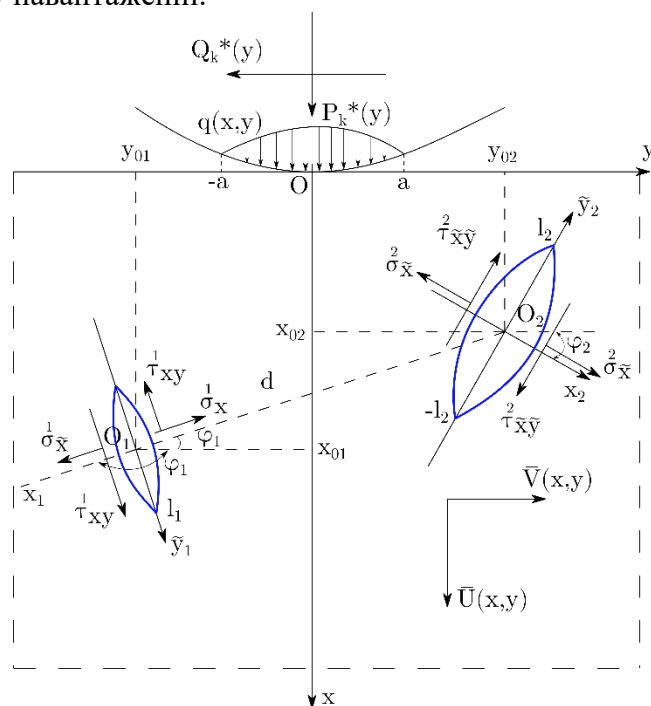


Рис. 1. Розрахункова схема для визначення взаємного впливу дефектів на інтенсивність утворення тріщин оброблюваної поверхні від термомеханічного навантаження, що формується при шліфуванні

Введемо в розгляд скачки зсувів і напружень на дефектах:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{V}_k(\tilde{y}) \rangle &= \tilde{V}_k(-0, \tilde{y}) - \tilde{V}_k(+0, \tilde{y}); \langle \sigma_x^k(\tilde{y}) \rangle = \sigma_x^k(-0, \tilde{y}) - \sigma_x^k(+0, \tilde{y}); \\ \langle \tilde{U}_k(\tilde{y}) \rangle &= \tilde{U}_k(-0, \tilde{y}) - \tilde{U}_k(+0, \tilde{y}); \langle \tau_{xy}^k(\tilde{y}) \rangle = \tau_{xy}^k(-0, \tilde{y}) - \tau_{xy}^k(+0, \tilde{y}). \end{aligned} \quad (2)$$

За умовами (2) на дефектах типу тріщин скачки нормальних і дотичних напружень дорівнюють нулю, тобто  $\langle \sigma_x^k(y) \rangle = 0, \langle \tau_{xy}^k(y) \rangle = 0$ . Переміщення  $\tilde{U}_k(\tilde{x}, \tilde{y}), V_k(\tilde{x}, \tilde{y}), \theta_k(\tilde{x}, \tilde{y})$  повинні задовольняти рівнянням Ламе [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\theta}'}{1-2\mu} + \Delta\tilde{U}_k &= b^T T', \\ \frac{\tilde{\theta}'}{1-2\mu} + \Delta\tilde{V}_k &= b^T T', \\ \theta_k = \tilde{U}'_k + \tilde{V}'_k, b^T &= \frac{4G(1+\mu)dt}{1-2\mu}. \end{aligned} \tag{3}$$

Використовуючи перетворення Треффца [13] в трансформанті Фур'є за змінною у зміщення  $\theta_k(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $\tilde{V}_{\beta k}(\tilde{x})$ , і напруження  $\sigma_{\tilde{x}\beta}^k(\tilde{x}), \tau_{\tilde{x}\beta}^k(\tilde{x}), \sigma_{\tilde{x}\beta}^k(\tilde{x}) = \sigma_{y\beta}^k(\tilde{x})\tilde{y}$  можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\beta,k}(\tilde{x}) &= \Psi_{1\beta}^k + \tilde{x}\Psi'_{0\beta} = \langle \Psi'_{1\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \Psi_{1\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \tilde{x}\Psi'_{0\beta} = \\ &= \frac{(3-4\mu)\langle \sigma_{x\beta}^k \rangle - (1-2\mu)i\beta}{2(1-\mu)} \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \tilde{U}_{\beta,k} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \tilde{x}\Psi'_{0\beta}; \\ \sigma_{x\beta}^k(\tilde{x}) &= (1-2\mu) \left[ \langle \Psi_{1\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \Psi_{0\beta} \rangle \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \Phi_{\beta}(\tilde{x}) \right] + \langle \Psi_{1\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \langle \Psi_{1\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) \right] + \tilde{x} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left[ \langle \Psi'_{1\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \Psi_{0\beta} \rangle \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) \right]; \\ \tilde{U}_{\beta,k}(\tilde{x}) &= \Psi_{2\beta}^k - i\beta\tilde{x}\Psi'_{0\beta} = \langle \Psi'_{2\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \Psi_{2\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) - i\beta\tilde{x}\Psi'_{0\beta} = \\ &= \frac{(3-4\mu)\langle \tau_{\beta}^k \rangle - i\beta(1-2\mu)\langle \tilde{U}_{\beta,k} \rangle}{2(1-\mu)} \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \langle \tilde{V}_{\beta,k} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + i\beta\tilde{x}\Psi'_{0\beta}; \\ \tau_{x\beta}^k(\tilde{x}) &= \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} i\beta \langle \sigma_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \\ + \frac{\tilde{x}}{2(1-\mu)} &\left[ \beta^2 \langle \tilde{V}_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + i\beta \langle \sigma_{\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + i\beta \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (\langle \tilde{U}_{k,\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x})) + \beta \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} (\langle \sigma_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x})) \right] + \\ &+ \langle \tau_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \frac{\langle \tilde{V}_{k,\beta} \rangle}{2(1-\mu)} \beta^2 \Phi_{\beta}(\tilde{x}); \\ \sigma_{\beta}^k(\tilde{x}) &= \frac{-\mu i\beta}{1-\mu} \langle \tilde{V}_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \frac{\mu}{1-\mu} \langle \sigma_{\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) + \\ + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} &[\langle U_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x})] - \frac{\mu i}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} [\langle \tau_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x})] - \frac{i\beta(\tau-\mu)}{2(1-\mu)} \langle \tau_{\beta}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \\ + \frac{\beta^2(1-2\mu)}{2(1-\mu)} &\langle \tilde{U}_{k,\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) - i\beta \langle \tilde{V}_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) - \frac{\beta^2 \tilde{x} i\beta}{2(1-\mu)} \langle \tilde{U}_{k,\beta} \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \\ + \frac{\beta^2 \tilde{x}}{2(1-\mu)} &\langle \sigma_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi_{\beta}(\tilde{x}) + \frac{\beta^2 \tilde{x}}{2(1-\mu)} \langle \tilde{U}_{k,\beta} \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}) - \frac{i\beta \tilde{x}}{2(1-\mu)} \langle \tau_{\tilde{x}\beta}^k \rangle \Phi'_{\beta}(\tilde{x}). \end{aligned} \tag{5}$$

У наведених виразах  $\Phi_\beta(\tilde{x}) = \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha = \frac{e^{-|\beta x|}}{2|\beta|}$  – фундаментальна функція.

Повертаючись до оригіналів, розривні розв’язки для напружень в локальних координатах  $\tilde{x}_K O_K \tilde{y}_K$  через похідні стрибків зміщення  $\langle \tilde{U}'_k(\tilde{y}) \rangle$  й  $\langle \tilde{V}'_k(\tilde{y}) \rangle$  будуть мати вигляд:

$$\sigma_{\tilde{x}}^k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle \frac{(\tilde{y}-r)[(4\mu-3)((\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2) - \tilde{x}^2]}{[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} dr - \frac{\tilde{x}}{4\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle \frac{((\tilde{y}-r)^2 - \tilde{x}^2)}{[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} dr; \tag{6}$$

$$\tau_{\tilde{x}}^k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{-\tilde{x}}{4\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle \frac{((\tilde{y}-r)^2 - \tilde{x}^2)}{[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} dr - \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle \frac{(\tilde{y}-r)^3}{[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} dr;$$

$$\sigma_y^k(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle \left\{ \frac{(\tilde{y}-r)}{4\pi[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} \left( 1 + \frac{\tilde{x}^2}{(1-\mu)[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2]^2} \right) \right\} dr + \frac{1}{2\pi(1-\mu)} \int_{-e_k}^{e_k} \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle \left\{ (1+\mu)\tilde{x}l_n[(\tilde{y}-r)^2 + \tilde{x}^2] + \frac{\tilde{x}[\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-r)^2]^2}{2[\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-r)^2]^2} \right\} dr.$$

Компенсуючі напруження знайдемо наступним чином. Розривні розв’язки (1)-(4) представимо в глобальних координатах і, вважаючи  $x = 0$ , знайдемо напруження на границі.

Вони будуть дорівнювати:

$$\sigma_x^k(0, y) = \int_{-e_k}^{e_k} \left[ \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle R_1^k(y, r) + \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle N_1^k(y, r) \right] dr = P_k^*(y); \tag{7}$$

$$\tau_{xy}^k(0, y) = \int_{-e_k}^{e_k} \left[ \langle \tilde{U}'_k(r) \rangle R_2^k(y, r) + \langle \tilde{V}'_k(r) \rangle N_2^k(y, r) \right] dr = q_k^*(y). \tag{8}$$

Тут  $R_j^k(x, y)$ ,  $N_j^k(y, z)$  ядра ( $k = 1, 2$ ) характеризують заміну координат (локальні  $\tilde{x}_K O_K \tilde{y}_K$  в глобальні  $XOY$  і вирази компонент напружень у глобальних координатах. Беручи в якості граничних ( $x = 0$ ) умови:

$$\sum_{k=1}^2 \sigma_x^k(0, y) = -P_k^*(y) = \sigma_x(0, y), \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^2 \tau_{xy}^k(0, y) = -q_k^*(y) = \tau_{xy}(0, y), \tag{10}$$

можна знайти напружений стан поверхневого шару.

Термопружні напруження, що формуються в оброблюваному виробі від дії теплового потоку  $q(y, t)$ , що діють на границі  $x = 0$ , у зоні контакту  $|y| < a$  і теплообміном за законом Ньютона-Рихмана  $\lambda \delta T / \delta x + \gamma T = 0$ , поза цією зоною, тобто  $|y| > a$  знайдемо з розв'язку завдання (1) (окремий випадок  $k = 0$ ,  $0 \leq x < \Delta$ ). У глобальних координатах ці напруження подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{III}(x, y) = & \frac{2\alpha_1(x^2 - y^2)}{\pi[x^2 + y^2]^2} - \frac{2\alpha_2 y(3x^2 - y^2)}{\pi[x^2 + y^2]^3} + \frac{(\alpha_3 - x\alpha_4) 2x(x^2 - 3y^2)}{\pi [x^2 + y^2]^3} - \\ & - \frac{x\alpha_5}{\pi} \frac{\Gamma(4)\cos\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{[x^2 + y^2]^2} + \frac{b^T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-i\beta y} [T''_{\beta}(\xi)\Phi_{\beta}(x - \xi) + \\ & + T'_{\beta}(\xi)\Phi'_{\beta}(x - \xi) - \lambda^2 \beta^2 T_{\beta}(\xi)\Phi_{\beta}(x - \xi)] d\xi d\beta; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{III}(x, y) = & \frac{\gamma_1 2xy}{\pi[x^2 + y^2]^2} - \frac{\gamma_2 x(x^2 - 3y^2)}{\pi[x^2 + y^2]^3} + \frac{\gamma_3 y(3x^2 - y^2)}{\pi [x^2 + y^2]^3} - \\ & - \frac{\gamma_4 x}{\pi} \frac{\Gamma(4)\sin\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{[x^2 + y^2]^2} - \\ & - \frac{b^T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-i\beta y} [2T'_{\beta}(\xi)\Phi_{\beta}(x - \xi) + T_{\beta}(\xi)\Phi'_{\beta}(x - \xi)] d\xi d\beta; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{III}(x, y) = & \frac{b_1}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{[x^2 + y^2]^2} - \frac{b_2 + b_3 x x(x^2 - 3y^2)}{\pi [x^2 + y^2]^3} + \frac{b_4 x \Gamma(4)\cos\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{[x^2 + y^2]^2} - \\ & - \frac{b^T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \beta^2 e^{-i\beta y} T_{\beta}(\xi)\Phi_{\beta}(x - \xi) d\xi d\beta. \end{aligned} \tag{13}$$

У знайдених розв'язках для нормальних  $\sigma_x^{II}(x, y)$ ,  $\sigma_x^{III}(x, y)$  і дотичних  $\tau_{xy}^{II}(x, y)$ ,  $\tau_{xy}^{III}(x, y)$  напружень в локальних координатах використаємо очевидні умови:

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \left[ \sigma_{\tilde{x}}^I(\tilde{x}, \tilde{y}) + \sigma_{\tilde{x}}^{II}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \sigma_{\tilde{x}}^{III}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right] &= 0, \\ \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \left[ \tau_{\tilde{x}y}^I(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tau_{\tilde{x}y}^{II}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tau_{\tilde{x}y}^{III}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right] &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Із системи інтегральних рівнянь (15) знаходимо стрибки напружень  $\langle \sigma_x^K(y) \rangle$  і  $\langle \tau_x^K(y) \rangle$  ( $K = 1, 2$ ), якщо в якості дефектів розглядаються два включення, фізичні

властивості яких відрізняються від властивостей матриці, мають різні пружні постійні  $E_i$ ,  $\mu_i$  і температурні коефіцієнти лінійного розширення  $\alpha_i^t$ ):

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\langle \sigma_x^1(r) \rangle}{y-r} dr + \sum_{k=1}^2 \int_{-l_k}^{l_k} [\langle \sigma_x^k(r) \rangle L_k^{(1)}(d^*, y-r) + \langle \tau_{xy}^k(r) \rangle N_k^{(1)}(d^*, y-r)] dr = F_1^*;$$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\langle \tau_{xy}^1(r) \rangle}{y-r} dr + \sum_{k=1}^2 \int_{-l_k}^{l_k} [\langle \sigma_x^k(r) \rangle L_k^{(2)}(d^*, y-r) + \langle \tau_{xy}^k(r) \rangle N_k^{(2)}(d^*, y-r)] dr = F_2^*;$$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\langle \sigma_x^2(r) \rangle}{y-r} dr + \sum_{k=1}^2 \int_{-l_k}^{l_k} [\langle \sigma_x^k(r) \rangle L_k^{(1)}(d^*, y-r) + \langle \tau_{xy}^k(r) \rangle N_k^{(1)}(d^*, y-r)] dr = F_3^*;$$

$$\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\langle \tau_{xy}^2(r) \rangle}{y-r} dr + \sum_{k=1}^2 \int_{-l_k}^{l_k} [\langle \sigma_x^k(r) \rangle L_k^{(2)}(d^*, y-r) + \langle \tau_{xy}^k(r) \rangle N_k^{(2)}(d^*, y-r)] dr = F_4^*.$$
(15)

Тут  $d^*$  – параметр, що характеризує теплофізичні й механічні властивості матриці та включень.

Розв’язок сингулярних інтегралів із ядрами Коші зводиться методом ортогональних многочленів до розв’язку систем алгебраїчних рівнянь. Остаточно розв’язки систем (17)-(18) щодо стрибків зміщень і напружень матимуть вигляд:

$$\| \langle \tilde{U}' \rangle, \langle \tilde{V}' \rangle, \langle \sigma_x \rangle, \langle \tau_{xy} \rangle \| = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left[ \Gamma_k + \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} T_m(t) \sum_{v=1}^N g_{kv}^* T_m(\tau_v) \right], \quad (16)$$

де  $T(t)$  – многочлени Чебишева.

Для фіксованих параметрів нашої задачі кількість вузлів  $N$  вибираємо непарним, так як у цьому випадку середній вузол є нерухомим і аналіз значень шуканих функцій у цьому вузлі дасть додаткову інформацію про збіжність процесу [13].

Отже, скачки (16) знайдені, і поля напружень і зсувів у поверхневому шарі виробів можна визначати за формулами:

$$\| \sigma_x, \tau_{xy}, U', V' \| = \sum_{i=1}^n \int_{-l_i}^{l_i} \| R_i^{(m)}(x-\xi, y) \| P^{(i)}(\xi) d\xi;$$



$$\begin{aligned}
 R_i^m(x, y) &= -(\alpha_i)^m V_i^{(m)} \left[ K_n^{(S_i-m)} \right], m = 0, 1; \\
 K_n^{(1)}(x, y) &= \frac{(-sgny)^n x}{4\pi(x^2 + y^2)} \left[ \frac{2y^2}{x^2 + y^2} - (n - 1) \right]; \\
 K_n^{(0)}(x, y) &= \frac{(-sgny)^n |y|}{4\pi(x^2 + y^2)} \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - (n - 1) \right], n = 0, 1, 2 \dots \\
 (\alpha_i)^m R_i^m(x, y) &= C_i V_i^{(m)} \left[ K_n^{(S_i-m)} \right] - [C_i + \alpha_i(C_i + d)] V_i^{(m-2)} \left[ K_n^{(S_i-m)} \right]; \\
 S_i &= \sin^2 \frac{1}{2k\pi}; C_i = \frac{1 - \mu_i^2}{E_i}; d_i = \frac{\mu_i (1 + \mu_i)}{E_i}; \\
 P^{(0)}(y) &= \langle \sigma_x(0, y) \rangle, P^{(1)}(y) = \langle \tau_{xy}(0, y) \rangle, -P^{(2)}(y) = \langle \tilde{U}'(0, y) \rangle; \\
 -P^{(3)}(y) &= \langle \tilde{V}'(0, y) \rangle, P^{(j)}(x) \equiv 0, |y| > l_k, j = \overline{0, 3}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Найбільший інтерес представляє поведінка напружень  $\sigma x(o, y) + i\tau xy(o, y)$  при  $y \rightarrow lK \pm 0$ . Ці напруження і визначають характер коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН):  $K_I - iK_{II}$ .

Розглянемо випадок дефекту типу тріщини довжиною  $2l$ , що розміщена в поверхневому шарі товщиною  $2h$  і довільно орієнтованого. Напружений стан поверхневого шару обумовлено збуренням близько тріщини заданого температурного поля  $Tq(x, y, \tau)$ . Якщо температурне поле описується функцією  $To(x, y, \tau) = q(\tau)(y \cos \beta + x \sin \beta)$ , то для визначення КІН маємо формулу:

$$\begin{aligned}
 K_I^\pm - iK_{II}^\pm &= \mp i \frac{\sqrt{\pi l} H q l}{\lambda} \sin(\beta - \phi) \left[ 1 - \frac{\delta^2}{2} (\alpha_1 - N_{11}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\delta^4}{4} \left[ d_2 + \frac{3}{2} d_3 - d_1 N_{11} - N_{11}^2 + N_{31} \right] + 0(\delta^6) \right],
 \end{aligned} \tag{18}$$

де  $\beta$  – кут між напрямком теплового потоку і віссю  $Oy$ ;  $\phi$  – кут між віссю дефекту і віссю  $Ox$ ;  $\delta = \frac{l}{h}$  – безрозмірна ширина смуги:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -(i \sin 2\phi + e^{-4i\phi}) I_1 - \frac{1}{2} e^{-2i\phi} \Im_1 - (1 - 2e^{-2i\phi} - e^{-4i\phi}) A_2 - 4e^{-4i\phi} E_4; \\
 d_2 &= \frac{1}{8} [1 - \cos 4\phi + 8 \sin^2 \phi + 5 i \sin \phi (e^{-5i\phi} - 2e^{-i\phi})] \Im_1 + \\
 &+ \frac{1}{2} (\cos 4\phi - 5 i \sin \phi e^{-5i\phi}) I_3 + \Im_{3/4} + 2e^{-i\phi} E_6 + [i \sin \phi (3e^{-i\phi} - 2e^{-i\phi}) - e^{-2i\phi}] + \\
 &+ \frac{1}{2} [2i(3e^{i\phi} - 3e^{-i\phi} - 2e^{-i\phi} + e^{3i\phi}) \sin \phi + e^{2i\phi} - 2e^{-2i\phi} - 16 \sin^2 \phi e^{-4i\phi}] E_4; \\
 d_3 &= \frac{1}{6} \left[ (\sin 4\phi - 2e^{-4i\phi} + 2e^{-6i\phi}) I_3 + \frac{1}{2} e^{-4i\phi} \Im_3 + \right. \\
 &\quad \left. + (4e^{-2i\phi} - e^{-4i\phi} - 4e^{-4i\phi} - e^{-6i\phi}) \right] A_4 - 4e^{-6i\phi} E_6;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_n &= 4 \int_0^{\infty} y^{n+2} \operatorname{sh} 2y e(y) dy; I_n = \int_0^{\infty} y^n [(1 - e^{-2y}) \operatorname{sh} 2y - 4y^2] e(y) dy; \\ A_n &= \int_0^{\infty} y^n (\operatorname{ch} 2y - 1) e(y) dy; E_n = \int_0^{\infty} y^n e(y) dy; e(y) = \frac{1}{4y^2 - \operatorname{sh}^2 2y}; \\ N_{11} &= \frac{\pi^2}{48} (\cos 2\phi \pm 3); N_{31} = \frac{\pi^4}{256} (\cos 4\phi / 15 \pm \cos 2\phi); N_{33} = \frac{N_{31}}{3}. \end{aligned}$$

Тут і далі верхній знак відповідає правому кінцю дефекту, а нижній – лівому.

На рис. 2 і 3 наведені залежності  $K_I^* = \lambda K_I / \sqrt{\pi l} H q l$  і  $K_{II}^* = \lambda K_{II} / \sqrt{\pi l} H q l$  від кута повороту тріщини  $\phi$  при  $l/h = \delta = 0,1$  (1 і 2 – криві відповідні граничним умовам задачі теплопровідності, якщо задана на кордоні температура – 1), якщо тепловий потік і умови теплообміну – 2), коли тепловий потік перпендикулярний до  $OY$ , суцільні лінії відповідають правому кінцю тріщини, пунктирні – лівому;  $H = \alpha t E / 2$ .

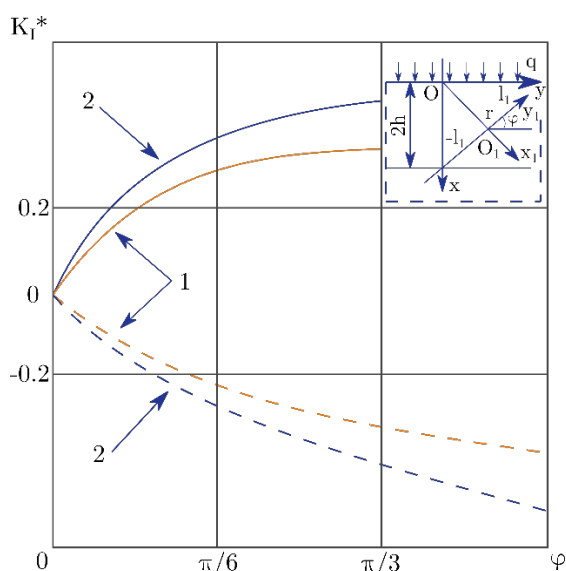


Рис. 2. Залежність  $K_I^* = \lambda K_I / \sqrt{\pi l} H q l = f(\phi)$  від кута повороту тріщини при  $\delta = l/h = 0,1$ ; 1- коли задана на границі температура; 2- задані тепловий потік і умови теплообміну; суцільні лінії 1, 2 - правий, пунктирні - лівий кінці тріщини

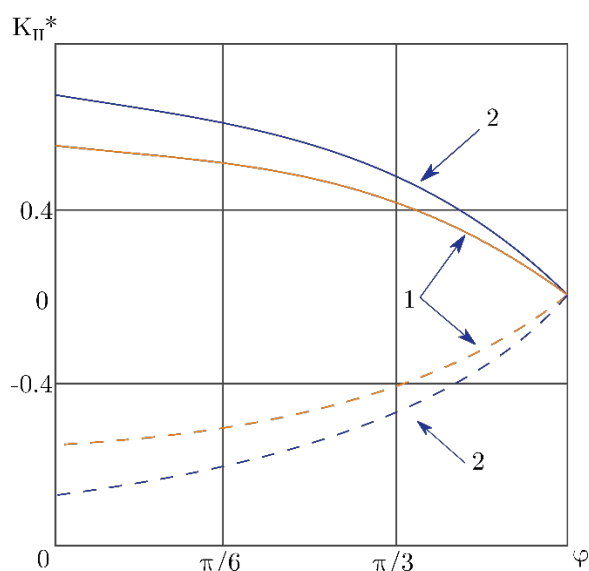


Рис.3. Залежність  $K_{II}^* = \lambda K_{II} / \sqrt{\pi l} H q l = f(\phi)$  від кута повороту тріщини при  $\delta = l/h = 0,1$ ; 1 - ГУ I роду; 2- задані тепловий потік і умови теплообміну; суцільні лінії 1, 2 - правий, пунктирні - лівий кінці тріщини

З рисунків 2 і 3 слідує, що значення  $K_I$  і  $K_{II}$  в разі теплообміну (криві 2) по абсолютній величині більші, ніж поза зоною контакту, якщо границя теплоізольована.

Величина  $K_{II}$  досягає найбільшого значення, коли тепловий потік перпендикулярний тріщині.

Знайдемо інтенсивність напружень у вершинах тріщини, що розміщена на глибині  $\delta^*$ , коли на її берегах підтримується температура  $T_0$ , а на поверхні тіла ( $x = 0$ ) заданий тепловий потік  $q(T, y)$  спрямований перпендикулярно ( $\beta = 0$  – кут між напрямком потоку і віссю  $Ox$ ) до цієї поверхні. Термопружний стан тіла буде

визначатися тільки збуреним температурним полем. З огляду на те, що на лінії тріщини  $T_0 = 2q_{\theta^*}\delta^*$  зі співвідношень (17)-(18) знаходимо:

$$K_I^{*\pm} = \mp q_{\theta^*} H l \sqrt{\pi l}; K_{II}^{*\pm} = \pm 2HT_0 \sqrt{\frac{l}{\pi}}. \quad (19)$$

Якщо ввести в розгляд величину  $P\eta = q_{\theta^*} H l \delta^*$ , де  $P$  – зусилля розтягування, яке формується під дією температур;  $\eta$  – параметр, то можна встановити наступні важливі характеристики для поведінки дефектів. Якщо нам відомо значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, то кут початкового поширення тріщини  $\theta^*$  від граничного значення теплового потоку для неї визначаються зі співвідношень [14]:

$$\theta^* = 2 \arctg D, D = \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}}, \quad q_{\theta^*} = \frac{\sqrt{3}\lambda K_{1C}}{Hl\sqrt{\pi l}\delta^*}. \quad (20)$$

Аналіз отриманих результатів показує, що наявність жорсткого ( $V_1 > V_2$ ) включення в разі силового навантаження призводить до збільшення, а в разі теплової – до зменшення значення  $K_I$ . При цьому істотний вплив на характер зміни КІН мають коефіцієнти теплового лінійного розширення композиту. Наприклад, при  $\alpha_{t1} < \alpha_{t2}$ ,  $K_I > 0$ , а при  $\alpha_{t1} > \alpha_{t2}$ ,  $K_I < 0$ . Коефіцієнти теплопровідності 1 і 2 якісно не впливають на  $K_I$  і  $K_{II}$ , а змінюють їх лише кількісно.

Розглянутий вище приклад показує, які фактори впливають на поведінку тріщини і початок її розповсюдження, в залежності від умов теплообміну, а також напружений стан матеріалу, що містить зазначені неоднорідності.

Таким чином, для бездефектної обробки сплавів необхідно враховувати їх структурну неоднорідність. Наявність тріщиноподібних дефектів, і включень сприяє тому, що при виборі режимів обробки й характеристик інструменту слід керуватися граничними значеннями теплового потоку [15].

### Висновки

Проведені теоретичні дослідження впливу структурної неоднорідності матеріалів на механізм зародження й розвитку тріщин під дією термомеханічних навантажень, що дозволяє зробити наступні висновки:

1. На величину коефіцієнтів інтенсивності напружень для дефектів типу тріщин впливають розміри й орієнтація цих дефектів, глибина їх залягання і взаємне розташування, величина теплового потоку.

2. Для будь-яких коефіцієнтів теплопровідності, лінійного температурного розширення й модулів зсуву матриці і дефекту коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_I = 0, K_{II} \neq 0$  якщо тепловий потік спрямований перпендикулярно тріщині і, навпаки, якщо паралельно тріщині, то  $K_I \neq 0, K_{II} = 0$ .

### Список використаної літератури

1. Ящерицын П. И., Рыжов Э. В., Аверченков В. И. Технологическая наследственность в машиностроении. Минск: Наука и техника, 1977. 256 с.
2. Андриевский А. Н., Якимов А. В. О природе шлифовочных трещин. *Вестник машиностроения*. 1970. Т. 2. С. 65–67.
3. Якимов А. В., Напарьин Ю. А., Паршаков А. Н. Причины возникновения шлифовочных трещин. *Вестник машиностроения*. 1974. Т. 8. С. 46–49.
4. Якимов А. В. Оптимизация процесса шлифования. Москва: Машиностроение, 1975. 176 с.

5. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. *Mechanics of Composite Structural Elements*. Singapore : Springer, 2018. 518 с.
6. Bader M. G. Handbook of composite reinforcements. *International Materials Reviews*. 2012. Vol. 39. no. 3. P. 123–124.
7. Daniel G. *Composite Materials: Design and Applications*. 3rd edition. Boca Raton : CRC Press, 2014. P. 635.
8. Chawla K. K. *Composite Materials: Science and Engineering*. Materials Research and Engineering. New York : Springer, 2013. 528 с.
9. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2012. 345 с.
10. Chou T. W. *Microstructural Design of Fiber Composites*. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press, 2005. 564 с.
11. Оборский Г. А., Дащенко А. Ф., Усов А. В., Дмитришин Д. В. Моделирование систем: монография. Одесса: Астропринт, 2013. 664 с.
12. Балохонов Р. Р. Поверхностные слои и внутренние границы разделов гетерогенных материалах: монография / Под ред. В. Е. Панин. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2006. 520 с.
13. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов, тонких включений и подкреплений. Москва: Наука, 1982. 344 с.
14. Кит Г.С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами Киев: Наукова думка, 1983. 277 с.
15. Якимов А. В., Слободяник П. Т., Усов А. В. Теплофизика механической обработки. Киев–Одесса: Лыбидь, 1991. 240 с.

#### References

1. Yashcheritsyn, P. I., Ryzhov, E. V., & Averchenkov, V. I. (1977). *Tekhnologicheskaya nasledstvennost' v mashinostroyenii*. Minsk : Nauka i tekhnika.
2. Andriyevskiy, A. N., & Yakimov, A. V. (1970). O prirode shlifovochnykh treshchin. *Vestnik mashinostroyeniya*. **2**, 65–67.
3. Yakimov, A. V., Napar'in, YU. A., & Parshakov, A. N. (1974). Prichiny vznikoneniya shlifovochnykh treshchin. *Vestnik mashinostroyeniya*. **8**, 46–49.
4. Yakimov, A. V. (1975) Optimizatsiya protsessa shlifovaniya. Moskva: Mashinostroyeniye.
5. Altenbach, H., Altenbach, J., & Kissing, W. (2018). *Mechanics of Composite Structural Elements*. Singapore: Springer.
6. Bader, M. G. (2012) Handbook of composite reinforcements. *International Materials Reviews*. **39**, 3. 123–124.
7. Daniel, G. (2014) *Composite Materials: Design and Applications*. 3rd edition. Boca Raton : CRC Press.
8. Chawla, K. K. (2013). *Composite Materials: Science and Engineering*. Materials Research and Engineering. New York : Springer.
9. Christensen, R. M. (2012). *Mechanics of Composite Materials*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications.
10. Chou, T. W. (2005). *Microstructural Design of Fiber Composites*. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press.
11. Oborskiy, G. A., Dashchenko, A. F., Usov, A. V., & Dmitrishin, D. V. (2013). *Modelirovaniye sistem*. Odessa : Astroprint.
12. Balokhonov, R. R. (2006) *Poverkhnostnyye sloi i vnutrenniye granitsy razdelav geterogennykh materialakh : monografiya / Pod red. V. Ye. Panin*. Novosibirsk : Izd-vo SO RAN.

13. Попов, Г. YA. (1982). Kонтсентрати́я упругих напруги́х возле шта́мпов разрезов, тонких вклю́чений і подкреплени́х. Moskva : Nauka.
14. Kit, G.S. & Krivtsun, G. S. (1983). Ploskiye zadachi termouprugosti dlya tel s treshchinami. Kiev: Naukova dumka.
15. Yakimov, A. V., Slobodyanik, P. T., & Usov, A. V. (1991). Teplofizika mekhanicheskoy obrabotki. Kiyev–Odessa : Lybid'.

Усов Анато́лій Васи́льович – д. т. н., професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: usov\_a\_v@opu.ua, ORCID: 0000-0002-3965-7611.

Куніцин Макси́м Володи́мирович – к. т. н., старший викладач кафедри вищої математики та моделювання систем, Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: m.v.kunitsyn@opu.ua ORCID: 0000-0003-1764-8922

Сікіраш Юлі́я Євге́ньєвна – асистент кафедри вищої математики та моделювання систем Державного університету «Одеська політехніка», e-mail: u.e.sikirash@opu.ua, ORCID: 0000-0003-0853-582X.