

УДК 514.18+721.02.23

А. Ю. БРАЙЛОВ, В. И. ПАНЧЕНКО

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

### КОМБИНИРОВАННАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ОПТИМИЗАЦИОННОМ ПОДХОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕДОСТУПНОЙ ТОЧКИ ОБЪЕКТА

*В настоящем исследовании разработаны комбинированная геометрическая модель и оптимизационный подход к определению параметров недоступной точки объекта.*

*Выявлена проблема и поставлены первостепенные задачи.*

*Суть проблемы – объективное противоречие между необходимостью получения точного значения определяемого параметра и наличием погрешности при любом измерении.*

*Цель настоящей работы — разработать комплексно комбинированную трехмерную геометрическую и аналитическую модели определения минимальной области (окрестности) значений параметров недоступной точки объекта.*

*Задачи статьи:*

*1. Разработать комбинированную трехмерную геометрическую модель со скрещивающимися визирными лучами для бесконтактного определения координат недоступной точки объекта при заданном расположении геодезического оборудования.*

*2. Разработать оптимизационную аналитическую модель определения области (окрестности) значений параметров недоступной точки объекта в соответствии с предложенной трехмерной геометрической моделью со скрещивающимися визирными лучами.*

*В предлагаемом оптимизационном подходе разработана комбинированная трехмерная геометрическая модель со скрещивающимися визирными лучами для определения координат недоступных точек объекта.*

*Определяемая точка  $C$  располагается в области  $[C_{DM}, C_{EM}]$  минимального расстояния  $\rho_{min}$  между скрещивающимися визирными лучами.*

*Оптимизационная задача определения координат недоступной точки объекта в пространстве сводится к задаче определения минимального расстояния между двумя скрещивающимися визирными лучами.*

*Задача имеет единственное решение, если визирные лучи не параллельны.*

*Поиск экстремума функции расстояния между двумя визирными лучами, и именно минимума, имеет реальную геометрическую интерпретацию.*

*Функция расстояния  $\rho=f(t_{CD}, t_{CE})$  достигает своего экстремума  $\rho_{min}$ , когда её частные производные по каждой переменной равны нулю. Поэтому решается система дифференциальных уравнений.*

*Искомая точка  $C(x_C, y_C, z_C)$  может, например, располагаться в середине минимального отрезка  $[C_{DM}, C_{EM}]$ .*

*Предложенный теоретический подход проверен на реальных экспериментальных данных при восстановлении Спасо-Преображенского собора в городе Одессе, Украина. Определялись координаты самой высокой точки колоны пилястра  $C$  и точки  $C'$  уровня земли относительно горизонтальной плоскости с нулевыми визирными лучами.*

*Ключевые слова: объект; точка; экстремум; визирный луч; координаты точки; геометрическая модель; аналитическая модель.*

## КОМБІНОВАНА ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ В ОПТИМІЗАЦІЙНОМУ ПІДХОДІ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕДОСТУПНОЇ ТОЧКИ ОБ'ЄКТА

У даному дослідженні розроблені комбінована геометрична модель та оптимізаційний підхід для визначення параметрів недоступної точки об'єкта. Виявлено проблему і поставлені першочергові задачі.

Суть проблеми: об'єктивне протиріччя між необхідністю отримання точного значення потрібного параметра і наявністю похибок при будь-якому вимірюванні.

Мета дослідження – розробити комплексно комбіновану тривимірну геометричну і аналітичну моделі визначення мінімальної області значень параметрів недоступної точки об'єкта.

Завдання статті:

1. Розробити комбіновану тривимірну геометричну модель з перехресними візирними променями для безконтактного визначення координат недоступної точки об'єкта при заданому розташуванні геодезичного обладнання.

2. Розробити оптимізаційну аналітичну модель визначення області значень параметрів недоступної точки об'єкта відповідно до запропонованої тривимірної геометричної моделі з перехресними візирними променями.

У запропонованому оптимізаційному підході розроблена комбінована тривимірна геометрична модель з перехресними візирними променями для визначення координат недоступних точок об'єкта.

Обумовлена точка  $C$  розташовується в області  $[C_{DM}, C_{EM}]$  мінімальної відстані  $\rho_{min}$  між перехресними візирними променями.

Оптимізаційна задача визначення координат недоступної точки об'єкта в просторі зводиться до задачі визначення мінімальної відстані між двома перехресними візирними променями.

Завдання має єдине рішення, якщо візирні промені не паралельні.

Пошук екстремуму функції відстані між двома візирними променями, і саме мінімуму, має реальну геометричну інтерпретацію.

Функція відстані  $\rho=f(t_{CD}, t_{CE})$  досягає свого екстремуму  $\rho_{min}$ , коли її часткові похідні по кожній змінній дорівнюють нулю. Тому вирішується система диференціальних рівнянь.

Шукана точка  $C(x_C, y_C, z_C)$  може, наприклад, розташовуватися в середині мінімального відрізка  $[C_{DM}, C_{EM}]$ .

Запропонований теоретичний підхід перевірений на реальних даних при відновленні Спасо-Преображенського собору в місті Одесі, Україна.

Визначалися координати найвищої точки колони пілястра  $C$  і точки  $C'$  рівня землі відносно горизонтальної площини з нульовими візирними променями.

Ключові слова: об'єкт; точка; екстремум; візирний промінь; координати точки; геометрична модель; аналітична модель.

A. Yu. BRAILOV, V. I. PANCHENKO  
Odessa State Academy of Civil Building and Architecture

## THE COMBINED GEOMETRICAL MODEL IN THE OPTIMIZING APPROACH TO DETERMINATION THE PARAMETERS OF AN INACCESSIBLE POINT OF AN OBJECT

*In the present research the combined geometrical model and the optimizing approach to the determination of the parameters of an inaccessible point of an object is developed. The common issues are revealed and essential steps of their resolution are identified.*

*The essence of the problem is that the unavoidable contradiction between a need of obtaining the exact value of the determined parameter and an error involved in any measurement.*

*The purpose of the present work is to develop in a complex the combined three-dimensional geometrical and analytical models of the determination of the minimum domain (area, vicinity) of values of the parameters of an inaccessible point of an object.*

*It is achieved in two steps:*

*1. Development of a combined three-dimensional geometrical model with crossed directional rays for contactless determination of the coordinates of an inaccessible point of an object under a given arrangement of the geodetic equipment.*

*2. Development of an optimizing analytical model for the determination of domain (area, vicinity) of values of parameters of an inaccessible point of an object according to the developed three-dimensional geometrical model with crossed directional rays.*

*In the proposed optimizing approach, the combined three-dimensional geometrical model with crossed directional rays for the determination of coordinates of the inaccessible points of an object is developed. It is discussed that point  $C$ , coordinated of which to be determined, locates in domain  $[C_{DM}, C_{EM}]$  of the minimum distance  $\rho_{min}$  between crossed directional rays.*

*The optimizing problem of the determination of coordinates of an inaccessible point of an object in space is reduced to a problem of the determination of the minimum distance between two crossed directional rays.*

*It is shown that the problem has a unique solution if the directional rays are not parallel. It is discussed that mathematical finding of an extremum of function of the distance between two directional rays, and the discussed minimum, has real geometrical interpretation.*

*It's known from the theory of function of multiple variables that function  $f(t_{CD}, t_{CE})$  reaches its extremum  $\rho_{min}$  when its partial derivatives by each variable are equal to zero. Therefore, the system of the differential equations solved.*

*The required point  $C(x_C, y_C, z_C)$  can be located, for example, in the middle of the minimum segment  $[C_{DM}, C_{EM}]$ .*

*The proposed theoretical approach is verified using real experimental data at restoration of the Spaso-Preobrazhenskiy cathedral in the city of Odessa, Ukraine.*

*Coordinates of the highest point of the colon of a pilaster  $C$  and points  $C'$  level of the earth concerning a horizontal plane with zero directional rays were determined.*

*Keywords; an object; point; extremum; directional ray; collimating ray; coordinates of a point; geometrical model; analytical model.*

### Постановка проблеми

Формирование паспорта реконструируемых или восстанавливаемых исторических объектов предполагает определение их геометрических параметров. Такими параметрами являются высота объекта и размеры охранной зоны.

Основная проблема заключается в объективном противоречии между необходимостью получения точного значения определяемого параметра и наличием погрешности при любом измерении.

### Анализ последних исследований и публикаций

В предыдущих исследованиях реализована попытка получить аналитически точный результат для геометрической модели измерений с пересекающимися в требуемой точке визирными лучами [1–3].

Для предложенной геометрической модели измерений (рис. 1) разработан алгоритм расчета параметров недоступной точки объекта [4].

Разработанная алгоритмически корректная аналитическая модель [3–4], при обработке результатов экспериментальных измерений, показала необходимость перехода к комбинированной геометрической модели со скрещивающимися визирными лучами и созданию аналитической модели для определения минимальной области, в которой находится исследуемая точка объекта.

### Цель исследования

Цель настоящего исследования – разработать комплексно комбинированную трехмерную геометрическую и аналитическую модели определения минимальной области (окрестности) значений параметров недоступной точки объекта.

Задачи статьи: 1. Разработать комбинированную трехмерную геометрическую модель со скрещивающимися визирными лучами для бесконтактного определения координат недоступной точки объекта при заданном расположении геодезического оборудования. 2. Разработать оптимизационную аналитическую модель определения области (окрестности) значений параметров недоступной точки объекта в соответствии с предложенной комбинированной трехмерной геометрической моделью со скрещивающимися визирными лучами.

### Изложение основного материала исследования

В предлагаемом оптимизационном подходе разработана комбинированная трехмерная геометрическая модель определения координат недоступной точки объекта (рис. 2).

Комбинированная трехмерная геометрическая модель представляет собой объединение верхней геометрической модели, расположенной выше горизонтальной плоскости с нулевыми визирными лучами (рис. 1), и геометрической модели, являющейся симметричным отображением верхней модели относительно горизонтальной плоскости (рис. 2).

Разработанная комбинированная геометрическая модель отображает наиболее общий вариант расположения объекта относительно прибора.

Координаты  $x_{CD}, y_{CD}, z_{CD}$ , любой точки  $C_D(x_{CD}, y_{CD}, z_{CD})$  визирного луча  $AD$  можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{CD} = r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D \\ y_{CD} = r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D \\ z_{CD} = r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D \end{cases} \quad (1)$$

где  $t_{CD}$  – значение параметра  $t_D$ , определяющего положение любой точки  $C_D$  на луче  $AD$ .

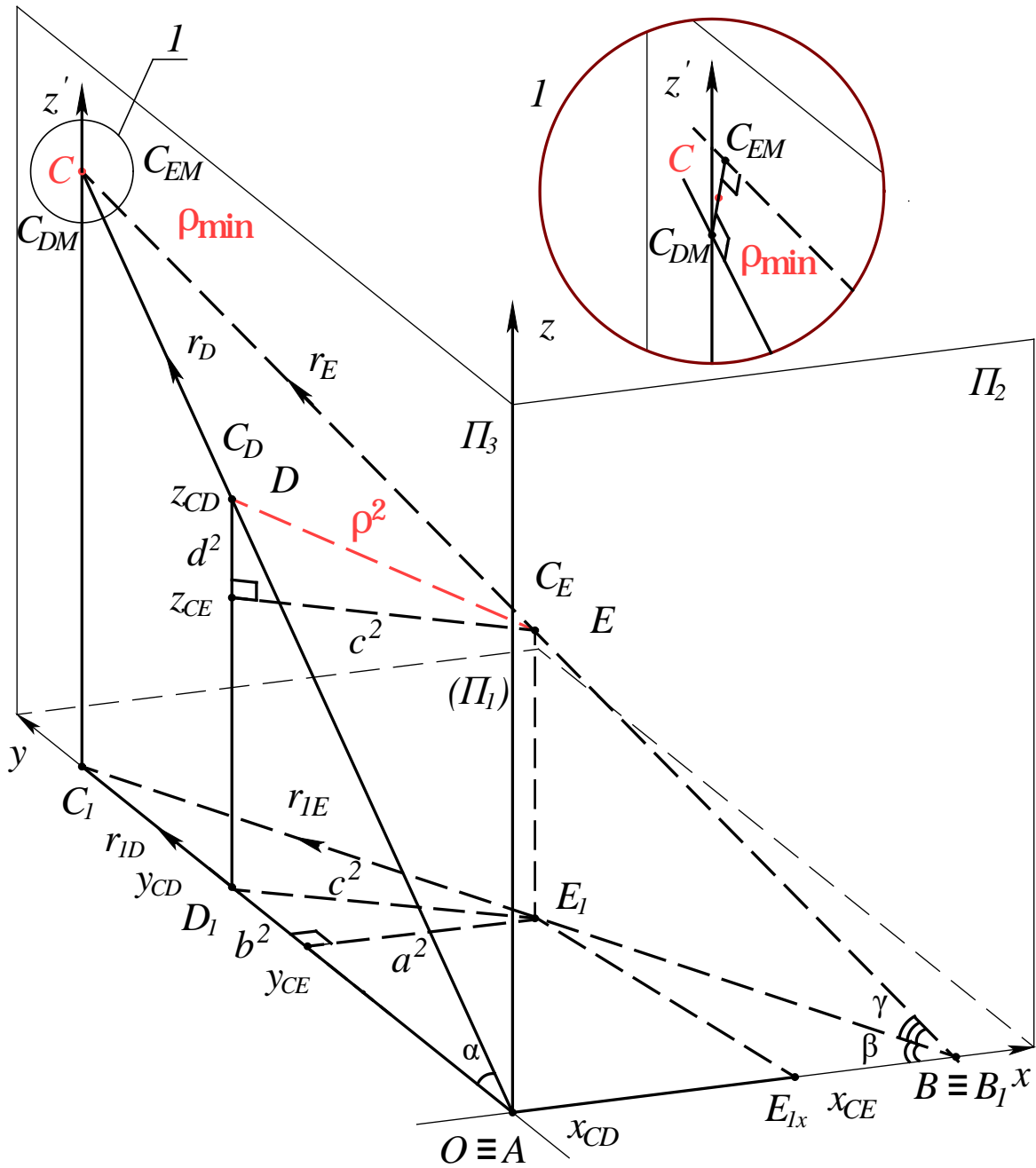


Рис. 1. Геометрическая модель расстояния между двумя точками  $CD, CE$  визирных лучей  $AD$  и  $BE$ .

Координаты  $x_{CE}, y_{CE}, z_{CE}$  любой точки  $C_E(x_{CE}, y_{CE}, z_{CE})$  визирного луча  $BE$  можно описать системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{CE} = r_{Ex} \cdot t_{CE} + x_E \\ y_{CE} = r_{Ey} \cdot t_{CE} + y_E, \\ z_{CE} = r_{Ez} \cdot t_{CE} + z_E \end{cases} \quad (2)$$

где  $t_{CE}$  – значение параметра  $t_E$ , определяющего положение любой точки  $C_E$  на луче  $BE$ .

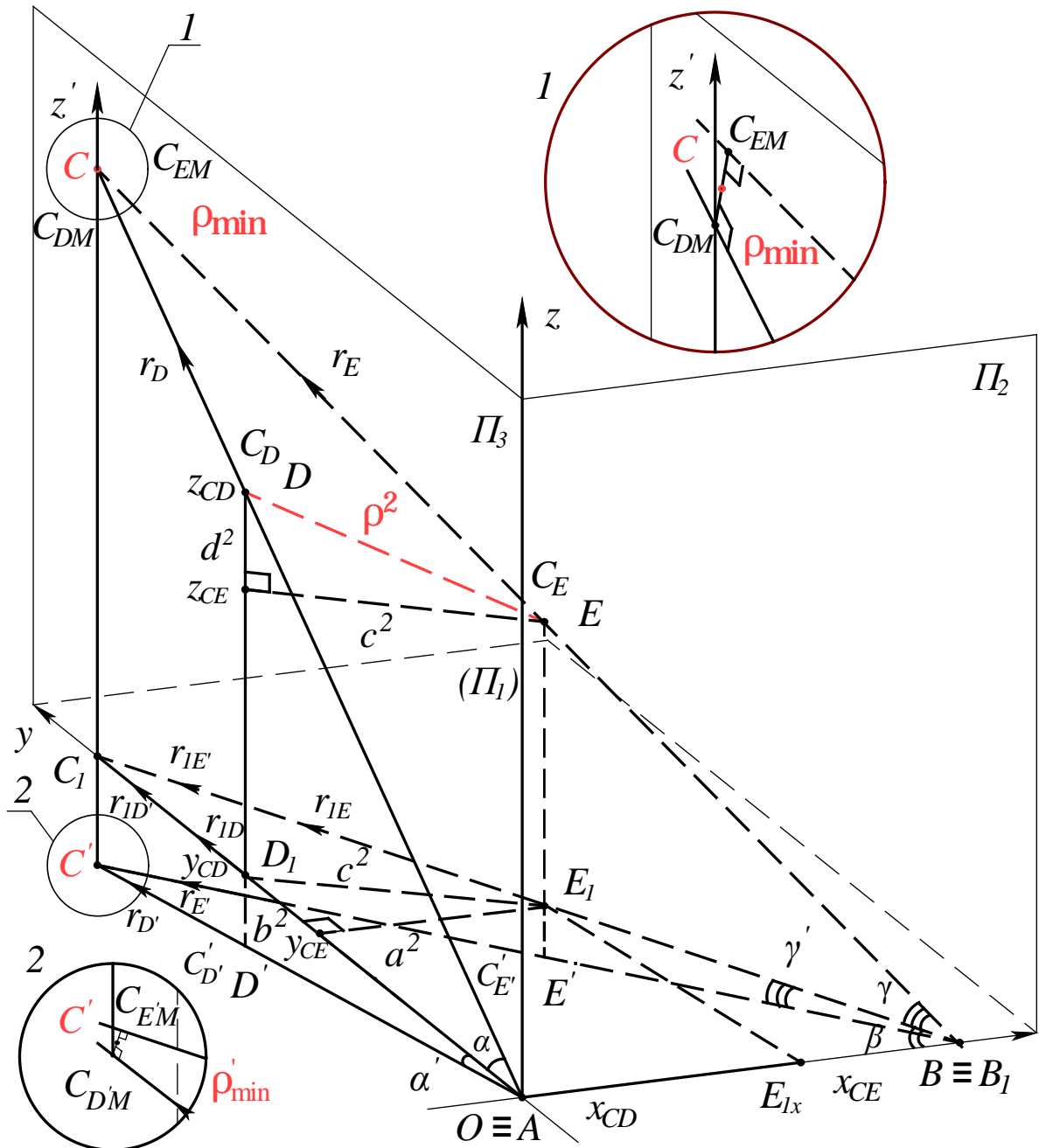


Рис. 2. Комбинированная геометрическая модель для определения расстояния между двумя точками  $C$  и  $C'$ .

Квадрат величины расстояния  $[\rho(C_D, C_E)]^2$  между любыми двумя точками  $C_D(x_{CD}, y_{CD}, z_{CD})$ ,  $C_E(x_{CE}, y_{CE}, z_{CE})$  различных визирных лучей  $AD$ ,  $BE$  в декартовом трехмерном пространстве представляется суммой квадратов разностей соответствующих координат этих точек:

$$f = [\rho(C_D, C_E)]^2 = (x_{CD} - x_{CE})^2 + (y_{CD} - y_{CE})^2 + (z_{CD} - z_{CE})^2 \quad (3)$$

Запишем расстояние между двумя любыми точками  $C_D$  и  $C_E$  двух различных визирных лучей в параметрической форме, подставляя в выражение (3) значения координат этих точек из систем уравнений (1) и (2):

$$\begin{aligned} \bar{f} &= [\rho(C_D, C_E)]^2 = (x_{CD} - x_{CE})^2 + (y_{CD} - y_{CE})^2 + (z_{CD} - z_{CE})^2 = \\ &= (r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D - r_{Ex} \cdot t_{CE} - x_E)^2 + (r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D - r_{Ey} \cdot t_{CE} - y_E)^2 + \\ &+ (r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D - r_{Ez} \cdot t_{CE} - z_E)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку реальные измерения углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и расстояния  $AB$  (рис. 1) осуществляются с погрешностями и значения этих параметров дробные числа, визирные лучи  $AD$  и  $BE$ , как правило, скрещиваются, а не пересекаются в определяемой точке  $C$ . Скрещивающиеся визирные лучи  $AD$  и  $BE$  имеют соответственно две точки  $C_{DM}$  и  $C_{EM}$ , между которыми расстояние  $\rho$  минимально  $\rho_{min}$  (рис. 1, 2).

Наиболее вероятно, что определяемая точка  $C$  располагается в области  $[C_{DM}, C_{EM}]$  минимального расстояния  $\rho_{min}$  между скрещивающимися визирными лучами. Таким образом, задача определения координат недоступной точки объекта в пространстве, на первом этапе, сводится к задаче определения минимального расстояния между двумя скрещивающимися визирными лучами:

$$\bar{f} = [\rho(C_D, C_E)]^2 = f(t_{CD}, t_{CE}) \rightarrow \min. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) видно, что расстояние  $\rho(C_D, C_E)$  между двумя любыми точками  $C_D$  и  $C_E$  двух различных визирных лучей  $AD$  и  $BE$  есть функция от двух переменных  $f(t_{CD}, t_{CE})$ . Такими переменными являются параметры  $t_{CD}$  и  $t_{CE}$  двух лучей  $AD$  и  $BE$  соответственно. Следовательно, задача сводится к определению таких значений параметров  $t_{CD}$  и  $t_{CE}$ , при которых расстояние  $\rho$  (4) между двумя визирными лучами минимально  $\rho_{min}$ . Причем, задача имеет единственное решение, если визирные лучи не параллельны. Поиск экстремума функции расстояния (4) между двумя визирными лучами, и именно минимума, имеет реальную геометрическую интерпретацию.

Из теории функции нескольких переменных известно, что функция  $f(t_{CD}, t_{CE})$  достигает своего экстремума, когда её частные производные по каждой переменной равны нулю [5]. Следовательно, для определения значений параметров  $t_{CD}$  и  $t_{CE}$ , при которых расстояние между скрещивающимися визирными лучами минимально, необходимо решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{df(t_{CD}, t_{CE})}{dt_{CD}} = 0 \\ \frac{df(t_{CD}, t_{CE})}{dt_{CE}} = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Дифференцируя функцию расстояния (4) по переменным  $t_{CD}$  и  $t_{CE}$ , систему уравнений (6) представим в виде (7):

$$\begin{cases} 2(r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D - r_{Ex} \cdot t_{CE} - x_E) \cdot r_{Dx} + \\ + 2(r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D - r_{Ey} \cdot t_{CE} - y_E) \cdot r_{Dy} + \\ + 2(r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D - r_{Ez} \cdot t_{CE} - z_E) \cdot r_{Dz} = 0 \\ 2(r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D - r_{Ex} \cdot t_{CE} - x_E) \cdot (-r_{Ex}) + \\ + 2(r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D - r_{Ey} \cdot t_{CE} - y_E) \cdot (-r_{Ey}) + \\ + 2(r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D - r_{Ez} \cdot t_{CE} - z_E) \cdot (-r_{Ez}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Разделив каждое из уравнений системы (7) на два и сгруппировав члены с переменными  $t_{CD}$  и  $t_{CE}$ , получим систему из двух линейных уравнений (8):

$$\begin{cases} (r_{Dx}^2 + r_{Dy}^2 + r_{Dz}^2) \cdot t_{DC} - (r_{Ex} \cdot r_{Dx} + r_{Ey} \cdot r_{Dy} + r_{Ez} \cdot r_{Dz}) \cdot t_{CE} = \\ = -[(x_D - x_E) \cdot r_{Dx} + (y_D - y_E) \cdot r_{Dy} + (z_D - z_E) \cdot r_{Dz}] \\ - (r_{Dx} \cdot r_{Ex} + r_{Dy} \cdot r_{Ey} + r_{Dz} \cdot r_{Ez}) \cdot t_{CD} + (r_{Ex}^2 + r_{Ey}^2 + r_{Ez}^2) \cdot t_{CE} = \\ = (x_D - x_E) \cdot r_{Ex} + (y_D - y_E) \cdot r_{Ey} + (z_D - z_E) \cdot r_{Ez} \end{cases} \quad (8)$$

Запишем систему линейных уравнений (8) в классическом виде (9) для применения формул Крамера [6]:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot t_{CD} + a_{12} \cdot t_{CE} = C_1 \\ a_{21} \cdot t_{CD} + a_{22} \cdot t_{CE} = C_2 \end{cases}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (r_{Dx}^2 + r_{Dy}^2 + r_{Dz}^2), \quad a_{22} = (r_{Ex}^2 + r_{Ey}^2 + r_{Ez}^2), \\ a_{12} &= a_{21} = -(r_{Ex} \cdot r_{Dx} + r_{Ey} \cdot r_{Dy} + r_{Ez} \cdot r_{Dz}), \\ C_1 &= -[(x_D - x_E) \cdot r_{Dx} + (y_D - y_E) \cdot r_{Dy} + (z_D - z_E) \cdot r_{Dz}], \\ C_2 &= [(x_D - x_E) \cdot r_{Ex} + (y_D - y_E) \cdot r_{Ey} + (z_D - z_E) \cdot r_{Ez}]. \end{aligned}$$

Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений (8), представленных в виде системы (9), имеют вид (10):

$$t_{CD} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad t_{CE} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} C_1 & a_{12} \\ C_2 & a_{22} \end{vmatrix} = C_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot C_2, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & C_1 \\ a_{21} & C_2 \end{vmatrix} = C_2 \cdot a_{11} - a_{21} \cdot C_1. \end{aligned}$$

Значения параметров  $t_{CD}$  и  $t_{CE}$ , полученные по формулам (10), являются значениями параметров  $t_{DM}$  и  $t_{EM}$ , при которых расстояние между скрещивающимися лучами  $AD$  и  $BE$  (рис. 1) минимально:

$$t_{DM} = t_{CD} \text{ и } t_{EM} = t_{CE}. \quad (11)$$



Координаты  $x_{DM}, y_{DM}, z_{DM}$  (12),  $x_{EM}, y_{EM}, z_{EM}$  (13) точек  $C_{DM}(x_{DM}, y_{DM}, z_{DM}), C_{EM}(x_{EM}, y_{EM}, z_{EM})$ , для которых расстояние  $\rho(C_{DM}, C_{EM})$  между двумя скрещивающимися лучами  $AD$  и  $BE$  минимально  $\rho_{min}$ , получаются подстановкой значений выражений (11) в системы уравнений (1) и (2) соответственно:

$$\begin{cases} x_{DM} = r_{Dx} \cdot t_{DM} + x_D \\ y_{DM} = r_{Dy} \cdot t_{DM} + y_D \\ z_{DM} = r_{Dz} \cdot t_{DM} + z_D \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x_{EM} = r_{Ex} \cdot t_{EM} + x_E \\ y_{EM} = r_{Ey} \cdot t_{EM} + y_E \\ z_{EM} = r_{Ez} \cdot t_{EM} + z_E \end{cases} \quad (13)$$

Точки  $C_{DM}(x_{DM}, y_{DM}, z_{DM}), C_{EM}(x_{EM}, y_{EM}, z_{EM})$  являются граничными точками отрезка  $[C_{DM}, C_{EM}]$  с минимальным расстоянием между скрещивающимися визирными лучами  $AD$  и  $BE$  (Рис. 1, 2).

Искомая точка  $C(x_C, y_C, z_C)$  может, например, располагаться в середине минимального отрезка  $[C_{DM}, C_{EM}]$ . Тогда формулы для расчета координат  $x_C, y_C, z_C$  такой "единственной" точки имеют вид:

$$x_C = (x_{DM} + x_{EM}) / 2, \quad (14)$$

$$y_C = (y_{DM} + y_{EM}) / 2, \quad (15)$$

$$z_C = (z_{DM} + z_{EM}) / 2. \quad (16)$$

Для разработанной геометрической модели измерений (рис. 1) координату  $x_C$  точки  $C$  целесообразно принимать равной нулю ( $x_C=0$ ), так как визирный луч  $AD$  принадлежит плоскости  $ADC$ . Все точки плоскости  $ADC$  с визирным лучом  $AD$  имеют координату абсцисс со значением ноль.

Предлагаемый теоретический подход экспериментально проверен при восстановлении Спасо-Преображенского собора в городе Одессе, Украина (рис. 3). Определялись координаты самой высокой точки колоны пилястра  $C$  и точки  $C'$  уровня земли относительно горизонтальной плоскости с нулевыми визирными лучами.

Пилястр выполнен в форме колоны ионического ордера [7].

На основании прямых измерений шести параметров и данных разработанной комбинированной геометрической модели определяются значения координат шести исходных точек. Координаты этих шести точек являются исходными данными для решения поставленной задачи: определения расстояния от верхней точки колоны пилястра  $C$  до уровня земли  $C'$ .

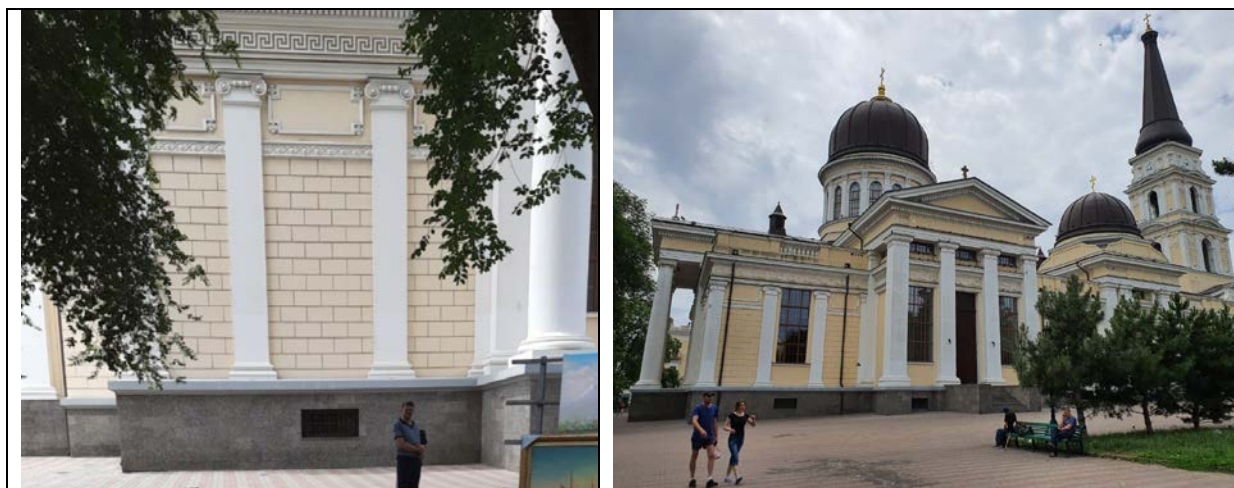


Рис. 3. Спасо-Преображенского собор в городе Одессе, Украина.

В соответствии с предложенной геометрической моделью (Рис. 2) для определения параметров точки  $C$  экспериментально тахеометром ES series №13813 JIS C6802:2005 измерены углы  $\alpha=21,23^\circ$ ,  $\beta=44,65^\circ$ ,  $\gamma=15,18^\circ$  и расстояние между точками  $A$  и  $B$  —  $AB=23916$  мм. Расстояние между точками  $A$  и  $D_I$  принималось равным 10000 мм и между точками  $B$  и  $E_I$  15000 мм —  $y_D=AD_I=10000$  мм,  $BE_I=15000$  мм.

В соответствии с разработанной трехмерной геометрической моделью измерений (Рис. 1) все три координаты точки  $A$  равны нулю —  $x_A=0$ ,  $y_A=0$ ,  $z_A=0$ .

Координаты  $y_B$  и  $z_B$  точки  $B$  и координата  $x_D$  точки  $D$  также равны нулю —  $y_B=0$ ,  $z_B=0$ ,  $x_D=0$ .

Координата  $z_D$  точки  $D$  и координаты  $y_E$ ,  $z_E$  и  $x_E$  точки  $E$  рассчитываются по формулам:  $z_D=|AD_I| \cdot \operatorname{tg}\alpha=3885,44$  мм;  $y_E=|BE_I| \cdot \sin\beta=10541,61$  мм;  $z_E=|BE_I| \cdot \operatorname{tg}\gamma=4070,73$  мм;  $x_E=|AB|-|BE_I| \cdot \cos\beta=13244,8$  мм.

На основании полученных координат всех четырех исходных точек  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$ ,  $D(x_D, y_D, z_D)$ ,  $E(x_E, y_E, z_E)$  решается задача определения минимального расстояния между скрещивающимися визирными лучами  $AD$  и  $BE$  (рис. 1).

Рассчитываются координаты  $x_{DM}$ ,  $y_{DM}$ ,  $z_{DM}$ ,  $x_{EM}$ ,  $y_{EM}$ ,  $z_{EM}$  точек  $C_{DM}(x_{DM}, y_{DM}, z_{DM})$ ,  $C_{EM}(x_{EM}, y_{EM}, z_{EM})$  для которых расстояние  $\rho(C_{DM}, C_{EM})$  между двумя скрещивающимися лучами  $AD$  и  $BE$  минимально  $\rho_{min}$  —  $x_{DM}=0$  мм;  $y_{DM}=23606,44$  мм;  $z_{DM}=9172,14$  мм;  $x_{EM}=0,12$  мм;  $y_{EM}=23625,47$  мм;  $z_{EM}=9123,16$  мм.

Пусть искомая точка  $C(x_C, y_C, z_C)$  располагается в середине минимального отрезка  $[C_{DM}, C_{EM}]$  и её отклонение от профильной плоскости находится в пределах одного процента срединного отклонения по оси абсцисс  $Ox$ . Тогда её координаты легко рассчитываются —  $x_C=0,0005$  мм,  $y_C=23615,95$  мм,  $z_C=9147,65$  мм.

Абсолютная погрешность расчетов по каждой из координат составляет  $\Delta x=0,0005$  мм,  $\Delta y=19,03$  мм,  $\Delta z=48,98$  мм. Относительная погрешность решения экстремальной задачи равна  $\Sigma x=0,9\%$ ,  $\Sigma y=0,08\%$ ,  $\Sigma z=0,5\%$ .

В соответствии с предложенной геометрической моделью (рис. 2) для определения параметров точки  $C'$  экспериментально тахеометром ES series №13813 JIS C6802:2005 измерены углы  $\alpha'=2,75^\circ$ ,  $\beta=44,65^\circ$ ,  $\gamma'=1,95^\circ$ .

Координата  $x_{D'}$  точки  $D'$  равна нулю —  $x_{D'}=0$ . Координата  $z_{D'}$  точки  $D'$  и координаты  $y_{E'}$ ,  $z_{E'}$  и  $x_{E'}$  точки  $E'$  рассчитываются по формулам —  $z_{D'}=|AD_I| \cdot \operatorname{tg}\alpha'=480,33$  мм;  $y_{E'}=|BE_I| \cdot \sin\beta=10541,61$  мм;  $z_{E'}=|BE_I| \cdot \operatorname{tg}\gamma'=510,71$  мм;  $x_{E'}=|AB|-|BE_I| \cdot \cos\beta=13244,8$  мм.

На основании полученных координат всех четырех исходных точек  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$ ,  $D'(x_{D'}, y_{D'}, z_{D'})$ ,  $E'(x_{E'}, y_{E'}, z_{E'})$  решается задача определения минимального расстояния между скрещивающимися визирными лучами  $AD'$  и  $BE'$  (Рис. 1).

Рассчитываются координаты  $x_{D'M}, y_{D'M}, z_{D'M}$ ,  $x_{E'M}, y_{E'M}, z_{E'M}$  точек  $C_{D'M}(x_{D'M}, y_{D'M}, z_{D'M})$ ,  $C_{E'M}(x_{E'M}, y_{E'M}, z_{E'M})$  для которых расстояние  $\rho(C_{D'M}, C_{E'M})$  между двумя скрещивающимися лучами  $AD'$  и  $BE'$  минимально  $\rho_{min}$  —  $x_{D'M}=0$  мм;  $y_{D'M}=23626,05$  мм;  $z_{D'M}=1134,84$  мм;  $x_{E'M}=0,004$  мм;  $y_{E'M}=23625,58$  мм;  $z_{E'M}=1144,58$  мм.

Пусть искомая точка  $C'(x_{C'}, y_{C'}, z_{C'})$  располагается в середине минимального отрезка  $[C_{D'M}, C_{E'M}]$  и её отклонение от профильной плоскости находится в пределах одного процента срединного отклонения по оси абсцисс  $Ox$ . Тогда её координаты легко рассчитываются —  $x_{C'}=0,00002$  мм,  $y_{C'}=23625,81$  мм,  $z_{C'}=1139,71$  мм.

Абсолютная погрешность расчетов по каждой из координат составляет  $\Delta x=0,00002$  мм,  $\Delta y=0,47$  мм,  $\Delta z=9,74$  мм. Относительная погрешность решения экстремальной задачи равна  $\Sigma x=0,9$  %,  $\Sigma y=0,002$  %,  $\Sigma z=0,85$  %.

Расстояние верхней точки колоны пилоэстра  $C$  от уровня земли  $C'$  равно 10287 мм.

### Выводы

1. Таким образом, только шесть параметров разработанной комбинированной геометрической модели определяются прямыми измерениями.
2. Значения двенадцати исходных параметров непосредственно позволяет задать предложенная геометрическая модель. И шесть параметров рассчитываются на основании измеренных параметров и простейших геометрических соотношений.
3. Предложенный оптимизационный подход имеет реальную геометрическую интерпретацию.
4. Абсолютная погрешность расчетов координат недоступной точки реконструируемого объекта приемлема в строительстве.
5. Низкая относительная погрешность (1%) расчетов координат недоступной точки доказывает высокую эффективность предложенного оптимизационного подхода.

### Список использованной литературы

1. Браилов А. Ю. Инженерная геометрия. Киев: Каравелла, 2016. 472 с.
2. Браилов А. Ю., Панченко В. И., Косенко С. И. Анализ геометрической модели определения параметров недоступной точки объекта. *Сучасні проблеми моделювання*. 2019. Вип. 14. С. 38–47.
3. Браилов А. Ю., Панченко В. И. Аналитическое основание геометрической модели измерений параметров недоступной точки объекта. *Вестник Херсонского национального технического университета*. 2019. Вып.2[69]. Часть 3. С. 237–243.
4. Браилов А. Ю., Панченко В. И. Алгоритм расчета параметров недоступной точки объекта. *Сучасні проблеми моделювання*. 2019. Вип. 16. С. 39–49.
5. Корн Г. А. Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
7. Герасимова Д. Л., Пороник И. Б. Справочник по архитектурным формам. Одесса: Астропринт, 2005. 140 с.

### References

1. Brailov, A. Yu. (2016). Inzhenernaya geometriya. Kiev: Karavella.

2. Brailov, A. Yu., Panchenko, V. I., & Kosenko, S. I. (2019). Analiz geometricheskoy modeli opredeleniya parametrov nedostupnoy toчки ob'ekta. *Suchasni problemy modeliuvannia*. **14**, 38–47.
3. Brailov, A. Yu., & Panchenko, V. I. (2019). Analiticheskoe osnovanie geometricheskoy modeli izmereniy parametrov nedostupnoy toчки ob'ekta. *Vestnik Hersonskogo natsionalnogo tehnikeskogo universiteta*. **2**(69), Part 3, 237–243.
4. Brailov, A. Yu., & Panchenko, V. I. (2019). Algoritm rascheta parametrov nedostupnoy toчки ob'ekta. *Suchasni problemy modeliuvannia*. **16**, 39–49.
5. Korn, G. A., & Korn, T. M. (1978). *Spravochnik po matematike dlya nauchnyih rabotnikov i inzhenerov*. M.: Nauka.
6. Bronshteyn, I. N., & Semendyaev, K. A. (1986). *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchaschihsya vtuzov*. M.: Nauka.
7. Gerasimova, D. L., & Poronik, I. B. (2005). *Spravochnik po arhitekturnym formam*. Odessa: Astroprint.

Браилов Александр Юрьевич – доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор; профессор кафедры начертательной геометрии и инженерной графики Одесской государственной академия строительства и архитектуры, e-mail: brailov@gmail.com.

Панченко Виталий Иванович – магистр, ведущий инженер Отдела информационного обеспечения Одесской государственной академия строительства и архитектуры, e-mail: gb126t@gmail.com.