УДК 519.6

А.П. МОТАЙЛО
Херсонська державна морська академія

КУБАТУРНА ФОРМУЛА ДЛЯ ОКТАЕДРА СЬОМОГО АЛГЕБРАЇЧНОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ

При розв'язанні задач математичної фізики методом скінченних елементів для об'ємних областей із використанням решіток тетраедрально-октаедральної структури існує задача вибору певного базису октаедра та формули чисельного інтегрування по даному багатограннику. Чисельний розв'язок задачі є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь з коефіцієнтами, які є елементами матриць жорсткості та мас. Від точності кубатурних формул для октаедра залежить точність розв'язку граничної задачі.

При дискретизації розрахункової області лінійними октаедром та тетраедром задачу чисельного інтегрування по області октаедра частково вирішено. Побудовані кубатурні формули для обчислення локальної матриці жорсткості для октаедра з кусково-лінійним, тригонометричним та поліноміальними другого порядку базисами. Кубатурна формула для обчислення елементів локальної матриці мас побудована для октаедра з тригонометричним базисом. Кубатурні формули для октаедра з тригонометричним та поліноміальними другого порядку базисами є точними, відповідно, для тригонометричного окремого виду та алгебраїчного третього порядку поліномів та містять мінімальну кількість вузлів інтерполяції.

У даній роботі побудовано кубатурну формулу для квадратичного октаедра з поліноміальним четвертого порядку базисом. Дана формула є точною для алгебраїчних поліномів сьомого порядку та має два різних набори координат вузлів та вагових коефіцієнтів. Отримано оцінку залишкового члена кубатурної формули для підінтегральних функцій, які належать класу $C^8(\Omega)$. Теоретичні результати перевірено при обчисленні елементів локальної матриці жорсткості для системи поліноміальних четвертого порядку базисних функцій квадратичного октаедра. За результатами обчислень визначено оптимальну за точністю кубатурну формулу. Вагові коефіцієнти даної формули є додатними, одна з чотирьох груп вузлів інтерполяції не належить області октаедра.

Побудована кубатурна формула може бути застосована при розв'язанні граничних задач математичної фізики для об'ємних областей, які дискретизовані решіткою тетраедрально-октаедральної структури.

Ключові слова: квадратичний октаедр, кубатурна формула, алгебраїчний порядок точності, скінченний елемент, матриця жорсткості.

А.П. МОТАЙЛО
Херсонская государственная морская академия

КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОКТАЭДРА СЕДЬМОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

При решении задач математической физики методом конечных элементов для объемных областей с использованием решеток тетраэдрально-октаэдральной структуры существует задача выбора определенного базиса октаэдра и формулы численного интегрирования по данному многограннику. Численное решение задачи является решением системы линейных алгебраических уравнений с коэффициентами,

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.18

которые являются элементами матриц жесткости и масс. От точности кубатурных формул для октаэдра зависит точность решения граничной задачи.

При дискретизации расчетной области линейными октаэдром и тетраэдром задача численного интегрирования по области октаэдра частично решена. Построены кубатурные формулы для вычисления локальной матрицы жесткости для октаэдра с кусочно-линейным, тригонометрическим и полиномиальными второго порядка базисами. Кубатурная формула для вычисления элементов локальной матрицы масс построена для октаэдра с тригонометрическим базисом. Кубатурные формулы для октаэдра с тригонометрическим и полиномиальными второго порядка базисами являются точными, соответственно, для тригонометрического частного вида и алгебраического третьего порядка полиномов и содержат минимальное количество узлов интерполяции.

В данной работе построена кубатурная формула для квадратичного октаэдра с полиномиальным четвертого порядка базисом. Данная формула является точной для алгебраических полиномов седьмого порядка и имеет два разных набора координат узлов и весовых коэффициентов. Получена оценка остаточного члена кубатурной формулы для подынтегральных функций класса $C^8(\Omega)$*. Теоретические результаты проверены при вычислении элементов локальной матрицы жесткости для системы полиномиальных четвертого порядка базисных функций квадратичного октаэдра. По результатам вычислений определена оптимальная по точности кубатурная формула. Весовые коэффициенты формулы положительны, одна из четырех групп узлов интерполяции не принадлежит области октаэдра.*

Данная кубатурная формула может быть использована при решении граничных задач математической физики для объемных областей, которые дискретизированы решеткой тетраэдрально-октаэдральной структуры.

Ключевые слова: квадратичный октаэдр, кубатурная формула, алгебраический порядок точности, конечный элемент, матрица жесткости.

A.P. MOTAILO
Kherson State Maritime Academy

CUBATURE FORMULA FOR AN OCTAHEDRON OF THE SEVENTH ALGEBRAIC ORDER OF ACCURACY

When solving the problems of mathematical physics by the finite element method for volume regions using lattices of a tetrahedral-octahedral structure, there is the problem of choosing a specific basis for the octahedron and the formula for numerical integration over this polyhedron. The numerical solution of the problem is the solution of a system of linear algebraic equations with coefficients that are elements of the stiffness and mass matrices. The accuracy of the solution of the boundary problem depends on the accuracy of the cubature formulas for the octahedron.

When the computational domain is discretized by the linear octahedron and tetrahedron, the problem of numerical integration over the octahedron region is partially solved. Cubature formulas are constructed for calculating the local stiffness matrix for an octahedron with piecewise linear, trigonometric and second-order polynomial bases. The cubature formula for calculating the elements of the local mass matrix is constructed for an octahedron with a trigonometric basis. Cubature formulas for an octahedron with trigonometric and second-order polynomial bases are exact for a trigonometric partial form and third-order algebraic polynomials, respectively, and contain a minimal number of interpolation nodes.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.18

In this paper, a cubature formula for a quadratic octahedron with a fourth-order polynomial basis is constructed. This formula is exact for seventh-order algebraic polynomials and has two different sets of node coordinates and weight coefficients. An estimate of the remainder term of the cubature formula for integrand functions of the class $C^8(\Omega)$ is obtained. Theoretical results were verified by calculating the elements of the local stiffness matrix for a fourth-order polynomial system of basis functions of a quadratic octahedron. Based on the calculation results, the cubature formula optimal in accuracy is determined. The weighting coefficients of the formula are positive; one of the four groups of interpolation nodes does not belong to the region of the octahedron.

This cubature formula can be used to solve the boundary problems of mathematical physics for volume regions that are discretized by the lattice of the tetrahedral-octahedral structure.

Keywords: quadratic octahedron, cubature formula, algebraic order of accuracy, finite element, stiffness matrix.

Постановка проблеми

Одним з наближених методів розв'язання прикладних задач математичної фізики є метод скінченних елементів (МСЕ). Згідно даному методу гранична задача зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно координат вектора невідомих, які є значеннями шуканої функції у вузлах скінченно-елементної моделі області. Коефіцієнтами при векторі невідомих є матриці, які у теорії пружності називають матрицями жорсткості та мас. Елементи локальних матриць жорсткості та мас знаходять інтегруванням добутків базисних функцій та їх похідних по області скінченного елемента (СЕ).

Чисельне інтегрування є невід'ємною частиною програмної реалізації МСЕ. Вибір певної кубатурної формули залежить від геометрії та порядку СЕ. Якщо розрахункова область дискретизована решіткою тетраедрально-октаедральної структури, існує задача побудови кубатурних формул по октаедру, який не включено до бібліотеки СЕ відомих програмних комплексів. Питання чисельного інтегрування по області тетраедра докладно описано в роботах Крилова, Зенкевича, Сегерлінда, Пінєжанінова та використовується при алгоритмізації МСЕ сучасними системами скінченно-елементного аналізу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботах [1–2] побудовано формули чисельного інтегрування по об'єму лінійного октаедра з кусково-лінійними базисними функціями, які дозволяють точно визначати елементи локальної матриці жорсткості на СЕ у формі октаедра. У роботі [3] побудовано кубатурну формулу третього алгебраїчного степеня точності з мінімальною кількістю вузлів для лінійного октаедра з поліноміальним другого степеня базисом, яка дозволяє точно обчислювати елементи локальної матриці жорсткості на даному багатограннику. У роботі [4] побудовано кубатурну формулу для тригонометричних поліномів окремого виду з мінімальною кількістю вузлів, яка дозволяє точно знаходити елементи матриць жорсткості та мас для октаедра з тригонометричним базисом. Кубатурні формули, які побудовані у роботах [3–4], є найкращими за кількістю вузлів, мають додатні вагові коефіцієнти та розташовані в області октаедра вузли інтерполяції.

У роботі [5] отримано набір поліноміальних четвертого порядку базисних функцій квадратичного октаедра. Для використання даного багатогранника як комірки скінченно-елементної решітки в ансамблі з квадратичним тетраедром необхідно розв'язати задачу чисельного інтегрування по квадратичному октаедру.

Мета дослідження

Метою даного дослідження є побудова кубатурної формули для октаедра, яка може бути використана для знаходження елементів локальної матриці жорсткості квадратичного октаедра з поліноміальним четвертого порядку скінченно-елементним базисом.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо область $\Omega = \{(x, y, z): |x| + |y| + |z| \le 1\} \subset R^3$ у формі октаедра, де $f(x, y, z)$ – неперервна на Ω функція. Для квадратичного октаедра з поліноміальними четвертого порядку базисними функціями [4] елементи матриці жорсткості $k = [k_{pq}] = \iiint\limits_{\Omega} B^T DBdxdydz$, де $B^T = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)$ – матриця градієнтів базисних функцій $\{\varphi_s\}_{s=1}^{18} = \{\varphi_s(x, y, z)\}_{s=1}^{18}$, D – матриця пружності є поліномами степеня $2(n-1)$, де n – степінь поліномів φ_s. Якщо $n = 4$, тоді елементи матриці жорсткості скінченного елемента у формі октаедра є алгебраїчними поліномами шостого степеня.

Для побудови кубатурної формули по октаедру скористаємось основними результатами теорії чисельного інтегрування по найпростішим областям в R^3, які викладено у роботах авторів [6–8]. Кубатурну формулу по октаедру будемо шукати у вигляді:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz \approx \sum_{s=1}^{N} G_s f(x_s, y_s, z_s) = I_R(f), \qquad (1)$$

де G_s – вагові коефіцієнти, (x_s, y_s, z_s) – вузли інтерполяції, N - кількість вузлів.

Вузли інтерполяції формули (1) розташуємо в області Ω, враховуючи центральну та осьову симетрії октаедра. Розіб'ємо усі вузли на чотири групи:

a_s – вузли, які лежать на осях октаедра, що проходять через протилежні вершини багатогранника, розташовані на відстані p від його центра, та мають координати $(\pm p, 0, 0)$, $(0, \pm p, 0)$, $(0, 0, \pm p)$;

b_s – вузли, які є точками перетину сфери радіуса q з осями октаедра, що проходять через середини протилежних ребер багатогранника, та мають координати $(\pm q, \pm q, 0)$, $(0, \pm q, \pm q)$, $(\pm q, 0, \pm q)$;

c_s – вузли, розташовані у точках перетину сфери радіуса r з осями октаедра, що проходять через центри тяжіння протилежних граней багатогранника та мають координати $(\pm r, \pm r, \pm r)$;

d_0 – центр октаедра з координатами $(0, 0, 0)$.

Тоді формула (1) приймає вигляд:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz \approx \sum_{s=1}^{6} A_s f(a_s) + \sum_{s=1}^{12} B_s f(b_s) + \sum_{s=1}^{8} C_s f(c_s) + D_0 f(d_0), \qquad (2)$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.18

де A_s, B_s, C_s, D_0 – вагові коефіцієнти, $N = 27$.

Для полінома $P_6(x,y,z) = \sum_{|\alpha|=0}^{6} a_{ijk} x^i y^j z^k$, де a_{ijk} – коефіцієнти, $\alpha = \alpha(i,j,k)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = i + j + k$, $i, j, k = \overline{1,3}$, формула (1) є точною, тобто

$$\iiint_{\Omega} P_6(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{s=1}^{27} G_s P_6(x_s, y_s, z_s)\,. \tag{3}$$

Потрійний інтеграл у лівій частині формули (3) як сума повторних інтегралів дорівнює:

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Omega} P_6(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+y-1}^{1-x-y} P_6(x,y,z)\,dxdydz + \int_{-1}^{0} \int_0^{1+x} \int_{-x+y-1}^{1+x-y} P_6(x,y,z)\,dxdydz + \\
&+\int_{-1}^{0} \int_{-1-x}^{0} \int_{-x-y-1}^{1+x+y} P_6(x,y,z)\,dxdydz + \int_0^1 \int_{-1+x}^{0} \int_{x-y-1}^{1-x+y} P_6(x,y,z)\,dxdydz = \\
&= \frac{4}{3} a_{000} + \frac{2}{15}\left(a_{200} + a_{020} + a_{002}\right) + \frac{4}{105}\left(a_{400} + a_{040} + a_{004}\right) + \frac{2}{315}\left(a_{220} + a_{022} + a_{202}\right) + \\
&+ \frac{1}{63}\left(a_{600} + a_{060} + a_{006}\right) + \frac{1}{945}\left(a_{420} + a_{402} + a_{240} + a_{042} + a_{204} + a_{024}\right) + \frac{1}{5670} a_{222}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Права частина формули (3) після підстановки координат вузлових точок має вигляд:

$$\sum_{s=1}^{27} G_s P_6(x_s, y_s, z_s) = \sum_{s=1}^{6} A_s P_6(a_s) + \sum_{s=1}^{12} B_s P_6(b_s) + \sum_{s=1}^{8} C_s P_6(c_s) + D_0 P_6(d_0). \tag{5}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових a_{ijk}, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}
6A_1 + 12B_1 + 8C_1 + D_0 = \dfrac{4}{3}; \\
A_1 p^2 + 4B_1 q^2 + 4C_1 r^2 = \dfrac{1}{15}; \\
A_1 p^4 + 4B_1 q^4 + 4C_1 r^4 = \dfrac{2}{105}; \\
2B_1 q^4 + 4C_1 r^4 = \dfrac{1}{105}; \\
2A_1 p^6 + 8B_1 q^6 + 8C_1 r^6 = \dfrac{1}{21}; \\
4B_1 q^6 + 8C_1 r^6 = \dfrac{1}{315}; \\
C_1 r^6 = \dfrac{1}{45360}.
\end{cases} \tag{6}$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.18

Відмітимо, що рівновіддалені від центра октаедра вузли мають рівні вагові коефіцієнти, тобто $A_1 = ... = A_6$, $B_1 = ... = B_{12}$, $C_1 = ... = C_8$.

Система (6) має два розв'язки, які задовольняють умовам поставленої задачі:

$$1)\quad p_1 = \sqrt{\frac{948+\sqrt{2370}}{1830}},\ q_1 = \sqrt{\frac{168-\sqrt{2370}}{834}},\ r_1 = \sqrt{\frac{276+5\sqrt{2370}}{546}},$$

$$\begin{aligned}
&A_s = \frac{79}{11340\cdot p_1^6} = \frac{4550}{89373} - \frac{142325}{889618842}\sqrt{2370},\ s=\overline{1,6};\\
&B_s = \frac{1}{4536\cdot q_1^6} = \frac{3926}{89373} + \frac{14507}{22521996}\sqrt{2370},\ s=\overline{1,12};\\
&C_s = \frac{1}{45360\cdot r_1^6} = \frac{324461}{6256110} - \frac{47963}{45043992}\sqrt{2370},\ s_3=\overline{1,8};\\
&D_0 = \frac{4}{3} - 6A_1 - 12B_1 - 8C_1 = \frac{89492}{1042685} + \frac{777893}{444809421}\sqrt{2370};
\end{aligned} \tag{7}$$

$$2)\quad p_2 = \sqrt{\frac{948-\sqrt{2370}}{1830}},\ q_2 = \sqrt{\frac{168+\sqrt{2370}}{834}},\ r_2 = \sqrt{\frac{276-5\sqrt{2370}}{546}},$$

$$\begin{aligned}
&A_s = \frac{79}{11340\cdot p_2^6} = \frac{4550}{89373} + \frac{142325}{889618842}\sqrt{2370},\ s=\overline{1,6};\\
&B_s = \frac{1}{4536\cdot q_2^6} = \frac{3926}{89373} - \frac{14507}{22521996}\sqrt{2370},\ s=\overline{1,12};\\
&C_s = \frac{1}{45360\cdot r_2^6} = \frac{324461}{6256110} + \frac{47963}{45043992}\sqrt{2370},\ s=\overline{1,8};\\
&D_0 = \frac{4}{3} - 6A_1 - 12B_1 - 8C_1 = \frac{89492}{1042685} - \frac{777893}{444809421}\sqrt{2370}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким чином, формула (2) має вигляд:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz \approx A_s\sum_{s=1}^{6} f(a_s) + B_s\sum_{s=1}^{12} f(b_s) + C_s\sum_{s=1}^{8} f(c_s) + D_0 f(d_0), \tag{9}$$

де вузли інтерполяції та вагові коефіцієнти відповідають формулам (7) або (8).

При цьому у випадку, коли вузлам a_s, b_s, c_s відповідають значення p_1, q_1, r_1, вузли c_s не належать області октаедра. У випадку, коли вузлам a_s, b_s, c_s відповідають значення p_2, q_2, r_2, вузли b_s не належать області октаедра. Вагові коефіцієнти A_s, B_s, C_s, D_0 приймають додатні значення в обох випадках.

Замітимо, що формула (9) залишається точною для поліномів сьомого степеня $P_7(x,y,z)$. Дійсно,

$$\iiint_\Omega P_7(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Omega P_6(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_\Omega \sum_{|\alpha|=7} a_{ijk}x^i y^j z^k\,dxdydz.$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.18

Оскільки область інтегрування у потрійному інтегралі є симетричною відносно кожної з осей координат, а степінь полінома $\sum_{|\alpha|=7} a_{ijk} x^i y^j z^k$ є непарним, маємо:

$$\iiint_{\Omega} \sum_{|\alpha|=7} a_{ijk} x^i y^j z^k dxdydz = 0 .$$

Відповідна система рівнянь

$$\iiint_{\Omega} \sum_{|\alpha|=7} a_{ijk} x^i y^j z^k dxdydz = \sum_{|\alpha|=7} G_s x_s^i y_s^j z_s^k = 0$$

має розв'язок $A_1 = ... = A_6$, $B_1 = ... = B_{12}$, $C_1 = ... = C_8$ при довільних значеннях p, q, r, який не протирічить розв'язку системи (6).

Отже, формула (9) є точною для поліномів $P_m(x, y, z)$ степеня $m \le 7$.

Оцінимо точність отриманої формули. Будемо вважати, що функція $f(X) = f(x, y, z)$ належить класу $C^8(\Omega)$ неперервно-диференційованих до восьмого порядку включно на Ω функцій. Нехай $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – довільна точка області Ω. Запишемо формулу Тейлора для $f(X)$ в околі точки X_0 із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(X) = \sum_{s=1}^{7} \sum_{|\beta|=s} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0)}{\partial X^{\beta}} (X - X_0)^{\beta} + \sum_{|\beta|=8} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0 + \theta(X - X_0))}{\partial X^{\beta}} (X - X_0)^{\beta} , \qquad (10)$$

де $\beta = \beta(i, j, k)$ – мультиіндекс, $|\beta| = i + j + k$, $i, j, k = \overline{1,3}$, $\beta! = i! j! k!$, $0 < \theta < 1$ – деяке число.

Проінтегруємо залишковий член формули (9) по області Ω:

$$R_8(f) = \iiint_{\Omega} \sum_{|\beta|=8} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0 + \theta(X - X_0))}{\partial X^{\beta}} (X - X_0)^{\beta} dX , \qquad (11)$$

де $R_8(f) = \iiint_{\Omega} f(X) dX - I_R(f)$ – залишковий член формули (1), $dX = dxdydz$ – елемент об'єму.

Оцінимо рівність (10), враховуючи, що $|X - X_0| \le 2$ для довільних точок $X, X_0 \in \Omega$:

$$|R_8(f)| \le \iiint_{\Omega} \sum_{|\beta|=8} \left| \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0 + \theta(X - X_0))}{\partial X^{\beta}} (X - X_0)^{\beta} \right| dX \le$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.18

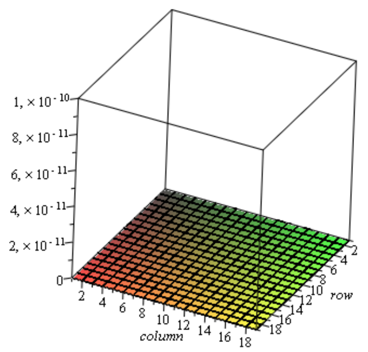
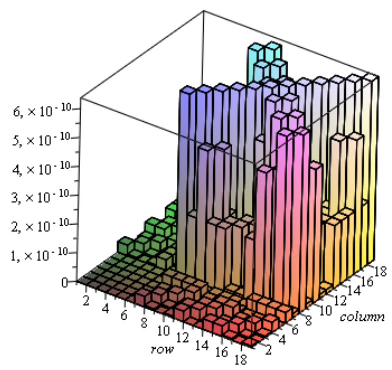
$$\le \iiint_{\Omega} \sum_{|\beta|=8} \left| \frac{2^{\beta}}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f\left(X_0 + \theta\left(X - X_0\right)\right)}{\partial X^{\beta}} \right| dX = K .$$

Справедливість формули (9) перевірено при обчисленні елементів матриці жорсткості квадратичного октаедра з поліноміальними функціями четвертого порядку.

У табл.1 наведено значення похибки $\Delta = \max\limits_{k_{pq},\, p,q=\overline{1,18}} \left|R_8\left(f\right)\right|$, де $f = k_{pq}$. Розрахунки виконано у системі комп'ютерної математики Maple. Значення K відповідає $X_0 = 0$.

Таблиця 1

Оцінка точності кубатурної формули (9)

Параметри вузлів інтерполяції октаедра	p_1, q_1, r_1	p_2, q_2, r_2
Δ	0	$6.38 \cdot 10^{-10}$
Розподіл похибки $\left|R_8\left(f\right)\right|$ за елементами матриці k		

Аналізуючи результати в табл.1 зазначимо, що формула (9) є нестійкою відносно похибок округлення, якщо вузли інтерполяції та вагові коефіцієнти відповідають формулам (8). Отже, формула (9) з вузлами інтерполяції та ваговими коефіцієнтами, які визначаються формулами (7), є оптимальною за точністю обчислень, оскільки має похибку $\Delta = \max\limits_{k_{pq},\, p,q=\overline{1,18}} \left|R_8\left(f\right)\right| = 0$, і може бути використана для обчислення елементів локальної матриці жорсткості квадратичного октаедра з поліноміальними четвертого порядку базисними функціями.

Також слід відмітити, що за формулою [6, С. 4] оптимальна кількість вузлів інтерполяції становить:

$$N \cong \left[\frac{\left(n+m\right)!}{\left(n+1\right)!m!} \right],$$

де m – степінь полінома, n – розмірність простору.

Для m=3 та n=6 маємо $N \cong 21$.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.18

Побудована кубатурна формула містить більше 21 вузла інтерполяції. Спроби зменшити кількість вузлів у формулі (9) шляхом виключення або дублювання будь-якої з груп вузлів a_s, b_s, c_s приводить до несумісної системи рівнянь (6).

Також перевірено, що існує послідовна мінімальна кубатурна формула Гаусса, яка є точною для тривимірних поліномів сьомого степеня в області октаедра. Дана формула містить 64 вузли інтерполяції, які належать області інтегрування. Усі вагові коефіцієнти є додатними.

Для найпростіших областей в R^3, таких як куб або сфера, послідовна мінімальна кубатурна формула Гауса, яка є точною для тривимірних поліномів сьомого степеня, також містить 64 вузли інтерполяції, які належать області інтегрування, а вагові коефіцієнти є додатними [9].

Висновки

У роботі побудовано інтерполяційну кубатурну формулу по області квадратичного октаедра, яка є точною для алгебраїчних поліномів сьомого степеня та має два різних набори координат вузлів та вагових коефіцієнтів. Отримано оцінку залишкового члена кубатурної формули для підінтегральних функцій, які належать класу $C^8(\Omega)$. Результати перевірено при обчисленні елементів локальної матриці жорсткості для системи поліноміальних четвертого порядку базисних функцій квадратичного октаедра. За результатами обчислень виявлено оптимальну за точністю кубатурну формулу, якій відповідають координати вузлів та вагові коефіцієнти формули (7). Побудована кубатурна формула може бути застосована при розв’язанні граничних задач математичної фізики для об’ємних областей, які дискретизовані решіткою тетраедрально-октаедральної структури.

Список використаної літератури

1. Grosso R., Greiner G. Hierarchical Meshes for Volume Data. *Computer Graphics International:* International Conference (Germany, Hannover, June 22–24, 1998). Washington: IEEE Computer Society Press, 1998. P. 761–771.
2. Мотайло А. П. О численном решении стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры. *Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика*. 2014. № 25(196). С. 119–127.
3. Мотайло А. П., Білоусова Т. П. Побудова кубатурної формули для октаедра. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування*: матеріали 10-ї міжнародної науково-практичної конференції (Херсон, 12−13 вересня 2019 р.). Херсон: ХДМА, 2019. С. 277–280.
4. Мотайло А. П., Алексенко В. Л. Кубатурна формула по октаедру для тригонометричного полінома окремого виду. *Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп’ютерних систем*: матеріали IV-ї всеукраїнської науково-практичної конференції (Дніпро, 27−29 листопада 2019 р.). Дніпро: ДНУ, 2019. С. 58−60.
5. Мотайло А. П. Побудова гармонічного базису квадратичного октаедра. *Сучасні технології промислового комплексу*: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції (Херсон, 10−15 вересня 2019 р.). Херсон: ХНТУ, 2019. С. 178−180.
6. Мысовских И. П. О построении кубатурных формул для простейших областей. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1964. Т. 4, № 1. С. 3–14.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.18

7. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Москва: Наука, 1967. 500 с.
8. Попов А. С. Кубатурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{4h}. *Сибирские электронные математические известия*. 2015. Т. 12. С. 457–464. DOI: 10.17377/semi.2015.12.039
9. Калиткин Н. Н. Численные методы: учеб. пособие. СПб: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.

References

1. Grosso, R., & Greiner, G. (1998). Hierarchical Meshes for Volume Data. *Computer Graphics International: International Conference* (Germany, Hannover, June 22–24, 1998). Washington: IEEE Computer Society Press, pp. 761–771.
2. Motaylo, A. P. (2014). O chislennom reshenii statsionarnoy zadachi teploprovodnosti metodom konechnyih elementov na reshetke tetraedralno-oktaedralnoy strukturyi. *Nauchnyie vedomosti BelGU. Matematika. Fizika*. **25**(196), 119–127.
3. Motailo, A. P., & Bilousova T. P. (2019), Pobudova kubaturnoi formuly dlia oktaedra. Proceedings of the *Suchasni enerhetychni ustanovky na transporti, tekhnolohii ta obladnannia dlia yikh obsluhovuvannia*: 10-ta mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiia (Kherson, September 12−13, 2019). Kherson: KDMA, pp. 277–280.
4. Motailo, A. P., & Aleksenko V. L. (2019). Kubaturna formula po oktaedru dlia tryhonometrychnoho polinoma okremoho vydu. Proceedings of the *Perspektyvni napriamky suchasnoi elektroniky, informatsiinykh i kompiuternykh system*: IV vseukrainska naukovo-praktychna konferentsiia (Dnipro, November 27−29, 2019). Dnipro: DNU, pp. 58−60.
5. Motailo, A. P. (2019). Pobudova harmonichnoho bazysu kvadratychnoho oktaedra. Proceedings of the *Suchasni tekhnolohii promyslovoho kompleksu*: V Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiia (Kherson, September 10−15, 2019). Kherson: KNTU, pp. 178−180.
6. Myisovskih, I. P. (1964). O postroenii kubaturnyih formul dlya prosteyshih oblastey. *Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*. **4**, 1, 3–14.
7. Kryilov, V. I. (1967). Priblizhennoe vyichislenie integralov. Moskva: Nauka.
8. Popov, A. S. (2015). Kubaturnyie formulyi na sfere, invariantnyie otnositelno gruppyi vrascheniy diedra s inversiey D_{4h}. *Sibirskie elektronnyie matematicheskie izvestiya*. **12**, 457–464. DOI: 10.17377/semi.2015.12.039
9. Kalitkin, N. N. (2011). Chislennyie metodyi: ucheb. posobie. SPb: BHV-Peterburg.

Мотайло Анжеліка Павлівна – к.т.н., старший викладач кафедри природничо-наукової підготовки Херсонської державної морської академії: e-mail: motajlo.anzhelika@ksma.ks.ua, ORCID: 0000-0002-6775-5788.