УДК 004.942

М.Р. ПЕТРИК, І.Я. МУДРИК, Д.М. МИХАЛИК, О.Ю. ПЕТРИК, Т.П. БИЦЬ
Тернопільський національний технічний університет

ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ АНОРМАЛЬНИХ НЕВРОЛОГІЧНИХ РУХІВ З УРАХУВАННЯМ КОГНІТИВНИХ FEEDBACK-ВПЛИВІВ НЕЙРОВУЗЛІВ КОРИ ГОЛОВНОГО МОЗКУ

Завдяки використанню сучасних комп'ютерних технологій, можна здійснити цифровий, послідовний та автоматизований підхід до діагностики стану здоров'я. Зокрема, у цій статті наводиться приклад застосування даних технологій до діагностики стану тремору. Будь-яке його відхилення щодо норми показує, що в людини може бути втома, надто збуджений емоційний стан, або ж патологія. Причиною патології можуть бути порушення в корі головного мозку або ж вона може бути безпосередньо на периферії людського тіла (*кінцівки, очі*).

До найпрогресивніших технологій оцифрування тремору можна віднести запис рухів людини в просторі з допомогою високочутливих швидкісних камер та спосіб визначення тремору на площині через розпізнавання рисунку по спіралі Архімеда на перовому графічному планшеті.

В основу апаратного рішення покладено планшет із шаблоном спіралі Архімеда, пристрій графічного цифрового пера з вбудованим 3D-мікроакселерометром та електроенцефалограф. За допомогою використання вбудованого модуля 3D-мікроакселерометра в цифрове перо графічного планшета забезпечується умова збереження існуючої задовільної точності вимірів з додатковою можливістю контролю відриву пера від поверхні.

Важливі елементи розробки – це алгоритми отримання значень параметрів модельованої системи, можливість візуального представлення отриманих результатів, необхідність динамічного задання параметрів системи. Все це дозволяє з більшою наочністю представляти результати та сприяє цільовому використанню технології. Хорошим рішенням та позитивним елементом даної розробки є імплементація у вигляді окремого модуля з можливістю постійно оновлювати методи та підтримувати актуальність досліджень. Реалізація програмного забезпечення у такий спосіб сприяє підвищенню адаптивності, зручності використання у різноманітних системах в ході ведення досліджень.

Математичні методи, а саме алгоритми обчислення, реалізовано у вигляді набору класів з методами, що моделюють поведінку. Програмні модулі, класи, та їх взаємодію реалізовано у вигляді єдиного модуля-бібліотеки, що дозволить гнучко використовувати метод аналізу вхідних даних у різноманітних прикладних задачах та програмах.

Ключові слова: тремор, кора головного мозку (*КГМ*), *електроенцефалограма* (*ЕЕГ*), *анормальні неврологічні рухи* (*АНР*), *feedback-зв'язок, feedback-модель, feedback-взаємодія, функціонал-нев'язка, тремор-об'єкт* (*Т-об'єкт*), *спіраль Архімеда, електроенцефалограф, 3D-мікроакселерометр, перетворення Фур'є.*

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

М.Р. ПЕТРЫК, И.Я. МУДРЫК, Д.М. МЫХАЛЫК, О.Ю. ПЕТРЫК, Т.П. БЫЦЬ
Тернопольский национальный технический университет

ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АНОРМАЛЬНЫХ НЕВРОЛОГИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ С УЧЕТОМ КОГНИТИВНЫХ FEEDBACK-ВОЗДЕЙСТВИЙ НЕЙРОУЗЛОВ КОРЫ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Благодаря использованию современных компьютерных технологий, можно обеспечить цифровой, системный и автоматизированный подход к мониторингу состояния здоровья. В частности, в этой статье приводится пример применения данных технологий к диагностике состояния тремора. Любое отклонение относительно нормы показывает, что у человека может быть усталость, слишком возбуждено эмоциональное состояние, или же патология. Причиной патологии могут быть нарушения в коре головного мозга или она может быть непосредственно на периферии человеческого тела (конечности, глаза).

К наиболее распросраненным на сегодня технологиям оцифровки тремора можно отнести запись движений человека в пространстве с помощью высокочувствительных скоростных камер и способ идентификации тремора на плоскости с помощью спирали Архимеда, который можно выполнять на перовом графическом планшете.

В основу аппаратного решения возложен планшет с шаблоном спирали Архимеда, устройство графического цифрового пера с встроенным 3D-микроакселерометром и электроэнцефалограф. С помощью использования встроенного модуля 3D-микроакселерометра в цифровое перо графического планшета обеспечивается условие сохранения существующей удовлетворительной точности измерений с дополнительной возможностью контроля отрыва пера от поверхности.

Важные элементы разработки – это алгоритмы получения значений параметров моделируемой системы, возможность визуального представления полученных результатов, необходимость динамического задания параметров системы. Все это позволяет с большей наглядностью представлять результаты и способствует целевому использованию технологии.

Хорошим решением и положительным элементом данной разработки является имплементация в виде отдельного модуля с возможностью постоянно обновлять методы и поддерживать актуальность исследований. Реализация программного обеспечения таким образом способствует повышению адаптивности, удобства использования в различных системах в ходе ведения исследований. Математические методы, а именно алгоритмы вычисления, реализовано в виде набора классов с методами, моделирующие поведение. Программные модули, классы, и их взаимодействие реализовано в виде единого модуля-библиотеки, что позволит гибко использовать метод анализа входных данных в различных прикладных задачах и программах.

Ключевые слова: тремор, кора головного мозга (*КГМ*)*, электроэнцефалограмма* (*ЭЭГ*)*, анормальные неврологические движения* (*АНР*)*, feedback-связь, feedback-модель, feedback-взаимодействие, функционал-невязка, тремор-объект* (*Т-объект*)*, спираль Архимеда, электроэнцефалограф, 3D-микроакселерометр, преобразования Фурье.*

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

M.R. PETRYK, I.Ya. MUDRYK, D.M. MYKHALYK, O.Yu. PETRYK, T.P. BYTS
Ternopil National Technical University

REVIEW OF MATHEMATICAL MODELS OF ABNORMAL NEUROLOGICAL MOVEMENTS WITH TAKING INTO ACCOUNT THE COGNITIVE FEEDBACK-EFFECTS OF NEURONODES OF THE CEREBRAL CORTEX

With the use of modern computer technology, it is possible to provide a digital, systematic and automated approach to health monitoring. In particular, this article provides an example of the application of these technologies to the diagnosis of tremor. Any deviation from the norm indicates that a person may have fatigue, an overly excited emotional state, or pathology. The cause of pathology can be disorders in the cerebral cortex or directly on the periphery of the human body (*limbs, eyes*).

The most advanced technologies today include recording human movements in space using high-sensitivity speed cameras and a method of identifying tremor on the plane by recognizing the Archimedes spiral pattern, which can be performed on a pen graphics tablet.

The hardware solution is based on a tablet with an Archimedes spiral pattern, a graphic digital pen device with a built-in 3D microaccelerometer and an electroencephalograph. By using the built-in module of the 3D microaccelerometer in the digital pen of the graphics tablet, the condition of maintaining the existing satisfactory accuracy of measurements with the additional ability to control the separation of the pen from the surface is provided.

Important elements of development are algorithms for obtaining the values of the simulated system parameters, the possibility of visual representation of the obtained results, the need for dynamic setting of system parameters. All this allows you to more clearly present the results and promotes the targeted use of technology.

A good solution and a positive element of this development is the implementation in the form of a separate module, with the ability to constantly update methods and maintain the relevance of research. The implementation of software in this way helps to increase the adaptability, ease of use in various systems in the course of research.

Mathematical methods, namely computational algorithms, are implemented as a set of classes with methods that model behavior. Software modules, classes, and their interaction are implemented in the form of a single module-library, which will allow flexible use of the method of analysis of input data in various applications and programs.

Keywords: tremor; cerebral cortex (*CC*); *electroencefalogram* (*EEG*); *abnormal neurological movement* (*ANM*); *feedback-communication; feedback-model; feedback-interaction; incoherent functionality; tremor-object* (*T-object*); *Archimedes spiral; electroencephalograph; 3D microaccelerometer; Fourier transform.*

Постановка проблеми

Використовуючи новітні технології, зокрема: штучний інтелект, нові високопродуктивні обчислювальні рішення з урахуванням сучасних архітектур програмного забезпечення, систем паралельних багатокрокових обчислень, нових алгоритмів багатопараметричної ідентифікації та ін. можна забезпечити системний підхід до проектування методів цифрової діагностики стану здоров’я, особливо для людей, уражених критичними захворюваннями нервової системи [1]. В контексті низки європейських програм до таких критичних захворювань віднесені есенційний та анормальний неврологічні тремори, пов’язані з тремтінням кінцівок людини, швидке прогресування яких призводить до хвороб Альцгеймера, Паркенсона та ін. Тремор – це серія небажаних, малих коливних рухів частин тіла (пальці рук, повіки, очні яблука, органи мовлення та ін.), що виникають в результаті мимовільного скорочення м'язів [2].

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

Відхилення в амплітуді, частоті і формах коливань щодо норми свідчить про певне порушення рухової активності людини. Аналіз цих параметрів важливий для визначення окремих зон нейровузлів кори головного мозку (КГМ), що відповідають за рухову активність. Також на основі цифрових даних тремору та оцифрованих даних електроенцифалограм (ЕЕГ) сигналів вузлів КГМ можливо точно діагностувати рухові порушення, а на основі визначеного діагнозу є необхідність вибрати і відкоректувати оптимальні методи сучасної нейротерапії.

Проблема складності оцінювання тремору кінцівок існує в основному внаслідок низької точності оцінювання ступеня тремору, відсутності однозначності в оцінюваннях та високої вартості впровадження новітніх методів і обладнання в профільних клініках [2].

Тому пошук нових методів діагностування тремору в реальних умовах є актуальним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

До найпрогресивніших на сьогодні технологій оцифрування тремору можна віднести 3D-motion test [1], або зчитування рухів людини у просторі за допомогою надчутливих камер, що полягає в повному зчитуванні рухів більшості елементів і ділянок тіла людини за допомогою інфрачервоних міток та 3d-камер [1]. Також відомо про спосіб визначення тремору на площині завдяки розпізнаванню рисунку по спіралі Архімеда, що здійснюється на графічному планшеті за допомогою цифрового пера [3].

Деякі дослідження, пов’язані з аналізом тремору та feedback-впливами нейровузлів КГМ на стан Т-об’єктів, були здійснені такими дослідниками, як А. Легранд. М. Відає, Е. Апартіз, Ж. Ванг, Е. Луїс та ін. [2–5]. Вони зосереджують свою увагу на вивченні рухових патологій. Застосовують класичні методи цифрової обробки на основі інтегрального перетворення Фур’є. В роботах [1–3] наближено оцінено когнітивні feedback-зв’язки через нейромережі. Вищезгаданий підхід не аналізує анормальні неврологічні рухи (АНР) і кількісні оцінки станів та поведінки, які властиві пацієнтам, інші частини тіла яких (окрім рук) мають явні ознаки з високими ступенем тремору (Т-об’єкти). Також недоліком цього підходу є те, що для аналізу зазвичай використовують одновимірні моделі та пристрої, що реєструють показники руху лише за одною з координат [4–5]. Через це можлива втрата від 40 до 80% інформації, що де-факто визначає низький рівень показників такого аналізу. З іншого боку, класичні моделі цифрової обробки тремору від 60 до 80% знижують якість досліджень для Т-об’єктів з анормальними станами, тому що ці методи також відкидають важливі дані, за допомогою яких можливо виявити когнітивні механізми впливу на окремі сегменти АНР- кривих [1–3].

Мета дослідження

Ідентифікація параметрів, що визначають вказані вище feedback-зв’язки та впливи на природу АНР та розроблення моделей і засобів, що підвищують точність аналізу неврологічного стану Т-об’єктів.

Викладення основного матеріалу дослідження

Метод аналізу, запропонований авторами для визначення неврологічних станів Т-об'єктів, орієнтований насамперед на визначення параметрів анормальних рухів пацієнтів, викликаних дисфункцією певних нервових вузлів КГМ. Метод ґрунтується на використанні гібридної моделі нейросистеми (вузли КГМ і Т-об’єкт), яка описує стан і поведінку Т-об’єктів за допомогою поширення хвильового сигналу – покроковий опис 3D елементів траєкторій АНР досліджуваного Т-об’єкта (руки), який включає

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

матриці когнітивних впливів груп нейровузлів КГМ, що включає гібридну спектральну функцію системи з урахуванням усіх сегментів АНР [11]. Для того, щоб розкласти АНР на прості елементи, розділ можна вибирати довільно залежно від складності зображення АНР. Завдяки такій математичній моделі отримуємо кількісні характеристики тремору. У цьому методі аналізу даних надзвичайно важливим результатом є можливість отримання частотної характеристики з використанням гібридного інтегрального перетворення Фур'є та методів цифрової обробки сигналу на гібридних спектральних функціях [9]. Основою для реалізації апаратного рішення є метод безперервного визначення положення електронного пера щодо будь-якої координати. Для випробувань використовували сенсорний планшет (Wacom Cintiq 12WX) із частотою 133 Гц та точністю ± 0,25 мм. Візерунок має форму архімедової спіралі з декількома витками за годинниковою або проти годинникової стрілки (інтерпетля 9мм). Шаблон знаходиться на екрані планшета з можливістю малювати електронною ручкою.

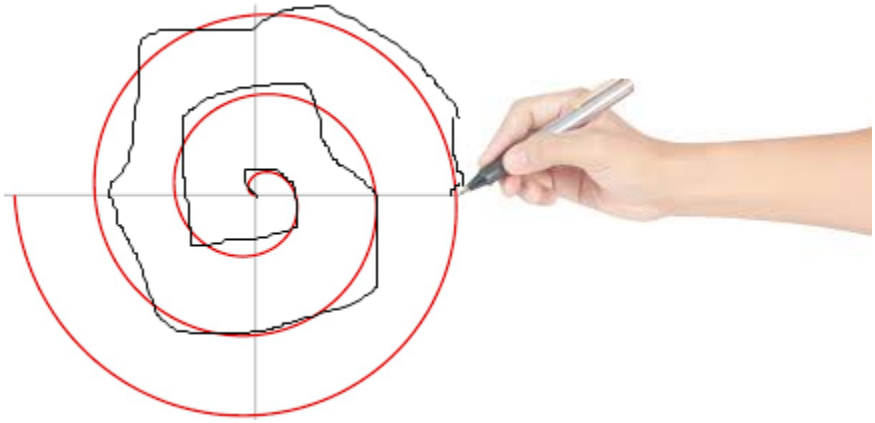

Рис. 1. Спосіб ідентифікації рукописної інформації пацієнта для діагностування тремору.

Для ідентифікації рукописної інформації (цифри, текстова інформація, шаблони) або для запису та оцифрування довільних рухів кінцівки (руки) використовується електронне перо. Наша команда запропонувала графічний цифровий ручковий пристрій із вбудованим 3D-мікроакселерометром для діагностичного тестування. Мікроконтролер зчитує та обробляє інформацію з тривимірного датчика (мікроакселерометра). Відповідно до запропонованих формул визначаються покази миттєвих координат положення акселерометра в просторі [11]. У паралельному потоці отримується інформація про рух електронного пера по площині графічного планшета. При виявленні нульового значення тиску пера на чутливій поверхні планшета (із зазначенням відокремлення пера від поверхні) необхідну інформацію про рух пера отримують з мікроакселерометра. Оцифроване значення положення ручки передається через передавач WIFI на ПК. Дані про рух пера у вигляді 3D-моделі ТР-об'єкта АНР формуються у графічному вікні (рис. 2) з можливістю розкладання складних 3D-рухів на три проекції (x, y, z) та подальшого аналізу кожного з них.

Для побудови математичної моделі АНР використані дані з однієї з визначальних проекцій руху по спіралі (згідно з рис. 2), яка легко перетворюється на декартову графічну вісь z (рис. 3). Ця траєкторія пов'язана з когнітивними зворотними зв'язками з певним набором нейровузлів КГМ, який посилає керуючі сигнали коливального неврологічного руху та визначає динаміку АНР досліджуваного

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

Т-об'єкта (рис. 3). Для вимірювання сигналів протягом його тривалості використовується система датчиків у вигляді спеціального шолома, який контактує з відповідними нейронами КГМ пацієнта протягом усього часу використання цифрової ручки, яка реєструє поведінку Т-об'єкта (кінцівки) (рис. 3). Тенденції електроенцефалограм, записані датчиками шолома, зберігаються у відповідній базі даних [11]. Для того, щоб розкласти складний маршрут АНР для подальшого формулювання математичної моделі, використовується декомпозиційний підхід до багатокомпонентного розкладання сегментів їх траєкторії.

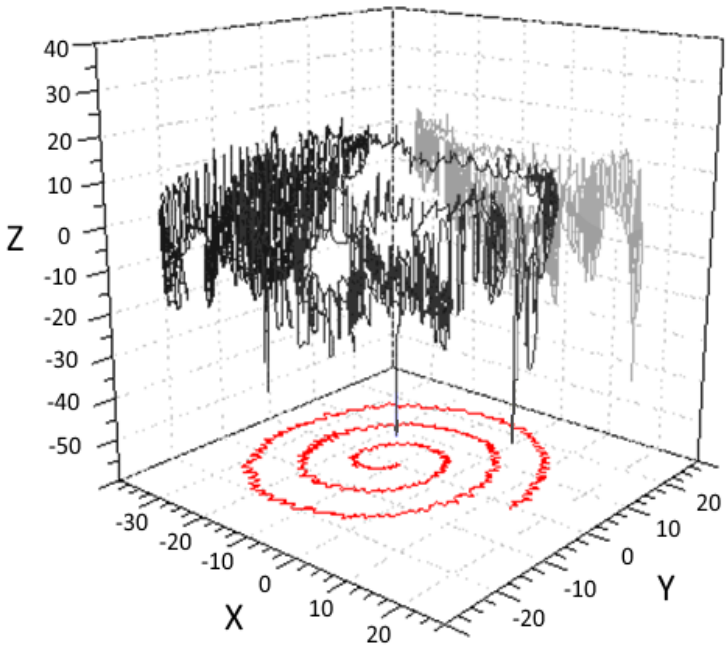

Рис. 2. Тривимірна модель АНР Т-об'єкта на основі зчитаних даних з планшета з електронним пером з мікроакселерометром.

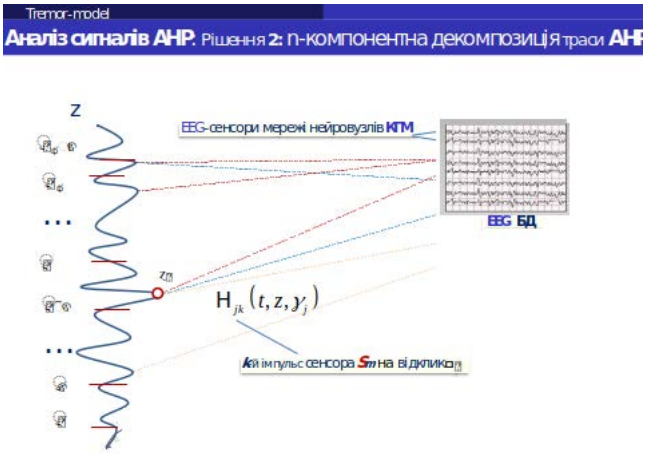

Рис. 3. Взаємодія між нейровузлами КГМ та Т-об'єктом.

Відповідно, можна простежити кореляцію розподілу трендів ЕЕГ-сигналів, яка контролює коливальний неврологічний рух і в цілому визначає динаміку АНР для кожного j-го відрізка маршруту (траси), $j = \overline{1, n_1 + 1}$, де n_1 – кількість точок розбиття АНР-траси. Розподілення можна встановлювати автоматично і довільно, з будь-якою

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

кінцевою кількістю сегментів, довжини яких можуть бути різними залежно від рівня деталізації ділянок руху та вибору основних функцій та побудови на їх основі прийнятних залежностей їх наближення [11]. Одним із критеріїв визначення довжини елементів розподілення можуть бути амплітудні характеристики окремих тенденцій рухів АНР та інші [11].

Математичне формулювання задачі. Пряма неоднорідна початково-крайова задача визначення параметрів АНР Т-об'єкту може бути описана у вигляді системи рівнянь [9, 11]

$$\frac{\partial^2 u_j(t,z)}{\partial t^2} = b_j^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} + S_j^*(t,z), \quad z \in (l_{j-1}, l_j), \; j = \overline{1, n_1+1} \tag{1}$$

з однорідними початковими умовами

$$u_j(t,z)\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \qquad j = \overline{1, n_1+1} \tag{2}$$

та з однорідними крайовими умовами і системою інтерфейсних умов

$$\frac{\partial}{\partial z} u_1(t,z)_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} u_n(t,z)_{z=l} = 0, \tag{3}$$

$$\left[u_j(t,z) - u_j(t,z)\right]\Big|_{z=l_j} = 0, \quad , \left(b_{\text{j}}^2 \frac{\partial}{\partial z} u_k(t,z) - b_{\text{j+1}}^2 \frac{\partial}{\partial z} u_{j+1}(t,z)\right)\Bigg|_{z=l_j} = 0, \; j = \overline{1, n_1} \tag{4}$$

в багатокомпонентній області $D_{n_1}^+ = \left\{(t,z) : t \in (0;\text{T}), z \in I_{n_1} = \bigcup_{j=1}^{n_1+1} (l_{j-1}, l_j); \; l_0 = 0, \; l_{n_1+1} \equiv l < \infty \right\}$.

Система рівнянь (1) описує АНР-траєкторії тремору на кожному *j*-му сегменті траєкторії $j = \overline{1, n_1+1}$ залежно від сукупності сигналів $S_j^*(t,z)$, що поступають від ЕЕГ-сенсорів для визначеної множини нейровузлів КГМ, що здійснюють керування поведінкою досліджуваного Т-об'єкта.

У формулах (1)–(4) компоненти фазової швидкості поширення хвиль АНР, які є амплітудними характеристиками хвильового тремор-руху, позначені як b_{j}, $j = \overline{1, n_1+1}$. Адаптивна матриця $S_j^*(\tau,\xi) = \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_{ji} S_i(\tau,\xi)$, $\left[\alpha_{ji}\right]$, $j = \overline{1, n_1}$, $i = \overline{1, n_2}$, визначає зв'язки і впливи нейровузлів КГМ на окремі сегменти АНР-траси.

Умови (3) та (4) забезпечують неперервність і цілісність розв'язку задачі для всієї багатокомпонетної області її визначення.

Побудова аналітичного розв'язку крайової задачі АНР.

Аналітичний розв'язок прямої неоднорідної задачі (1)–(4) доцільно будувати з використанням інтегрального гібридного перетворення Фур'є (ГІПФ) [9]. Назване перетворення містить гібридні інтегральні оператори, подані у матричній формі:

- прямої дії

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

$$F_{n_1}[...]=\left[\int_{l_0}^{l_1}...V_1(z,\beta_m)\sigma_1 dz\int_{l_1}^{l_2}...V_2(z,\beta_m)\sigma_2 dz...\int_{l_{n_1-1}}^{l_{n_1}}...V_{n_1}(z,\beta_m)\sigma_{n_1}dz\int_{l_{n_1}}^{l_{n_1+1}}...V_{n_1+1}(z,\beta_m)\sigma_{n_1+1}dz\right]; \tag{5}$$

- оберненої дії

$$F_{n_1}^{-1}[...]=\begin{bmatrix}\sum_{m=1}^{\infty}...V_1(z,\beta_m)\left(\left\|V(z,\beta_m)\right\|^2\right)^{-1}\\ \sum_{m=1}^{\infty}...V_2(z,\beta_m)\left(\left\|V(z,\beta_m)\right\|^2\right)^{-1}\\ .....\\ \sum_{m=1}^{\infty}...V_{n_1+1}(z,\beta_m)\left(\left\|V(z,\beta_m)\right\|^2\right)^{-1}\end{bmatrix}, \tag{6}$$

де $\left[V_k(z,\beta_m)\right]$ $\left(k=\overline{1,n_1+1}\right)$ – вектор гібридної спектральної функції гібридного інтегрального перетворення, який містить компоненти

$$\begin{bmatrix}V_1(z,\beta_m)\\ ...\\ V_k(z,\beta_m)\\ ...\\ V_{n_1+1}(z,\beta_m)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\prod_{i=1}^{n_1}\xi_{i+1}\frac{\beta_m}{b_{i+1}}\left(\omega_0^2(\beta_m)\vartheta_1^{11}\left(\frac{\beta_m}{b_1}z\right)-\omega_0^1(\beta_m)\vartheta_1^{21}\left(\frac{\beta_m}{b_1}z\right)\right)\\ ...\\ \prod_{i=k}^{n_1}\xi_{i+1}\frac{\beta_m}{b_{i+1}}\left(\omega_{k-1}^2(\beta_m)\vartheta_k^{11}\left(\frac{\beta_m}{b_k}z\right)-\omega_{k-1}^1(\beta_m)\vartheta_k^{21}\left(\frac{\beta_m}{b_k}z\right),\ k=\overline{2,n_1}\right)\\ ...\\ \omega_{n_1}^2(\beta_m)\vartheta_{n_1+1}^{11}\left(\frac{\beta_m}{b_{n_1+1}}z\right)-\omega_{n_1}^1(\beta_m)\vartheta_{n_1+1}^{21}\left(\frac{\beta_m}{b_{n_1+1}}z\right)\end{bmatrix}; \tag{7}$$

$\{\beta_m\}_{m=0}^{\infty}$ – множина спектральних значень ГІПФ, які є коренями трансцендентного рівняння

$$\omega_{n_1}^2(\beta)\vartheta_{n+1}^{11}\left(\frac{\beta}{b_{n_1+1}}l_{n_1+1}\right)-\omega_{n_1}^1(\beta)\vartheta_{n_1+1}^{21}\left(\frac{\beta}{b_{n_1+1}}l_{n_1+1}\right)=0. \tag{8}$$

Перелічені перетворення авторами покладено в основу рекурентної методики обчислення компонентів гібридної спектральної функції АНР:

$$\omega_k^j(\beta)=\omega_{k-1}^2(\beta)\psi_{1j}^k\left(\frac{\beta}{b_k}l_k,\frac{\beta}{b_{k+1}}l_k\right)-\omega_{k-1}^1(\beta)\psi_{2j}^k\left(\frac{\beta}{b_k}l_k,\frac{\beta}{b_{k+1}}l_k\right);$$

$$\psi_{ij}^k\left(\frac{\beta}{b_k}l_k,\frac{\beta}{b_{k+1}}l_k\right)=\vartheta_k^{i1}\left(\frac{\beta}{b_k}l_k\right)\vartheta_k^{j2}\left(\frac{\beta}{b_{k+1}}l_k\right)-\vartheta_k^{i2}\left(\frac{\beta}{b_k}l_k\right)\vartheta_k^{j1}\left(\frac{\beta}{b_{k+1}}l_k\right),\quad i,j=\overline{1,2},\ k=\overline{1,n_1};$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

$$\vartheta_k^{11}\left(\frac{\beta}{b_s}l_k\right)=\cos\left(\frac{\beta}{b_s}l_k\right),\ \vartheta_k^{21}\left(\frac{\beta}{b_s}l_k\right)=\sin\left(\frac{\beta}{b_s}l_k\right);$$

$$\vartheta_k^{12}\left(\frac{\beta}{b_s}l_k\right)=-\xi_s\frac{\beta}{b_s}\sin\left(\frac{\beta}{b_s}l_k\right),\quad \vartheta_k^{22}\left(\frac{\beta}{b_s}l_k\right)=\xi_s\frac{\beta}{b_s}\cos\left(\frac{\beta}{b_s}l_k\right),\ s\in\{k,k+1\};$$

$$\omega_0^1(\beta)=-\vartheta_0^{11}\left(\frac{\beta}{b_1}l_0\right),\qquad \omega_0^2(\beta)=-\vartheta_0^{21}\left(\frac{\beta}{b_1}l_0\right);\ .$$

$$\sigma_j=\frac{1}{b_j^2},\ j=\overline{1,n_1}.$$

Перейдемо до матричної форми подання системи рівнянь (1) та умов (2) крайової задачі (1)–(4):

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b_1^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_1(t,z)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b_2^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_2(t,z)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b_{n_1+1}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_{n_1+1}(t,z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_1(t,z)\\ S_2(t,z)\\ \ldots\ldots\ldots\\ S_{n_1+1}(t,z)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}u_1(t,z)\\ u_2(t,z)\\ \ldots\ldots\ldots\\ u_{n_1+1}(t,z)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_1(t,z)\\ u_2(t,z)\\ \ldots\ldots\ldots\\ u_{n_1+1}(t,z)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=0 \tag{9}$$

До задачі (9) застосуємо інтегральний оператор ГІПФ прямої дії F_{n_1} (5):

$$F_{n_1}\left[L_{n_1}\left[u(z)\right]\right]=-\beta_m^2u_m,$$

де $L_{n_1}[...]=\sum_{j=1}^{n_1+1}b_j^2\theta\left(z-l_{j-1}\right)\theta\left(l_j-z\right)\frac{d^2}{dz^2}$ – гібридний диференціальний оператор Фур'є, θ – функція Гевісайда.

У результаті здійснення вказаних перетворень переходимо до задачі Коші:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta_m^2\right)u_m(t)=S_m^*(t);\qquad u_m(t)\big|_{t=0}=0,\qquad \frac{d}{dt}u_m(t)\big|_{t=0}=0.$$

У роботах [9, 11] показано, що розв'язком останньої задачі є функція:

$$u_m(t)=\int_0^t\frac{\sin\beta_m(t-\tau)}{\beta_m}S_m^*(\tau)\,d\tau \tag{10}$$

Єдиний розв'язок неоднорідної крайової задачі АНР (1)–(4) одержуємо після застосування до (10) оберненого інтегрального оператора ГІПФ $F_{n_1}^{-1}$ (6):

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

$$u_j(t,z)=\sum_{k=1}^{n_1+1}\int_0^t\int_{l_{k-1}}^{l_k}\mathcal{H}_{jk}(t-\tau,z,\xi)S_k^*(\tau,\xi)\sigma_k d\xi d\tau,\qquad j=\overline{1,n_1+1}. \tag{11}$$

У формулі (11) під знаком подвійного інтеграла знаходиться матриця

$$\mathcal{H}_{jk}(t,z,\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\beta_m t}{\beta_m}\frac{V_j(z,\beta_m)V_k(\xi,\beta_m)}{\left\|V(z,\beta_m)\right\|^2};\ j,\ k=\overline{1;n+1}; \tag{12}$$

елементами якої є відклики системи АНР (13) на вплив *k*-го сегмента результуючої дії сигналів S_k^* визначеної множини нейровузлів КГМ на *j*-сегменті траси АНР.

Ідентифікація амплітудних компонент АНР. Обернена неоднорідна крайова задача з урахуванням когнітивних feedback-впливів нейровузлів КГМ.

Вибір функціонала-нев'язки. Будемо вважати амплітудні компоненти фазової швидкості поширення хвилі АНР b_{k}, $k=\overline{1,n_1+1}$ в крайовій задачі (1)–(4) невідомими функціями від часу. Але на поверхнях областей $\gamma_k\subset\Omega_k$, $k=\overline{1,n_1+1}$, відомі розв'язки (траєкторії АНР)

$$u_k(t,z)\big|_{\gamma_k}=U_{l_k}(t,z)\big|_{\gamma_k}. \tag{13}$$

Таким чином, задача (1)–(4) та (13) полягає в знаходженні функцій b_{k}, $k=\overline{1,n_1+1}\in D$, де $D=\left\{\nu(t,z):\ \nu\big|_{\Omega_{k_T}}\in C\left(\Omega_{k_T}\right),\ \nu>0,\ k=\overline{1,n_1+1}\right\}$.

Величина відхилення шуканого розв'язку від слідів цього розв'язку на поверхнях γ_k визначається функціоналом-нев'язкою:

$$J(b_k)=\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{k=1}^{n+1}\left\|u_{s_k}(\tau,z,b_{\mathrm{k}})-U_k^*\right\|^2_{L_2(\gamma_k)}\sigma_k\,d\tau, \tag{14}$$

де $\|\varphi\|^2_{L_2(\gamma_k)}=\int_{\gamma_k}\varphi^2 d\gamma_k$ – квадрат норми, тому $\|\varphi\|_{L_2(\gamma_k)}=\left|\varphi(t,z)\right|_{z=\gamma_k}$.

Задача функціональної ідентифікації амплітудних параметрів АНР.

Існує необхідність подання розв'язку задачі (1)–(4) у формі реалізації процедури функціонального визначення амплітудних компонентів фазової швидкості поширення хвилі АНР b_k^2, $k=\overline{1,n_1+1}$ як функції часу та за умов, що відомі сліди розв'язку для кожного досить тонкого *k*-го сегмента, $k=\overline{1,n_1+1}$. Для досягнення цієї мети задача (1)–(4) може бути сформульована як пряма крайова задача:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_k(t,z)=b_k^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_k+S_k^*(t,z) \tag{15}$$

з початковими умовами:

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

$$u_k(t,z)\big|_{t=0}=0, \qquad \frac{\partial u_k}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\ \ k=\overline{1,n_1+1}; \tag{16}$$

та крайовими умовами на кожному з тонких сеґментів АНР по *z:*

$$u_{k-1}(t,z)\big|_{z=l_{k-1}}=U_{L_{l_{k-1}}}, \qquad u_k(t,z)\big|_{z=l_k}=U_{l_k},\ \ k=\overline{1,n_1+1}. \tag{17}$$

Задача (15)–(17) складається з системи однорідних початково-крайових задач для послідовних тонких сегментів АНР.

Вибір функціонала-нев'язки. Компоненти фазової швидкості поширення хвилі АНР b , $k=\overline{1,n_1+1}$ в крайовій задачі (15)–(17) є невідомими функціями, які залежать від часу. Для відомого положення пера $u_k(t,z)$ в точках спостереження на сегментах АНР $\gamma_k\subset\Omega_k$, $k=\overline{1,n_1+1}$

$$u_k(t,z)\big|_{\gamma_k}=U_{l_k}(t,z)\big|_{\gamma_k}. \tag{18}$$

Тому початково-крайова задача (15)–(17) може бути розглянута для кожної точки *z* для кожного тонкого k_1-го сегмента траси АНР. В цьому випадку вона полягає в знаходженні функцій $b_k\in D$, де $D=\left\{\nu(t,z):\ \nu\big|_{\Omega_{k_1T}}\in C\left(\Omega_{k_1T}\right),\ \nu>0,\ k=\overline{1,n_1+1}\right\}$.

У роботі [10] показано, що функціонал-нев'язка відхилення розв'язку від його слідів на $\gamma_{k_1}\in\Omega_{k_1}$ має вигляд:

$$J_k(b_{kk})=\frac{1}{2}\int_0^T\left(\left\|u_k(t,z,b_k)-U_k^*\right\|^2\right)dt. \tag{19}$$

Формули для компонентів градієнтів та регуляризаційні вирази

Формули для компонентів градієнтів. Згідно з [10–11] мають місце такі аналітичні вирази для компонентів ґрадієнтів функціонала-нев'язки:

$$\nabla J_{\tilde{b}_k}=\int_0^T\int_{l_{k-1}}^{l_k}\phi_k(t,z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_k(t,z)dzdt. \tag{20}$$

Як показано [6, 9], для задачі функціональної ідентифікації компоненти градієнтів функціонала-нев'язки задаються формулами:

$$\nabla J_{\tilde{b}_k}(t)=\int_{l_{k-1}}^{l_k}\phi_k(t,z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_k(t,z)dz; \tag{21}$$

$$\phi_k(t,z)=\frac{2}{\Delta h}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-\mathrm{ch}\left(b_k\beta_m(T-t)\right)}{\left(b_k\beta_m\right)^2}\sin\beta_m\gamma_k\sin\beta_m(z-l_{k-1})\left(U_k^*-u_{k_k}^n\right),\ \ k=\overline{1,n_1+1};$$

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

$$u_k(t,z)=\frac{2}{\Delta h}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1-\cos\left(b_k\beta_m t\right)}{\beta_m}\sin\beta_m\left(z-l_{k-1}\right)\left(S_k^*\frac{1}{\left(b_k\beta_m\right)^2}\left(\left(-1\right)^m-1\right)+U_{l_{k-1}}\left(1-\left(-1\right)^m\frac{U_{l_k}}{U_{l_{k-1}}}\right)\right);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_k(t,z)=-\frac{2}{\Delta h}\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m\left(1-\cos\left(b_k\beta_m t\right)\right)\sin\beta_m\left(z-l_{k-1}\right)\left(S_k^*\frac{1}{\left(b_k\beta_m\right)^2}\left(\left(-1\right)^m-1\right)+U_{l_{k-1}}\left(1-\left(-1\right)^m\frac{U_{l_k}}{U_{l_{k-1}}}\right)\right).$$

Регуляризаційні вирази для (*n*+1)-го кроку визначення ідентифікуючої функціональної залежності. Згідно з [10], з використанням методу мінімальних похибок для визначення залежності ідентифікації амплітудних компонетів фазової швидкості поширення хвилі АНР $\tilde{b}_k^{n+1}$ від часу для кожного *k*-го елемента АНР $k=\overline{1,n_1+1}$, отримаємо:

$$\tilde{b}_k^{n+1}(t)=\tilde{b}_k^n(t)-\nabla J_{b_k}^n(t)\frac{\left\|u_k^n\left(t,\gamma_k,\tilde{b}_k^n\right)-U_k^*\right\|^2}{\left\|\nabla J_{b_k}^n(t)\right\|_{\gamma_k}^2},\ t\in(0,T),\ k=\overline{1,n_1} \qquad (22)$$

Циклічні обчислення на основі пропорційного зменшення аналізованих масивів даних дозволяють ефективно аналізувати отримані результати. Оцінювання та порівняння здійснюються для кожної ітерації.

Висновки

Розроблено гібридну модель (нейро-feedback-система), що описує стан і поведінку тремор-об’єктів (Т-об’єктів) на базі поширення хвильового сигналу, тобто здійснюється посегментний опис 3D-елементів траєкторій АНР рухів через матриці когнітивних впливів груп нейровузлів КГМ. Розроблена методика дозволяє збільшити якість і точність ідентифікації та розпізнавання зв’язків і взаємовпливів, значно оптимізувати обсяги обчислень через їх розпаралелювання, зменшити кількість обчислювальних елементів, забезпечити реальний час при зростанні вимог до кількості даних, розробити платформо незалежні динамічні архітектури програмного забезпечення досліджуваних feedback-систем. В майбутньому планується уточнити розроблені математичні моделі за рахунок застосування штучного інтелекту, зокрема такої його «підгалузі», як нейромережі.

Для отримання позитивного ефекту від застосування штучного інтелекту необхідно накопичити суттєві об’єми тестових даних для аналізу. Мінімальна вибірка для навчання нейронної мережі передбачає наявність експериментальних даних після проходження процедури, що зображена на рис. 3, не менше, ніж 10 добровольцями (здоровими та з порушенням рухової активності). Дані для навчання попередньо забезпечуються маркерами рухів здорових людей та осіб, що мають профільні захворювання. За допомогою штучного інтелекту планується вивчення кореляції даних EEG сигналів з даними, отриманими за методикою, що використовує спіраль Архімеда.

Список використаних джерел

1. Rajaraman V., Jack D., Adamovich S. V., Hening W., Sage J., Poizner H. A Novel Quantitative Method for 3D Measurement of Parkinsonian Tremor. *Clinical Neurophysiology*. 2000. Vol. 11. Issue 2. P. 187–369.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

2. Haubenberger D., Kalowitz D., Nahab F. B, Toro C., Ippolito D., Luckenbaugh D. A., Wittevrongel L., Hallett M. Validation of Digital Spiral Analysis as Outcome Parameter for Clinical Trials in Essential Tremor. *Movement Disorders*. 2011. Vol. 26. Issue 11. P. 2073–2080.
3. Legrand A. P., Rivals I., Richard A., Apartis E., Roze E., Vidailhet M., Meunier S., Hainque E. New Insight in Spiral Drawing Analysis Methods – Application to Action Tremor Quantification. *Clinical Neurophysiology*. 2017. Vol. 128. Issue 10. P. 1823–1834.
4. Wang J.-S., Chuang F.-C. An Accelerometer-Based Digital Pen with a Trajectory Recognition Algorithm for Handwritten Digit and Gesture Recognition. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2012. Vol. 59. Issue 7. P. 2998–3007. DOI: 10.1109/TIE.2011.2167895.
5. Louis E. D., Gillman A., Böschung S., Hess C. W., Yu Q., Pullman S. L. High width Variability during Spiral Drawing: Further Evidence of Cerebellar Dysfunction in Essential Tremor. Cerebellum. 2012. Vol. 11. Issue 4. P. 872–879. DOI: 10.1007/s12311-011-0352-4.
6. Sergienko I. V., Deineka V. S. Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. 383 p.
7. Lions J.-L. Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal. New York: Springer, 2008. 645 p.
8. Sergienko. I. V., Petryk M. R, Leclerc S., Fraissard J. Highly Efficient Methods of the Identification of Competitive Diffusion Parameters in Inhomogeneous Media of Nanoporous Particles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51. Issue 4. P. 529–546. DOI: 10.1007/s10559-015-9744-7.
9. Ленюк М. П., Петрик М. Р. Методи інтегральних перетворень Фур'є-Бесселя в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах. Київ: Наукова думка, 2000. 372 с.
10. Хіміч О. М., Петрик М. Р., Михалик Д. М., Бойко І. В., Попов О. В., Сидорук В. А. Методи математичного моделювання та ідентифікації складних процесів і систем на основі високопродуктивних обчислень (нейро- та нанопористі кібер-фізичні системи із зворотніми зв'язками, моделі з даними розрідженої структури, паралельні обчислення). Київ: Національна Академія наук України, Інститут кібернетики імені В. В. Глушкова, 2019. 180 с.
11. Mykhalyk D., Mudryk I., Hoi A., Petryk M. Modern Hardware and Software Solution for Identification of Abnormal Neurological Movements of Patients with Essential Tremor. Proceeding of the *9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies* (Czech Republic, Budejovice, June 5-7, 2019). 2019. P. 183–186.

References

1. Rajaraman, V., Jack, D., Adamovich, S. V., Hening, W., Sage, J., & Poizner, H. (2000). A Novel Quantitative Method for 3D Measurement of Parkinsonian Tremor. *Clinical Neurophysiology*. **11**, 2, 187–369.
2. Haubenberger, D., Kalowitz, D., Nahab, F. B, Toro, C., Ippolito, D., Luckenbaugh, D. A., Wittevrongel, L., & Hallett, M. (2011). Validation of Digital Spiral Analysis as Outcome Parameter for Clinical Trials in Essential Tremor. *Movement Disorders*. **26**, 11, 2073–2080.
3. Legrand, A. P., Rivals, I., Richard, A., Apartis, E., Roze, E., Vidailhet, M., Meunier, S., & Hainque, E. (2017). New Insight in Spiral Drawing Analysis Methods – Application to Action Tremor Quantification. *Clinical Neurophysiology*. **128**, 10, 1823–1834.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22

4. Wang, J.-S., & Chuang, F.-C. (2012). An Accelerometer-Based Digital Pen with a Trajectory Recognition Algorithm for Handwritten Digit and Gesture Recognition. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. **59**, 7, 2998–3007. DOI: 10.1109/TIE.2011.2167895.
5. Louis, E. D., Gillman, A., Böschung, S., Hess, C. W., Yu, Q., & Pullman, S. L. (2012). High width Variability during Spiral Drawing: Further Evidence of Cerebellar Dysfunction in Essential Tremor. Cerebellum. **11**, 4, 872–879. DOI: 10.1007/s12311-011-0352-4.
6. Sergienko, I. V., & Deineka, V. S. (2005). Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. New York: Kluwer Academic Publishers.
7. Lions, J.-L. (2008). Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal. New York: Springer.
8. Sergienko, I. V., Petryk, M. R, Leclerc, S., & Fraissard, J. (2015). Highly Efficient Methods of the Identification of Competitive Diffusion Parameters in Inhomogeneous Media of Nanoporous Particles. *Cybernetics and Systems Analysis*. **51**, 4, 529–546. DOI: 10.1007/s10559-015-9744-7.
9. Leniuk, M. P., & Petryk, M. R. (2000). Metody intnhralnykh peretvoren Furie-Besselia v zadachakh matematychnoho modeliuvannia masoperenosu v neodnoridnykh seredovyshchakh. Kyiv: Naukova dumka.
10. Khimich, O. M., Petryk, M. R., Mykhalyk, D. M., Boyko, I. V., Popov, O. V., & Sydoruk, V. A. (2019). Metody matematychnoho modeliuvannia ta identyfikatsii skladnykh protsesiv i system na osnovi vysoproduktyvnykh obchyslen (neiro- ta nanoporysti kiber-fizychni systemy iz zvorotnimy zviazkamy, modeli z danymy rozridzhenoi struktury, paralelni obchyslennia). Kyiv: Natsionalna Akademiia nauk Ukrainy. Instytut kibernetyky imeni V. V. Hlushkova.
11. Mykhalyk, D., Mudryk, I., Hoi, A., & Petryk, M. (2019). Modern Hardware and Software Solution for Identification of Abnormal Neurological Movements of Patients with Essential Tremor. Proceeding of the *9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies* (Czech Republic, Budejovice, June 5-7, 2019), pp. 183–186.

Петрик Михайло Романович – д.ф.-м.н., професор кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, e-mail: mykhaylo_petryk@tntu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-6612-7213.

Мудрик Іван Ярославович – аспірант кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, e-mail: i1mudryk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4305-1911.

Михалик Дмитро Михайлович – к.т.н., доцент кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, e-mail: mddm@ukr.net, ORCID: 0000-0001-9032-695X.

Петрик Оксана Юліанівна – старший викладач кафедри комп'ютерних систем та мереж Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, e-mail: petryk@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2167-4410.

Биць Тарас Петрович – аспірант кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, e-mail: byts.taras@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8827-0894.

https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.22