УДК 539.39

В.О. ВАХНЕНКО, Д.Б. ВЕНГРОВИЧ
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна
О.В. МІЩЕНКО
Національний політехнічний інститут, Мехіко, Мексика

ДІАГНОСТИКА СТРУКТУРОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА ДОВГИМИ НЕЛІНІЙНИМИ ХВИЛЯМИ: ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ

Асимптотична усереднена модель запропонована для опису хвильових процесів у структурованих гетерогенних середовищах. Отримана інтегрально-диференціальна система рівнянь не може бути зведена до середніх величин (тиск, масова швидкість, питомий об'єм) і містить умови з характерними розмірами окремих компонентів.

На рівні мікроструктури середовища динамічна поведінка регулюється лише законами термодинаміки. На макрорівні рух середовища може бути описаний хвильово-динамічними законами для усереднених змінних з інтегро-диференціальним рівнянням стану, що містить характеристики мікроструктури середовища. Наведено точне математичне доведення, яке показує, що довгі хвилі кінцевої амплітуди реагують на структуру середовища таким чином, що модель однорідного середовища недостатня для опису поведінки структурованого середовища. Важливим результатом цієї моделі є те, що для хвилі з кінцевою амплітудою структура середовища (зокрема, існування мікротріщин) справляє нелінійні ефекти, навіть якщо окремі компоненти середовища описані лінійним законом. Пошук хвильових полів у структурованому середовищі є, з одного боку, прямою задачею.

З іншого боку, проаналізована система не виражається в середньому гідродинамічному вираженні; отже, динамічна поведінка середовища не може бути змодельована однорідним середовищем навіть для довгих хвиль, якщо ці хвилі нелінійні. Неоднорідність структури середовища завжди вносить додаткову нелінійність, яка не виникає в однорідному середовищі. Цей ефект дозволив сформулювати теоретичні підстави нового методу діагностики, що визначає характеристики гетерогенного середовища із застосуванням кінцевих амплітудних довгих хвиль (обернена задача). Цей метод діагностики також може бути використаний для пошуку масового вмісту окремих компонентів.

Ключові слова: асимптотична усереднена модель, структуроване середовище, нелінійні хвилі, метод діагностики.

В.А. ВАХНЕНКО, Д.Б. ВЕНГРОВИЧ
Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев, Украина
А.В. МИЩЕНКО
Национальный политехнический институт, Мехико, Мексика

ДИАГНОСТИКА СТРУКТУРИРОВАННОЙ СРЕДЫ ДЛИННЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЛНАМИ: ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Предложена асимптотическая усредненная модель для описания волновых процессов в структурированных неоднородных средах. Полученная интегрально-дифференциальная система уравнений не может быть приведена к средним слагаемым (давление, массовая скорость, удельный объем) и содержит слагаемые с характерными размерами отдельных компонентов.

На уровне микроструктуры среды динамическое поведение определяется только законами термодинамики. На макроуровне движение среды можно описать

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4

волново-динамическими законами для усредненных переменных с интегро-дифференциальным уравнением состояния, содержащим характеристики микроструктуры среды. Приводится строгое математическое доказательство того, что длинные волны конечной амплитуды реагируют на структуру среды таким образом, что модель однородной среды недостаточна для описания поведения структурированной среды. Важный результат, вытекающий из этой модели, состоит в том, что для волны конечной амплитуды структура среды (в частности, наличие микротрещин) создает нелинейные эффекты, даже если отдельные компоненты среды описываются линейным законом. Нахождение волновых полей в структурированной среде является прямой задачей, с одной стороны.

С другой стороны, анализируемая система не выражена в средних гидродинамических терминах; следовательно, динамическое поведение среды не может быть смоделировано однородной средой даже для длинных волн, если эти волны нелинейны. Неоднородность структуры среды всегда вносит дополнительную нелинейность, которая не возникает в однородной среде. Этот эффект позволил сформулировать теоретические основы нового метода диагностики, определяющего характеристики неоднородной среды с использованием длинных волн конечной амплитуды (обратная задача). Этот метод диагностики также может быть использован для определения массового содержания отдельных компонентов.

Ключевые слова: асимптотическая усредненная модель, структурированая среда, нелинейные волны, метод диагностики.

V.O. VAKHNENKO, D.B. VENGROVICH
Subbotin Institute of Geophysics, Kyïv , Ukraine
O.V. MICHTCHENKO
Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME-Zacatenco, Ciudad de México, México

THE DIAGNOSTICS OF A STRUCTURED MEDIUM BY LONG NONLINEAR WAVES: THEORETICAL JACTIFICATION

The asymptotic averaged model is suggested for the description of the wave processes in structured heterogeneous media. The obtained integral differential system of equations cannot be reduced to the average terms (pressure, mass velocity, specific volume) and contains the terms with characteristic sizes of individual components.

On the microstructure level of the medium, the dynamical behavior is governed only by the laws of thermodynamics. On the macrolevel, the motion of the medium can be described by the wave-dynamical laws for the averaged variables with the integro-differential equation of state containing the characteristics of the medium microstructure. A rigorous mathematical proof is given to show that finite amplitude long waves respond to the structure of the medium in such a way that the homogeneous medium model is insufficient for the description of the behavior of the structured medium. An important result that follows from this model is that, for a finite-amplitude wave, the medium structure (in particular, existence of microcracks) produces nonlinear effects even if the individual components of the medium are described by a linear law. Finding the wave fields in the structured medium is the direct problem, on the one hand.

On the other hand, the system analyzed here is not expressed in the average hydrodynamical terms; hence the dynamical behavior of the medium cannot be modelled by a homogeneous medium even for long waves, if these waves are nonlinear. The heterogeneity of the medium structure always introduces additional nonlinearity that does not arise in a homogeneous medium. This effect enabled one to formulate the theoretical grounds of a new diagnostic method that determines the characteristics of a heterogeneous medium with the use

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4

of finite-amplitude long waves (*inverse problem*). *This diagnostic method can also be employed to find the mass contents of individual components.*

Keywords: asymptotic averaged model, structured medium, nonlinear waves, diagnostics method.

Постановка проблеми

Більшість середовищ за умови локальної рівноваги можна вважати безструктурними. Традиційно припускають, що збурення з довжиною хвилі λ, що значно перевищує характерний розмір ε структурних неоднорідностей, поширюються в них, як в однорідних. Відомо, що з погляду механіки суцільного середовища можлива ідеалізація реального середовища за допомогою однорідного середовища. У багатьох випадках це дає змогу досягти значного успіху під час опису хвильових процесів.

Сучасний стан експериментальних досліджень потребує удосконалення моделей неоднорідних середовищ з детальним урахуванням їхньої структури. Реальні середовища не є однорідними.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Як правило, для побудови моделей тією чи іншою мірою використовують формалізм механіки суцільного середовища. В таких випадках початковим є принцип локальної дії, що дає можливість перенести закони механіки точкової маси на суцільне середовище. Під час перетворення інтегральних рівнянь збереження у диференціальні рівняння припускають існування диференційно малого мікрооб'єму $d\upsilon$. З одного боку, цей об'єм настільки малий, що можна поширити закони механіки точкової маси на весь мікрооб'єм $d\upsilon$, з іншого – мікрооб'єм, хоч і малий порівняно з об'ємом усього середовища, все ж містить так багато структурних елементів середовища, що в цьому сенсі він може бути розглянутий як макроскопічний. Отже, перехід до диференціальних рівнянь збереження ґрунтується на такому припущенні: розмір мікроструктурних масштабів ε малий порівняно з характерним макроскопічним масштабом течії λ, що виправдовує граничний перехід $\varepsilon/\lambda \to 0$. Загалом стягування об'єму $d\upsilon$ в точку є правильним для неперервних функцій. Це означає, що всі точки всередині диференційно малого об'єму еквівалентні. Тому еквівалентність точок у мікрооб'ємі обґрунтовує припущення про використання усереднених характеристик хвильового поля. Отже, рівняння руху можуть бути записані в усереднених характеристиках, таких як густина, масова швидкість, тиск, що властиві кожному окремому компоненту середовища. Зауважимо, що характерні структурні розміри окремих компонентів у цих моделях явно не фігурують.

У разі застосування моделей однорідного середовища до опису динамічних хвильових процесів у структурованому середовищі виникають деякі принципові труднощі. Тут структуру середовища розглянуто на макрорівні. Ми відмовилися від припущення, що диференційно малий об'єм $d\upsilon$ містить усі компоненти середовища, хоч і розглянуто довгохвильові наближення, коли довжина хвилі λ набагато більша за характерну довжину структури середовища ε (рис. 1). Вважаємо, що окремо взятий компонент структурованого середовища моделюється однорідним середовищем (диференційно малий об'єм $d\upsilon$ значно менший за характерний розмір окремого компонента). Згідно методу асимптотичного усереднення [1–2] з математичного аналізу, структура середовища безпосередньо впливає на нелінійні хвильові процеси навіть для збурень з довжиною хвилі, що значно перевищує розміри неоднорідностей. Математичне формулювання цього твердження означає, що система усереднених рівнянь не виражається в усереднених характеристиках (тиск, масова швидкість, питомий об'єм) і містить члени з характерним розміром окремих компонентів.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4

Елементарними неоднорідними середовищами, для яких можна проаналізувати вплив структури, є середовища з регулярною структурою. Регулярність структури і нелінійність досліджуваних хвильових процесів визначають вибір математичних моделей. Лінійні розміри тіла є значно більшими, ніж розмір неоднорідностей, проте неоднорідності настільки великі, що їхній стан описують класичними рівняннями суцільного середовища (рис. 1). Закономірності поширення довгохвильових збурень досліджуємо на прикладі середовища з регулярною структурою, вважаючи, що і напруження, і масова швидкість є неперервними функціями на межі сусідніх компонентів (див. рис. 1).

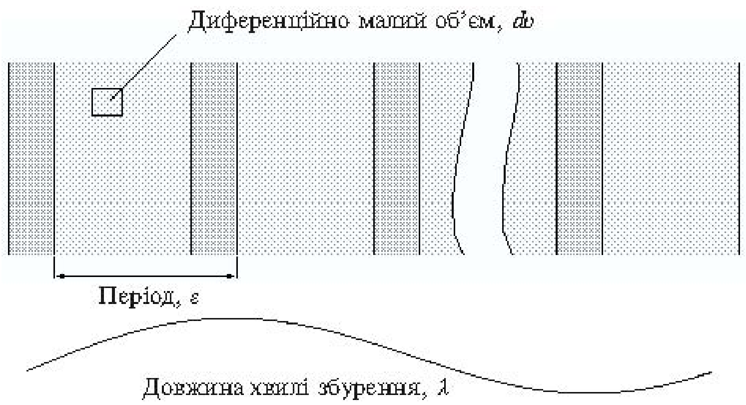

Рис. 1. Модель шарувато-неоднорідного середовища з двома однорідними компонентами в періоді.

Асимптотична природа усереднених методів стала зрозумілою відносно недавно. Процеси у середовищах з мікроструктурою математично можуть бути представлені із швидко осцилюючими коефіцієнтами. Метод усереднення найзручніше застосувати до середовищ з періодичною чи квазіперіодичною структурою. Тоді для середовищ з регулярною структурою коефіцієнти є періодичними функціями. Для вивчення динаміки поведінки середовищ регулярної структури застосовують асимптотичний метод усереднення рівнянь із швидко осцилюючими періодичними коефіцієнтами [1]. Метод був математично обґрунтований для опису механіки композитних матеріалів. Для опису динамічної поведінки багатокомпонентних середовищ на нижчому ієрархічному рівні у феноменологічному підході використовують методи суцільного середовища. При цьому вважають, що кожен мікрооб'єм перебуває в рівновазі (припущення про локальну рівновагу). Це робиться з метою введення термодинамічних величин – густини, тиску, енергії тощо. Динамічні процеси, у тому числі хвильові, характеризують ще такими величинами, як масова швидкість, швидкість поширення хвильових збурень, наприклад, ударної хвилі.

Мета дослідження

Сформулювати теоретичні основи методу діагностики, в якому визначаються характеристики гетерогенного середовища за допомогою довгих хвиль кінцевої амплітуди.

Викладення основного матеріалу дослідження

Кожен окремий компонент як неоднорідність у межах локальної рівноваги вдається описувати рівнянням руху суцільного середовища. Зрозуміло, що параметри потоку і характеристики середовища змінюються від компонента до компонента внаслідок індивідуальних властивостей компонентів, тоді як вигляд самих рівнянь руху залишається однаковим.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4

Обмежимося записом рівнянь руху для пласкої симетрії. Для аналізу хвильових течій всередині кожного компонента використаємо гідродинамічні рівняння, що виражають закон збереження маси та закон збереження імпульсу спільно з рівнянням стану:

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial m}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial m}=0, \quad dp=c^2 d\rho\,, \tag{1}$$

де $V=\rho^{-1}$ – питомий об'єм; u – масова швидкість; $dm=\rho_0 dx$ – масова лагранжева просторова координата.

Відповідно до поставленої задачі на межах компонентів немає розривів масової швидкості і тиску: $[u]$=0, $[p]$=0. Рівняння записано в лагранжевих координатах, оскільки вони пов'язані з елементом маси середовища. Для застосування методу асимптотичного усереднення важливим є те, що в цих змінних структура стисливого середовища є сталою в процесі деформування.

Застосуємо асимптотичний метод усереднення до рівнянь руху. Незалежну змінну $m=s+\varepsilon\xi$ відповідно до методу багатьох масштабів розбиваємо на повільну s і швидку ξ змінні, тут $\varepsilon-$ безрозмірний період структури. Нові змінні s і ξ вважаємо незалежними змінними. Тоді початкову похідну запишемо у вигляді $\frac{\partial}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial s}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \xi}=0$. Повільна змінна s відповідає глобальній зміні хвильових полів, а швидка змінна $\xi-$ їхній локальній зміні. Розв'язки p, V, u шукаємо у вигляді рядів за степенями періоду структури ε з функціями, періодичними за ξ, наприклад: $V(m,t)=V^{(0)}(s,t,\xi)+\varepsilon V^{(1)}(s,t,\xi)+\varepsilon^2 V^{(2)}(s,t,\xi)+\ldots$ Після усереднення за періодом структури ξ отримуємо усереднену систему рівнянь [1]:

$$\frac{\partial\left\langle V^{(0)}\right\rangle}{\partial t}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial s}=0, \quad \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}+\frac{\partial p^{(0)}}{\partial s}=0, \quad d\left\langle V^{(0)}\right\rangle=-\left\langle (V^{(0)})^2/c^2\right\rangle dp. \tag{2}$$

За означенням $\langle\cdot\rangle=\int_0^1(\cdot)d\xi$. Надалі обмежимося тільки нульовим наближенням, а верхній індекс (0) опускаємо. Тиск $p^{(0)}$ і масова швидкість $u^{(0)}$ не залежать від швидкої змінної ξ, чого не можна сказати про питомий об'єм $V^{(0)}=V^{(0)}(\xi)$. На великому масштабі s дія збурень проявляється в хвильовому русі середовища, тоді як на мікромасштабі ξ дія є однорідною (безхвильовою) на всьому періоді структури середовища через те, що тиск і масова швидкість на всьому періоді є сталими величинами.

Рівняння (2) були виведені для строго періодичного середовища. Проте можна довести, що вони також будуть справедливі для середовищ з квазіперіодичною структурою. Дійсно, тиск p і масова швидкість u не залежать від швидкої змінної ξ. Тому на мікрорівні дія зовнішнього навантаження статично однорідна (безхвильова) на всьому періоді структурованого середовища. Однак на повільному масштабі s ця дія проявляється у хвильовому русі середовища. На мікрорівні поведінка середовища підпорядковується тільки термодинамічним законам. Там спостерігається механічна рівновага. Водночас на макрорівні рух середовища описується законами хвильової

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4

динаміки для усереднених змінних. З математичної позиції в нульовому порядку за ε розмір періоду вважаємо нескінченно малим, тобто маємо наближення $\varepsilon \to 0$. Це означає, що місцезнаходження окремих компонентів у періоді не має ніякого значення, однак масовий вміст кожного компонента повинен зберігатися. В результаті решта усереднених характеристик для середовищ з періодичною та квазіперіодичною структурою збігатиметься. Це означає, що довгохвильові рухи не відрізнятимуться між собою в періодичних, квазіперіодичних і статистично однорідних середовищах.

Структура середовища впливає на хвильові поля. Водночас виникає питання, чи достатньо інформації міститься в хвильовому полі, щоб відтворити структуру середовища. Це – обернена задача. З'ясувалося, що, визначивши хвильові поля, з певною точністю можна діагностувати концентрацію окремих компонентів.

Доведемо, що нелінійні ефекти у структурованих середовищах збільшуються порівняно з однорідним середовищем. Розглянемо еволюційне рівняння зі слабкою нелінійністю і порівняємо коефіцієнти нелінійності для цих середовищ. Запишемо еволюційне рівняння в ейлеровій системі координат, що містить слабку нелінійність. Перш за все, зазначимо, що масова швидкість u пов'язана з тиском p співвідношенням $u = \int_{p_o}^{p} \sqrt{\left\langle V^2/c^2 \right\rangle} dp.$ Функціональна залежність усередненого питомого об'єму від приросту тиску $p' = p - p_0$ з точністю до членів другого порядку $O(p'2)$ розвивається в ряд:

$$\left\langle V \right\rangle(p) = \left\langle V \right\rangle_0 + \left. \frac{d\left\langle V \right\rangle}{dp} \right|_{p=p_0} p' + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\left\langle V \right\rangle}{dp^2} \right|_{p=p_0} p'^2.$$

Систему рівнянь (2) тоді можна переписати так:

$$\left\langle V \right\rangle_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle_0 \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\left\langle V \right\rangle}{dp^2} \right|_{p=p_0} \frac{\partial p'^2}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \left\langle V \right\rangle_0 \frac{\partial p'}{\partial x} = 0.$$

Для виведення першого рівняння було використано співвідношення $u \frac{\partial p'}{\partial x} = p' \frac{\partial u}{\partial x}$, яке справедливе з прийнятою точністю $O(p'^2)$ і випливає з еволюційного рівняння для однієї змінної:

$$\left\langle V \right\rangle_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle_0 \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\left\langle V \right\rangle}{dp^2} \right|_{p=p_0} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} = 0.$$

Надалі індекс 0, що позначає незбурений стан, опускаємо. Після факторизації, розглядаючи хвилі, що поширюються в один бік, маємо еволюційне рівняння в ейлеровій системі координат:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + c_{eff} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\langle V \right\rangle \left\langle \frac{V^2}{c^2} \right\rangle^{-3/2} \frac{d^2\left\langle V \right\rangle}{dp^2} p' \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4

Коефіцієнт нелінійності α_p, зумовлений структурою середовища, для випадку $dc/dp = 0$ можна подати у такому вигляді:

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{2}\langle V\rangle \left\langle \frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-3/2} \frac{d^2\langle V\rangle}{dp^2} = \frac{d(u + c_{\text{eff}})}{dp} = \langle V\rangle \left\langle \frac{V^3}{c^4}\right\rangle \left\langle \frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-3/2}.$$

Причому завжди $\alpha_p > 0$. Для однорідного середовища $dc/dp = 0$ маємо $\alpha_{p\text{hom}} = V/c$. Винятковими середовищами є неоднорідні середовища, в яких величина V/c^2 не змінюється на періоді. Для таких середовищ неоднорідність не вносить додаткової нелінійності порівняно з однорідними. Такі структуровані середовища поводяться подібно до однорідних середовищ під час поширення нелінійних хвиль.

Розглянемо відношення коефіцієнтів нелінійності для структурованого і однорідного середовищ, заздалегідь узгодивши їхні властивості. Мається на увазі, що у просторі безрозмірних нормованих змінних при $p = p_0$ задано $\langle V\rangle_0 = 1$, а також $\left\langle V^2/c^2\right\rangle_0 = 1$ для середовищ, які ми порівнюємо. Тому

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_{p\text{hom}}} = \langle V\rangle \left\langle \frac{V^3}{c^4}\right\rangle \left\langle \frac{V^2}{c^2}\right\rangle^{-2} \geq 1. \qquad (4)$$

Нерівність (4) є ніщо інше, як відома нерівність Коші–Шварца (див. формули (4.6–60), (15.2–3) і розділ 14.2–6 у праці [3]). Врахувавши, що $\langle V\rangle \geq 0$, $\left\langle V/c^2\right\rangle \geq 0$, доведемо, що

$$\langle V\rangle\left\langle V^3/c^4\right\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} V d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^3}{c^4} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2}\left(\frac{V}{c^2}\right)^{-1} d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2}\frac{V}{c^2} d\xi$$

$$\geq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{V^2}{c^2}\left(\frac{V}{c^2}\right)^{-1}} \cdot \sqrt{\frac{V^2}{c^2}\frac{V}{c^2}} d\xi\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^2}{c^2} d\xi\right)^2 \equiv \left\langle V^2/c^2\right\rangle^2$$

Залишилося визначити умову, коли виконується знак рівності. Для цього скористаємося векторним записом нерівності Коші–Шварца (див. формулу (14.2-5) у праці [3]) $|(\vec{a},\vec{b})|^2 \leq (\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})$, причому знак рівності реалізується тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, тобто $\vec{a} = k\vec{b}$ ($k = \text{const}$). У нашому випадку це означає, що

$$\sqrt{\frac{V^2}{c^2}\left(\frac{V}{c^2}\right)^{-1}} \Big/ \sqrt{\frac{V^2}{c^2}\frac{V}{c^2}} = \text{const}.$$

Таким чином, знак рівності виконується тоді і лише тоді, коли $V/c^2 = \text{const}$, тобто $V(\xi)/(c(\xi))^2 \neq f(\xi)$ не змінюється на періоді. Якщо величина V/c^2 змінюється на періоді, тоді для решти середовищ з мікроструктурою виконується нерівність (4). Констатуємо, що в структурованому середовищі коефіцієнт нелінійності α_p завжди більший, ніж в однорідному $\alpha_{p\text{hom}}$, тобто доведено, що структура середовища, в загальному випадку, вносить додаткову нелінійність. Зараз покажемо, яким чином зазначений ефект можна використати для розробки математичних основ нового методу діагностики, в якому властивості багатокомпонентного середовища вдається визначити за особливостями поширення довгих нелінійних хвиль.

Опишемо метод діагностики структури середовища, якщо відомі закономірності поширення хвиль [2]. Зазначимо одну важливу особливість. Оскільки в асимптотичній усередненій моделі період структури вважаємо нескінченно малим відносно довжини хвилі, тому в запропонованому методі діагностики місцеположення елементів структури на періоді не вдається вказати точно. Робимо висновок, що дві структури, які відрізняються одна від одної функціональною залежністю $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$ від ζ, наприклад, ті, що показані на рис. 2, мають однаково впливати на рух хвилі.

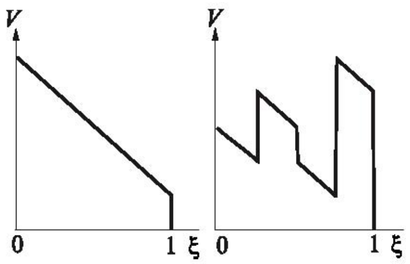

Рис. 2. Еквівалентні розподіли питомого об'єму в елементарній комірці з позиції методу діагностики.

Отже, такі середовища неможливо розрізнити за допомогою довгих нелінійних хвиль. Врахувавши це обмеження, надалі для визначеності вважатимемо, що залежність $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$ від швидкої ейлерової координати $\zeta \equiv x/\varepsilon$ є спадною інтегрованою взаємно однозначною функцією на відрізку $\zeta \in [0,1]$, а поза ним дорівнює нулю. Змінну $\zeta \equiv x/\varepsilon$ визначаємо так само, як і швидку змінну для лагранжевих координат $\xi \equiv m/\varepsilon$. Доведемо, що функцію $\zeta = \zeta(V/c^2)$, обернену до шуканої $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$, можна визначити через обернене Фур'є-перетворення:

$$\zeta\left(Vc^{-2}\right) = F^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\langle V\left(Vc^{-2}\right)^{n+1}\right\rangle}{(n+1)!\langle V\rangle} \mathrm{i}^n q^n\right]\left(Vc^{-2}\right). \tag{5}$$

Коефіцієнти $\left\langle V\left(V/c^2\right)^n\right\rangle \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(V/c^2)^n d\xi$. $(n = 3, 4, \ldots)$ для цієї формули легко обчислити, якщо знати функціональну залежність $\langle V\rangle$ від p або $\left\langle V^2/c^2\right\rangle$ від p. Їх послідовно визначають з рекурентного співвідношення:

$$\frac{d\left\langle V\left(Vc^{-2}\right)^n\right\rangle}{dp} = -(n+1)\left\langle V\left(Vc^{-2}\right)^{n+1}\right\rangle,$$

яке випливає безпосередньо з рівняння стану. Середнє значення $\langle V\rangle$, як наголошено раніше, однозначно пов'язане з густиною середовища в ейлерових координатах.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4

Скористаємося відомим фактом з теорії ймовірностей [3]. Функцію розподілу $f(x)$ (однозначну інтегровану невід'ємну функцію) запишемо через її центральні моменти $\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$ з використанням характеристичної функції $\chi(q) = F[f(x)](q)$, де $F\ [\cdot]$ – Фур'є-перетворення. Отже, довільну невід'ємну інтегровану функцію можна записати так: $f(x) = F^{-1}[\chi(q)](x)$. Використаємо відомий факт [3], що центральні моменти α_n однозначно визначають характеристичну функцію $\chi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathrm{i}^n \frac{q^n}{n!}$. Тому $f(x) = F^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathrm{i}^n \frac{q^n}{n!}\right](x)$. Ці відомості з теорії ймовірностей [3] застосовуємо, щоб довести таке твердження: якщо $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$ є позитивна інтегрована функція на скінченному відрізку і, крім того, монотонно спадає, а поза відрізком дорівнює нулю, тоді обернену функцію щодо заданої вдається відтворити формулою (5) через середні значення $\left\langle V\left(V/c^2\right)^n\right\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} V\left(V/c^2\right)^n d\xi$. Дійсно, для монотонної і однозначної функції $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$ можна в останньому інтегралі перейти до оберненої функції $\zeta = \zeta(V/c^2)$, оскільки якобіан перетворення не дорівнює нулю. Тоді маємо

$$\begin{aligned}\left\langle V\left(V/c^2\right)^n\right\rangle &= \int_0^1 V(\xi)\left(\frac{V}{c^2}\right)^n d\xi = \langle V\rangle \int_0^1 V\left(\frac{V}{c^2}\right)^n \rho d\zeta = \\ &= \langle V\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V}{c^2}\right)^n \frac{d\zeta}{d\left(V/c^2\right)} d\left(V/c^2\right).\end{aligned}$$

Геометрично це співвідношення відображує інтегрування на області між кривою $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$ і осями координат $O\zeta$ та $O\left(V/c^2\right)$, що можна здійснити інтегруванням як за ζ, так і за V/c^2. Однозначність при цьому виконується для монотонно спадної функції $V/c^2 = V/c^2(\zeta)$.

Проведемо перетворення з урахуванням того, що функція $\zeta = \zeta\left(V/c^2\right)$ є визначеною на скінченному відрізку, додатною та обмеженою зверху:

$$\begin{aligned}\left\langle V\left(V/c^2\right)^n\right\rangle &= \langle V\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V}{c^2}\right)^n \frac{d\zeta}{d\left(V/c^2\right)} d\left(V/c^2\right) = \\ &= -n\langle V\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V}{c^2}\right)^{n-1} \zeta d\left(V/c^2\right).\end{aligned}$$

У цьому співвідношенні значення $\alpha_n = \langle V\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{V}{c^2}\right)^n \frac{d\zeta}{d\left(V/c^2\right)} d\left(V/c^2\right)$ є ніщо інше, як центральні моменти оберненої функції. Тому останнє співвідношення набуває вигляду $\left\langle V\left(V/c^2\right)^n\right\rangle = -n\langle V\rangle \alpha_{n-1}$. Отже, характеристична функція $\chi(q)$, оберненої функції $\zeta = \zeta\left(V/c^2\right)$ виражається через $\left\langle V\left(V/c^2\right)^n\right\rangle$ за формулою

$$\chi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\langle V\left(Vc^{-2}\right)^{n+1}\right\rangle}{(n+1)!\left\langle V\right\rangle} \mathrm{i}^n q^n. \tag{6}$$

Застосувавши обернене перетворення Фур'є, остаточно одержуємо формулу (5).

Отже, одержано основне співвідношення (5) для методу діагностики, яке дає змогу визначити властивості окремих елементів структурованого середовища за допомогою нелінійних довгих хвиль.

Для прикладу на рис. 3 представлено розрахункові результати з визначення структури шарувато-періодичного середовища, яке належним чином можна наблизити до діагностованого середовища.

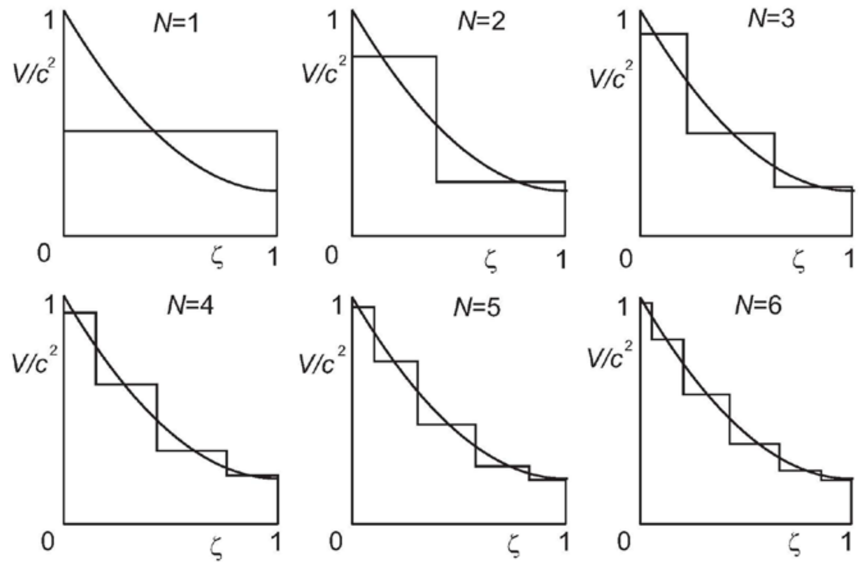

Рис. 3. Наближення періодично-неоднорідного середовища з розподілом в періоді $V/c^2 = 0{,}2 + 0{,}8(1-\zeta)^2$ шарувато-періодичними середовищами (N − число прошарків на періоді)

Таким чином, теоретично обґрунтовано метод діагностики властивостей середовищ довгими нелінійними хвилями в рамках асимптотичної усередненої моделі структурованого середовища. Показано, що за допомогою запропонованого методу можна апроксимувати діагностовне середовище N-компонентним середовищем і визначити масовий вміст цих компонентів.

Висновки.

Для опису хвильових процесів в гетерогенному середовищі запропонована асимптотична усереднена модель. На мікроструктурному рівні середовище описується лише законами термодинаміки. На макрорівні рух середовища може бути описаний законами хвильової динаміки для усереднених змінних. Неоднорідність середовища завжди вносить додаткову нелінійність. Цей ефект дозволив сформулювати теоретичні основи методу діагностики, в якому визначаються характеристики гетерогенного середовища за допомогою довгих хвиль кінцевої амплітуди.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4

Список використаної літератури

1. Vakhnenko V. O., Danylenko V. A., Michtchenko A. V. An Asymptotic Averaged Model of Nonlinear Long Waves Propagation in Media with a Regular Structure. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 1999. Vol. 34. Issue 4. P. 643–654. DOI: 10.1016/S0020-7462(98)00014-6.
2. Vakhnenko V. O., Danylenko V. A., Michtchenko A. V. Diagnostics of the Medium Structure by Long Wave of Finite Amplitude. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2000. Vol. 35. Issue 6. C. 1105–1113.
3. Korn G., Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney: McGraw-Hill Book Company, 1968. 720 p. DOI: 10.1002/zamm.19690490921 DOI: 10.1016/S0020-7462(99)00082-7.

References

1. Vakhnenko, V. O., Danylenko, V. A., & Michtchenko, A. V. (1999). An Asymptotic Averaged Model of Nonlinear Long Waves Propagation in Media with a Regular Structure. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 34, 4, 643–654. DOI: 10.1016/S0020-7462(98)00014-6.
2. Vakhnenko, V. O., Danylenko, V. A., & Michtchenko, A. V. (2000). Diagnostics of the Medium Structure by Long Wave of Finite Amplitude. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 35, 6, 1105–1113.
3. Korn G., & Korn T. (1968). Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney: McGraw-Hill Book Company. DOI: 10.1002/zamm.19690490921 DOI: 10.1016/S0020-7462(99)00082-7.

Вахненко В’ячеслав Олексійович – д.ф.-м.н., завідувач відділу ДТДТ, Інститут геофізики імені С.І. Субботіна НАН України, вул. академіка Палладіна, 32, Київ-03680, Україна, 03680, e mail: vakhnenko@ukr.net. ORCID: 0000-0002-1250-9563.

Венгрович Дмитро Богданович – к.ф.-м. н., завідувач Відділення геодинаміки вибуху, Інститут геофізики імені С.І. Субботіна НАН України, вул. академіка Палладіна, 32, Київ-03680, Україна, 03680, e mail: vengrovich@gmail.com. ORCID: 0000-0002-1901-5697.

Міщенко Олександр Володимирович – к.ф.-м.н., професор, Національний політехнічний інститут, SEPI-ESIME-Zacatenco, Mexiко, C.P. 07738, Мексика, e-mail: almitchen@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3799-581X.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.4