

УДК 539.3

Р.С. МУСИЙ, Н.Б. МЕЛЬНИК, Б. Й. БАНДИРСЬКИЙ, Л. В. ГОШКО, В.К. ШИНДЕР
Національний університет «Львівська політехніка»

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАГРІТОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Подано методика зведення тривимірної задачі теплопровідності для неоднорідної ізотропної оболонки довільної геометричної конфігурації до двовимірної. Оболонка віднесена до змішаної криволінійної ортогональної системи координат. Методика ґрунтується на використанні лінійного закону розподілу температури по товщині оболонки, що має місце для тонких оболонок і підтверджується експериментально. З використанням усереднення температури по товщині оболонки отримано систему вихідних рівнянь на інтегральні характеристики температури для оболонки довільної конфігурації. Як окремий випадок записано систему двовимірних рівнянь на інтегральні характеристики температури циліндричної неоднорідної ізотропної оболонки. Сформульовано початкові та крайові умови на інтегральні характеристики скінченної по довжині циліндричної оболонки. З використанням подвійного скінченого інтегрального перетворення Фур'є за просторовими координатами і перетворення Лапласа за часом записано загальний розв'язок отриманої системи двовимірних рівнянь на інтегральні характеристики температури. Для випадку попередньо нагрітої до заданої температури циліндричної оболонки даного типу з неоднорідного ізотропного матеріалу, що знаходиться за умов конвективного теплообміну з довкіллям, знайдено вираз температурного поля. Чисельно проаналізовано температурне поле циліндричної оболонки з ізотропної неоднорідної металокераміки на її зовнішній поверхні залежно від значень осьової і колової координат за різних значень безрозмірного часу і заданого коефіцієнта неоднорідності. Аналіз проведено для випадку степеневого закону зміни коефіцієнта неоднорідності k по радіальній змінній. Досліджено залежність температурного поля в центрі області нагріву від безрозмірного часу для різних значень коефіцієнта тепловіддачі. Встановлено, що зі зменшенням частки кераміки температура на зовнішній поверхні оболонки зменшується. Знайдено, що температура є сталою в області нагріву, а при переході в ненагріту ділянку вона різко зменшується до температури зовнішнього середовища.

Ключові слова: неоднорідна ізотропна оболонка, тепла дія, циліндрична оболонка, ізотропна металокераміка, температурний режим.

Р.С. МУСИЙ, Н.Б. МЕЛЬНИК, Б. И. БАНДЫРСКИЙ, Л. В. ГОШКО, В.К. ШИНДЕР
Национальный университет «Львовская политехника»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАГРЕТОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Представлена методика сведения трехмерной задачи теплопроводности для неоднородной изотропной оболочки произвольной геометрической конфигурации к двумерной. Оболочка отнесена к смешанной криволинейной ортогональной системе координат. Методика основывается на использовании линейного закона распределения температуры по толщине оболочки, который имеет место для тонких оболочек и подтверждается экспериментально. С использованием усреднения температуры по

толщине оболочки получена система исходных уравнений на интегральные характеристики температуры для оболочки произвольной конфигурации. Как частный случай записана система двумерных уравнений на интегральные характеристики температуры цилиндрической неоднородной изотропной оболочки. Сформулированы начальные и краевые условия на интегральные характеристики конечной по длине цилиндрической оболочки. С использованием двойного конечного интегрального преобразования Фурье по пространственным координатам и преобразования Лапласа по времени записано общее решение полученной системы двумерных уравнений относительно интегральных характеристик температуры. Для случая предварительно нагретой до заданной температуры цилиндрической оболочки данного типа из неоднородного изотропного материала, находящегося в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой, найдено выражение температурного поля. Численно проанализированы температурное поле цилиндрической оболочки из изотропной неоднородной металлокерамики на ее внешней поверхности в зависимости от значений осевой и круговой координат при различных значениях безразмерного времени и заданного коэффициента неоднородности. Анализ проведен для случая степенного закона изменения коэффициента неоднородности по радиальной переменной. Исследована зависимость температурного поля в центре области нагрева от безразмерного времени для различных значений коэффициента теплоотдачи. Установлено, что с уменьшением доли керамики температура на внешней поверхности оболочки уменьшается. Найдено, что температура постоянна в области нагрева, а при переходе в ненагретый участок она резко уменьшается до температуры внешней среды.

Ключевые слова: неоднородная изотропная оболочка, тепловое воздействие, цилиндрическая оболочка, изотропная металлокерамика, температурный режим.

R.S. MUSII, N.B. MELNYK, B.J. BANDYRSKII, L.V. HOSHKO, V.K. SHYNDER
Lviv Polytechnic National University

DETERMINING NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD OF PRE-HEATED INHOMOGENEOUS ISOTROPIC CYLINDRICAL COVER

The method of reduction of the three-dimensional thermal conductivity problem for an inhomogeneous isotropic shell of arbitrary geometric configuration to two-dimensional one has been provided. The shell is referred to a mixed curvilinear orthogonal coordinate system. The method is based on the use of a linear law of temperature distribution over the thickness of the shell, which is applicable for thin shells and has been experimentally confirmed. Using the averaging of the temperature over the thickness of the shell, a system of initial equations for the integral characteristics of the temperature for the shell of arbitrary configuration has been obtained. A system of two-dimensional equations for the integral temperature characteristics of a cylindrical inhomogeneous isotropic shell has been written as a partial case. The initial and boundary conditions for the integral characteristics of a finite-length cylindrical shell have been formulated. Using the double-finite integral Fourier transform in spatial coordinates and the Laplace time transform, the general solution of the obtained system of two-dimensional equations on the integral characteristics of temperature has been recorded. For the case of a cylindrical shell of this type preheated to a given temperature from an inhomogeneous isotropic material under conditions of convective heat exchange with the environment, the expression of the temperature field has been found. The temperature field of a cylindrical shell made of isotropic inhomogeneous cermets on its outer surface has been numerically analyzed depending on the values of axial and circular coordinates at

different values of dimensionless time and a given coefficient of inhomogeneity. The analysis for the case of the power law of change of the coefficient of inhomogeneity k in the radial variable has been performed. The dependence of the temperature field in the center of the heating region on the dimensionless time for different values of the heat transfer coefficient has been discovered. It has been established that with a decrease in the proportion of ceramics, the temperature on the outer surface of the shell decreases. It has been found that the temperature is constant in the heating area, and when moving to the unheated area, it decreases sharply to ambient temperature.

Key words: inhomogeneous isotropic shell, thermal action, cylindrical shell, isotropic metal ceramics, temperature regime.

Постановка проблеми

У зв'язку з широким застосуванням неоднорідних ізотропних матеріалів для виготовлення елементів конструкцій, що перебувають за інтенсивного нагрівання [1–5], необхідно удосконалювати математичні моделі теплопровідності таких елементів, зокрема тонких циліндричних оболонок. Це необхідно для прогнозування температурних режимів їх експлуатації за дії відповідних теплових джерел та умов попереднього нагрівання до заданої температури.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для захисту від агресивного середовища, для зміцнення конструкції, теплоізоляції або інтенсифікації передачі тепла використовують багатошарові конструкції [6–8]. Технологічні властивості неоднорідних ізотропних матеріалів, які мають високу жорсткість на злам, здатні витримувати підвищені теплові напруження, є жаротривкі і не схильні до корозії та ерозії, розглянуто в роботах [9–12]. Питання моделювання і дослідження теплової поведінки оболонок і пластин з таких матеріалів наведено в статті [13].

На практиці, як правило, в якості зазначених матеріалів використовують сплави кераміки та металу або комбінації різних матеріалів. Їх особливістю є те, що їх фізико-механічні властивості плавно і неперервно змінюються в певному напрямку.

Мета дослідження

Метою даної роботи є побудова двовимірної математичної моделі теплопровідності тонкостінних неоднорідних ізотропних оболонок, зокрема циліндричної форми, та отримання розв'язків задачі теплопровідності для неоднорідної ізотропної циліндричної оболонки, попередньо нагрітої до заданої температури, та проведення їх числового аналізу.

Викладення основного матеріалу дослідження

Тривимірна нестационарна задача теплопровідності для неоднорідної ізотропної тонкостінної оболонки

За вихідне візьмемо тривимірне рівняння теплопровідності для неоднорідного ізотропного тіла, записане в криволінійній ортогональній системі координат α, β, z . Після спрощення з точністю, що відповідає першому наближенню Лява [1], воно має вигляд:

$$\lambda_r(z)\Delta t + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_r(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right) + 2k_0 \lambda_r(z) \frac{\partial t}{\partial z} - c(z) \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_r = 0. \quad (1)$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння необхідно долучити одну з граничних умов першого, другого або третього роду:

$$t = t^{(s)}, \lambda_t \frac{\partial t}{\partial n} = -q_s, \lambda_t \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha_s (t - t_s^c) = 0$$

на поверхні S , яка обмежує тіло, і початкову умову $t|_{\tau=0} = t_0$, що відповідає заданій постійній температурі тіла у початковий момент часу $\tau = 0$.

Тут $\lambda_t(z)$ – коефіцієнт теплопровідності; $c(z)$ – питома теплоємність; α_s – коефіцієнт тепловіддачі; $t(\alpha, \beta, z, \tau)$ – температурне поле; Δ – узагальнений оператор Лапласа [1]; w_t – густина теплових джерел; t_s^c – температура довкілля; k_0 – середня кривина; τ – змінна часу; \bar{n} – зовнішня нормаль до поверхні S .

Система двовимірних рівнянь на інтегральні характеристики температури неоднорідної ізотропної оболонки

Для зведення сформульованої просторової задачі теплопровідності до двовимірної використаємо гіпотезу про лінійний характер розподілу температури по товщині стінки $2h$, що оправдано для тонкостінних елементів:

$$t(\alpha, \beta, z, \tau) = T_1(\alpha, \beta, \tau) + \frac{z}{h} T_2(\alpha, \beta, \tau), \quad (2)$$

де $T_i = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^h t z^{i-1} dz, (i=1,2).$

Тоді методом усереднення одержимо такі двовимірні рівняння:

$$\begin{aligned} \lambda_t^{(1)} \Delta T_1 + \lambda_t^{(2)} \Delta T_2 + \frac{2k_0}{h} \lambda_t^{(1)} T_2 - C^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - C^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + W_t^{(1)} &= f_1, \\ \lambda_t^{(2)} \Delta T_1 + \lambda_t^{(3)} \Delta T_2 - \frac{1}{h^2} \lambda_t^{(1)} T_2 + \frac{2k_0}{h} \lambda_t^{(2)} T_2 - C^{(2)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - C^{(3)} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + W_t^{(2)} &= f_2, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\{\lambda_t^{(i)}, C^{(i)}, W_t^{(i)}\} = \int_{-h}^h \{\lambda_t, c, w_t\} \left(\frac{z}{h}\right)^{i-1} dz, (i=1,2,3); f_1, f_2$ – функції, що залежать від граничних умов на поверхнях $z = \pm h$.

Так, для умов другого роду ці функції такі: $f_n = q^+ - (-1)^n q^-$, а для третього – маємо: $f_n = (T_1 - t_1^z) \varepsilon_n^t + (T_2 - t_2^z) \varepsilon_{3-n}^z$, причому $\varepsilon_n^t = (\alpha^+ - (-1)^n \alpha^-)$; $t_n^z = \frac{1}{2} (t_z^+ - (-1)^n t_z^-)$ ($n=1,2$); t_z^+ і t_z^- – температура середовищ відповідно на поверхнях $z=h$ і $z=-h$; α^+, α^- – коефіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь; q^+, q^- – теплові потоки на них.

Для кругових циліндричних оболонок з радіусом середньої поверхні R і сталою товщиною $2h$ рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат x, θ, z набудуть вигляду:

$$\Delta_{(1)}T_1 + \Delta_{(2)}T_2 + \frac{\lambda_t^{(1)}}{Rh}T_2 - C^{(1)}\partial_\tau T_1 - C^{(2)}\partial_\tau T_2 = f_1 - W_t^{(1)},$$

$$\Delta_{(2)}T_1 + \Delta_{(3)}T_2 - \frac{\lambda_t^{(1)}}{h^2}T_2 + \frac{\lambda_t^{(2)}}{Rh}T_2 - C^{(2)}\partial_\tau T_1 - C^{(3)}\partial_\tau T_2 = f_2 - W_t^{(2)}, \quad (4)$$

де $\Delta_{(i)} = \lambda^{(i)}(\partial_{11}^2 + \partial_{22}^2/R^2)$; $\partial_1 = \partial/\partial x$; $\partial_2 = \partial/\partial \theta$; $\partial_\tau = \partial/\partial \tau$.

Якщо оболонка має скінченну довжину l , тоді для однозначності розв'язку системи (4) на краях $x = 0$ і $x = l$ потрібно задати комбінацію величин $a_0T_1 + a_1\partial T_1/\partial x$, $a_2T_2 + a_3\partial T_2/\partial x$, де $a_i = const$, а в початковий момент – значення температурних характеристик T_1 і T_2 .

Припустимо, що оболонка виготовлена із композиту метал–кераміка. Тоді ефективні матеріальні властивості композиту P_{ef} через властивості кераміки P_c і металу P_m можна записати так: $P_{ef}(z) = P_c f_c + P_m f_m$, де f_c і f_m – відносні частки відповідно кераміки і металу в композиті, розподіл яких по товщині потрібно задати, причому $f_c + f_m = 1$. Задамо степеневий закон розподілу [2]:

$$f_c = f_c^- + (f_c^+ - f_c^-) \left(\frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k,$$

де f_c^+ і f_c^- – частка кераміки f_c відповідно на верхній $z = h$ і нижній $z = -h$ поверхнях; k – параметр неоднорідності, який характеризує зміну частки матеріалу вздовж товщини і може набувати значень $k \geq 0$.

Тоді формула для ефективних властивостей матеріалу набуває вигляду:

$$P_{ef}(z) = P_m + (P_c - P_m) \left[f_c^- + (1 - 2f_c^-) \left(\frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k \right]. \quad (5)$$

Зокрема, коли частка кераміки на нижній $z = -h$ поверхні дорівнює нулю, тобто $f_c^- = 0$, маємо:

$$P_{ef}(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k.$$

Змінюючи параметр неоднорідності k , можна досягнути оптимального складу композиту. Очевидно, що зі зменшенням параметра k до нуля матеріал оболонки набуватиме властивостей чистої кераміки, а зі збільшенням k до нескінченності – чистого металу.

Загальний розв'язок задачі теплопровідності для скінченної циліндричної оболонки

Нехай на краях $x = 0$ і $x = l$ задані такі умови:

$$T_1 = T_2 = 0, \quad (6)$$

а в початковий момент $\tau = 0$ такі:

$$T_1(x, \theta, 0) = T_1^0(x, \theta), \quad T_2(x, \theta, 0) = T_2^0(x, \theta). \quad (7)$$

Вважатимемо також, що умови теплообміну на поверхнях $z = \pm h$ однакові: $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha_z$, $t_z^+ = t_z^- = 0$, внутрішні джерела тепла відсутні і $c = \text{const}$. Тоді, використовуючи інтегральне перетворення Лапласа за часом і подвійне скінченне перетворення Фур'є за поверхневими координатами згідно з умовами (6), (7), знайдемо розв'язок системи (4) у вигляді:

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{(p_i - g_4)T_{1nm}^0 + g_2 T_{2nm}^0}{p_i - p_j} e^{-p_i \tau} \sin \frac{\pi n x}{l} \cos m \theta, \\ T_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{(p_i - g_1)T_{2nm}^0 + g_3 T_{1nm}^0}{p_i - p_j} e^{-p_i \tau} \sin \frac{\pi n x}{l} \cos m \theta, \end{aligned} \quad (8)$$

де $p_i = \frac{g_1 + g_4}{2} + (-1)^i \sqrt{\frac{(g_1 - g_4)^2}{4} + g_2 g_3}$, $g_1 = \beta_1 \xi + \text{Bi} / \delta^2$, $g_2 = \beta_2 \xi - \beta_1 / \delta$, $g_3 = 3 \beta_2 \xi$,
 $g_4 = 3(\beta_3 \xi + \beta_1 / \delta^2 - \beta_2 / \delta + \text{Bi} / \delta^2)$, $\mu_n = \frac{\pi n R}{l}$, $\xi = \mu_n^2 + m^2$, $\text{Bi} = \frac{\alpha_z h}{\lambda_m}$, $\delta = \frac{h}{R}$,
 $\beta_2 = \frac{(\lambda_c / \lambda_m - 1)k}{(k+1)(k+2)}$, $\beta_1 = \frac{\lambda_c / \lambda_m + k}{k+1}$, $\beta_3 = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{3(\lambda_c / \lambda_m - 1)(k^2 + k + 2)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right\}$,
 $T_{imn}^0 = \frac{\zeta}{\pi d} \int_0^l \int_{-\pi}^{\pi} T_i^0(x, \theta) \sin \frac{\pi n}{l} x \cos m \theta dx d\theta$, $\zeta = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (9)$

Розв'язок задачі для попередньо нагрітої до заданої температури циліндричної оболонки

Тривимірне температурне поле в циліндричній оболонці знаходимо із співвідношення (2), підставивши у нього вирази (8) з урахуванням (9).

Нехай в початковий момент часу задане стале за товщиною температурне поле, яке рівномірно розподілене на поверхні циліндричної оболонки по прямокутній області $[2d \times 2\eta]$. Запишемо його через кусково-неперервну функцію

$$T_1^0(x, \theta) = T^* [S_-(x - x_0 + d) - S_+(x - x_0 - d)] \times [S_-(\theta + \eta) - S_+(\theta - \eta)], \quad T_2^0(x, \theta) = 0, \quad (10)$$

де $T^* = \text{const}$; $2d$ і 2η – відповідно ширина і кут області нагріву; $(x_0, 0)$ – координати центра цієї області; $S_+(x)$; $S_-(x)$ – одиничні функції.

Тоді з формул (9) і (10) одержимо такі вирази для коефіцієнтів Фур'є:

$$\begin{aligned} T_{1n0}^0 &= \frac{4\eta T^*}{\pi^2 n} \sin \frac{\pi d}{l} \sin \frac{\pi n x_0}{l}, \quad T_{2n0}^0 = 0, \quad T_{1nm}^0 = \frac{8T^*}{\pi^2 n m} \sin \frac{\pi n x_0}{l} \sin \frac{\pi m d}{l} \sin m \eta, \\ T_{2nm}^0 &= 0 \quad (m \neq 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Підставивши їх у вирази (8), знаходимо значення температурних характеристик, а потім з рівняння (2) – розподіл температури в даній оболонці за вказаних умов.

Числовий аналіз температурного поля циліндричної оболонки з ізотропної металокераміки

Числові дослідження здійснено для циліндричної оболонки, виготовленої з композитного матеріалу метал-кераміка з відповідними тепло-фізичними властивостями [2, 12]: метал (Ti-6Al-4V): $\lambda_m = 18,1 \text{ W/mK}$, $c_m = 808,3 \text{ J/kg K}$; кераміка (ZrO_2): $\lambda_c = 2,036 \text{ W/mK}$, $c_c = 615,6 \text{ J/kg K}$. Інші параметри вибрано таким чином: $h/R = 0,05$, $l/R = 2$, $\eta = \pi/2$, $d/l = 0,5$, $x_0 = l/2$, $f_c^- = 0$.

Обчислення проведено для безрозмірного температурного поля $t' = t/T^*$, для різних значень безрозмірного часу $\tau' = \lambda_m \tau / (c_m h^2)$ і безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі (критерія Біо) $Bi = \alpha_z h / \lambda_m$. Прийнято, що неоднорідність композиту по товщині змінюється від поверхні $z = h$ (суцільна кераміка) до поверхні $z = -h$ (суцільний метал) за степеневим законом (5) при таких значеннях параметра неоднорідності: $k = 1; 2; 5$ і $k = 20$. На рис. 1 показано вплив цього параметра на розподіл температури вздовж напрямної $x' = 0,5$. Встановлено, що зі зменшенням частки кераміки по товщині оболонки температура на її зовнішній поверхні зменшується. Це є наслідком того, що коефіцієнт теплопровідності кераміки менший, ніж металу.

Зміна температурного поля t' уздовж твірної $\theta = 0$ від її середини до її кінця ($0,5 \leq x' = x/l \leq 1$) зображена на рис. 2. Зміна температури t' вздовж напрямної $x' = 0,5$ від середини нагрітої області до середини не нагрітої ($0 \leq \theta \leq \pi$) – рис. 3. Обчислення виконували для коефіцієнта неоднорідності $k = 1$ і таких значень безрозмірного часу: $\tau' = 0,1; 3$ і 6 . Отримано, що температура є сталою в області нагріву, а при переході в ненагріту ділянку вона різко зменшується до температури зовнішнього середовища.

Залежність температурного поля, обчисленого в центрі області нагріву ($l/2, 0$), від часу τ' для різних значень коефіцієнта тепловіддачі $Bi = 0,1; 0,2; 0,5$ і 1 показано на рис. 4. Виявлено, що з плином часу температура зменшується. Інтенсивність її зменшення зростає зі збільшенням коефіцієнта тепловіддачі Bi .

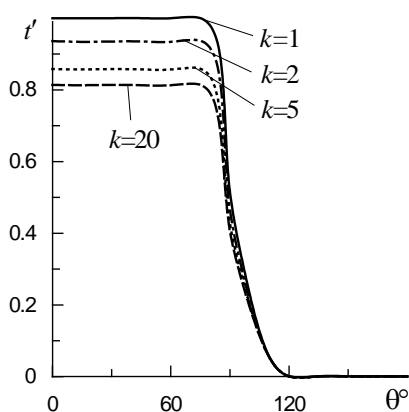


Рис. 1. Залежність температури t' від кулової координати θ за різних значень коефіцієнта неоднорідності ($x' = 0,5$; $Bi = 0,1$; $\tau' = 0,1$).

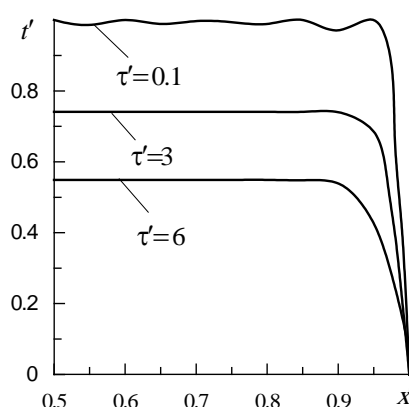


Рис. 2. Зміна температурного поля t' від осевої координати x' в різні моменти часу ($\theta = 0$; $k = 1$; $Bi = 0,1$).

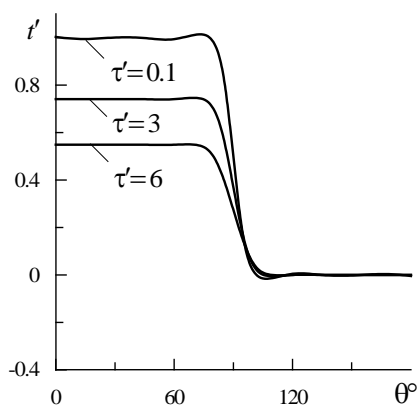


Рис. 3. Зміна температурного поля t' від колової координати θ в різні моменти часу ($x' = 0.5$; $k = 1$; $Bi = 0.1$).

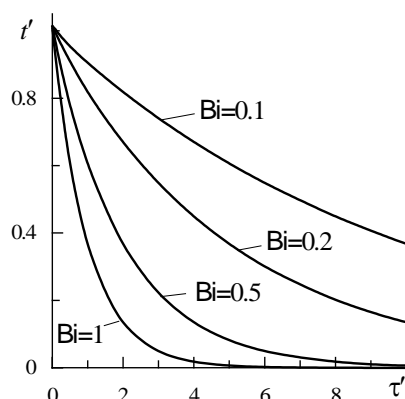


Рис.4. Залежність температури t' в центрі області нагріву від часу τ' для різних значень коефіцієнта тепловіддачі Bi ($x' = 0.5$; $\theta = 0$; $k = 1$).

Висновки

Використовуючи гіпотезу про лінійний розподіл температури по товщині неоднорідної оболонки записано лінійні рівняння теплопровідності за умов конвективного теплообміну між зовнішніми поверхнями оболонки і довкіллям. На їх основі шляхом усереднення температури по товщині неоднорідної циліндричної оболонки отримано вихідну систему двовимірних рівнянь на інтегральні характеристики температури даної оболонки. З використанням скінченного подвійного перетворення Фур'є та інтегрального перетворення Лапласа побудовано загальний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для неоднорідної циліндричної оболонки скінченної довжини за умови її попереднього нагріву до заданої температури. За допомогою розрахунків проаналізовано температурне поле у неоднорідній циліндричній оболонці з ізотропного композитного матеріалу (метал-кераміка), властивості якого змінюються в радіальному напрямку за степеневим законом. Досліджено залежність температурного поля на зовнішній поверхні від осової і колової координат та його зміну в часі для різних значень безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі.

Список використаної літератури

1. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. New York: CRC Press, 2004. 831p.
2. Hetnarski R. B., Eslami M. R. *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*. Springer Science Business Media, B.V., 2009. 559 p.
3. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Krysko A. V. *Thermo-Dynamics of Plates and Shells (Foundations of Engineering Mechanics)*. Verlag, Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. 789 p.
4. Kushnir R. M., Nykolyshyn M. M., Zhydyk U. V., Flyachok V. M. On the Theory of Inhomogeneous Anisotropic Shells with Initial Stresses. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 186. P. 61–72.
5. Fazelzadeh S. A., Rahmani S., Ghavanloo E., Marzocca P. Thermoelastic Vibration of Doubly-Curved Nano-Composite Shells Reinforced by Graphene Nanoplatelets. *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42. Issue 1. P. 1–17.
6. Punera D., Kant T., Desai Y. M. Thermoelastic Analysis of Laminated and Functionally Graded Sandwich Cylindrical Shells with Two Refined Higher Order Models. *Journal of Thermal Stresses*. 2018. Vol. 41. Issue 1. P. 54–79.

7. Brishetto S., Carrera E. Heat Conduction and Thermal Analysis in Multilayered Plates and Shells. *Mechanics Research Communications*. 2011. Vol. 38. Issue 6. P. 449–455.
8. Shvets R. M., Flyachok V. M. Heat Conduction Equations for Multilayer Anisotropic Shells. *Journal of Thermal Stresses*. 1999. Vol. 22. Issue 2. P. 241–254.
9. Pandey S., Pradyumna S. Transient Stress Analysis of Sandwich Plate and Shell Panels with Functionally Graded Material Core under Thermal Shock. *Journal of Thermal Stresses*. 2018. Vol. 41. Issue 5. P. 543–567.
10. Esmaili H. R., Arvin H., Kiani Y. Axisymmetric Nonlinear Rapid Heating of FGM Cylindrical Shells. *Journal of Thermal Stresses*. 2019. Vol. 42. Issue 4. P. 490–505.
11. Ohmichi M., Noda N., Sumi N. Plane Heat Conduction Problems in Functionally Graded Orthotropic Materials. *Journal of Thermal Stresses*. 2017. Vol. 40. Issue 6. P. 747–764.
12. Bahtui A., Eslami M. R. Coupled Thermoelasticity of Functionally Graded Cylindrical Shells. *Mechanics Research Communications*. 2007. Vol. 34. Issue 1. P. 1–18.
13. Thai H. T., Kim S. E. A Review of Theories for the Modeling and Analysis of Functionally Graded Plates and Shells. *Composite Structures*. 2015. Vol. 128. P. 70–86.

References

1. Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. New York: CRC Press.
2. Hetnarski, R. B., & Eslami, M. R. (2009). *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*. Springer Science Business Media, B.V.
3. Awrejcewicz, J., Krysko, V. A., & Krysko, A. V. (2010). *Thermo-Dynamics of Plates and Shells (Foundations of Engineering Mechanics)*. Verlag, Berlin, Heidelberg: Springer.
4. Kushnir, R. M., Nykolyshyn, M. M., Zhydyk, U. V., & Flyachok, V. M. (2012). On the Theory of Inhomogeneous Anisotropic Shells with Initial Stresses. *Journal of Mathematical Sciences*. **186**, 61–72.
5. Fazelzadeh, S. A., Rahmani, S., Ghavanloo, E., & Marzocca, P. (2019). Thermoelastic Vibration of Doubly-Curved Nano-Composite Shells Reinforced by Graphene Nanoplatelets. *Journal of Thermal Stresses*. **42**, 1, 1–17.
6. Punera, D., Kant, T., & Desai, Y. M. (2018). Thermoelastic Analysis of Laminated and Functionally Graded Sandwich Cylindrical Shells with Two Refined Higher Order Models. *Journal of Thermal Stresses*. **41**, 1, 54–79.
7. Brishetto, S., & Carrera, E. (2011). Heat Conduction and Thermal Analysis in Multilayered Plates and Shells. *Mechanics Research Communications*. **38**, 6, 449–455.
8. Shvets, R. M., & Flyachok, V. M. (1999). Heat Conduction Equations for Multilayer Anisotropic Shells. *Journal of Thermal Stresses*. **22**, 2, 241–254.
9. Pandey, S., & Pradyumna, S. (2018). Transient Stress Analysis of Sandwich Plate and Shell Panels with Functionally Graded Material Core under Thermal Shock. *Journal of Thermal Stresses*. **41**, 5, 543–567.
10. Esmaili, H. R., Arvin, H., & Kiani, Y. (2019). Axisymmetric Nonlinear Rapid Heating of FGM Cylindrical Shells. *Journal of Thermal Stresses*. **42**, 4, 490–505.
11. Ohmichi, M., Noda, N., & Sumi, N. (2017). Plane Heat Conduction Problems in Functionally Graded Orthotropic Materials. *Journal of Thermal Stresses*. **40**, 6, 747–764.
12. Bahtui, A., & Eslami, M.R. (2007). Coupled Thermoelasticity of Functionally Graded Cylindrical Shells. *Mechanics Research Communications*. **34**, 1, 1–18.
13. Thai, H. T., & Kim, S. E. (2015). A Review of Theories for the Modeling and Analysis of Functionally Graded Plates and Shells. *Composite Structures*. **128**, 70–86.

Мусій Роман Степанович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка», завідувач кафедри біофізики, інформатики та вищої математики Львівського медичного інституту, e-mail: roman.s.musii@lpnu.ua. ORCID: 0000-0002-7169-2206

Мельник Наталія Богданівна – к.ф.-м.н., доцент кафедри програмного забезпечення Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: nataliia.b.melnyk@lpnu.ua, ORCID: 0000-0003-2337-2395.

Бандирський Богдан Йосипович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: bohdan.y.bandyrskiy@lpnu.ua.

Гошко Любомир Васильович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: liubomyr.v.hoshko@lpnu.ua.

Шиндер Валентин Костянтинович – к.ф.м. н., доцент, Доцент кафедри опору матеріалів та будівельної механіки Національного університету «Львівська політехніка», e-mail: valentyn.k.shynder@lpnu.ua.