УДК: 514.13

В.І. КУЗЬМИЧ, Л.В. КУЗЬМИЧ, О.Г. САВЧЕНКО
Херсонський державний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ПРЯМОЛІНІЙНОГО ТА ПЛОСКОГО РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ

У роботі розглядаються питання геометричної структуризації множин точок довільного метричного простору. Запропоновані методи побудови прямолінійно і плоско розміщених множин точок метричного простору. Такі множини є узагальненням понять, відповідно, прямої лінії і площини у класичній геометрії Евкліда. Побудова таких множин точок дає можливість моделювати різні геометричні образи у метричних просторах.

Поняття прямолінійного розміщення точок базується на класичному понятті «лежати між», що широко використовується у сучасних геометричних системах. У роботі використовуються поняття кута, утвореного трьома точками метричного простору, та поняття кутової характеристики цього кута. Ці поняття є базовими для визначення плоского розміщення точок метричного простору. Крім того, факт прямолінійного розміщення точок можна отримати, також, з використанням понять кута та його кутової характеристики.

Для встановлення факту плоского розміщення точок метричного простору використовується формула Юнгіуса обчислення об'єму тетраедра через довжину його бічних ребер. Умова рівності нулю цього об'єму є ознакою плоского розміщення чотирьох вершин тетраедра. У роботі використовується модифікована формула Юнгіуса, в якій об'єм тетраедра обчислюється через довжини трьох його ребер, що виходять з однієї вершини, та косинуси плоских кутів при цій вершині. Оскільки такі обчислення досить трудомісткі, то в роботі пропонується проводити їх із використанням програмного засобу «Калькулятор». За допомогою цього калькулятора можна встановити: чи існує тетраедр із заданими ребрами, і якщо так, то обчислити об'єм такого тетраедра.

У роботі наведені приклади прямолінійно та плоско розміщених множин точок у різних класичних метричних просторах. Зокрема, розглянуті приклади таких множин у просторі неперервних на відрізку функцій та у просторі інтегрованих за Ріманом на відрізку функцій. Деякі приклади вказують на «неевклідовість» понять прямолінійного та плоского розміщення точок. Це дає змогу моделювати у метричних просторах основні поняття та властивості неевклідових геометрій.

Ключові слова: пряма лінія; площина; кут; метричний простір; прямолінійно розміщена множина точок; кутова характеристика; плоско розміщена множина точок.

В.И. КУЗЬМИЧ, Л.В. КУЗЬМИЧ, А.Г. САВЧЕНКО
Херсонский государственный университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО И ПЛОСКОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе рассматриваются вопросы геометрической структуризации множеств точек произвольного метрического пространства. Предложены методы построения прямолинейно и плоско расположенных множеств точек метрического пространства. Такие множества являются обобщением понятий, соответственно,

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15

прямой линии и плоскости в классической геометрии Евклида. Построение таких множеств точек дает возможность моделировать различные геометрические образы в метрических пространствах.

Понятие прямолинейного размещения точек базируется на классическом понятии «лежать между», которое широко используется в современных геометрических системах. В работе используются понятие угла, образованного тремя точками метрической пространства, и понятие угловой характеристики этого угла. Эти понятия являются базовыми для определения плоского размещения точек метрического пространства. Кроме того, факт прямолинейного размещения точек можно получить, также, с использованием понятий угла и его угловой характеристики.

Для установления факта плоского размещения точек метрического пространства используется формула Юнгиуса вычисления объема тетраэдра через длину его боковых ребер. Условие равенства нулю этого объема является признаком плоского размещения четырех вершин тетраэдра. В работе используется модифицированная формула Юнгиуса, в которой объем тетраэдра вычисляется через длины трех его ребер, выходящих из одной вершины, и косинусы плоских углов при этой вершине. Поскольку такие вычисления достаточно трудоемки, то в работе предлагается проводить их с использованием программного средства «Калькулятор». С помощью этого калькулятора можно установить: существует ли тетраэдр с заданными ребрами, и если да, то вычислить объем такого тетраэдра.

В работе приведены примеры прямолинейно и плоско размещенных множеств точек в разных классических метрических пространствах. В частности, рассмотрены примеры таких множеств в пространстве непрерывных на отрезке функций и в пространстве интегрированных по Риману на отрезке функций. Некоторые примеры указывают на «неевклидовисть» понятий прямолинейного и плоского размещения точек. Это позволяет моделировать в метрических пространствах основные понятия и свойства неевклидовых геометрий.

Ключевые слова: прямая линия; плоскость; угол; метрическое пространство; прямолинейно расположенное множество точек; угловая характеристика; плоско расположенное множество точек.

V.I. KUZ’MICH, L.V. KUZMICH, O.G. SAVCHENKO
Kherson State University

SIMULATION OF RECTILINEAR AND FLAT PLACEMENT OF POINTS OF METRIC SPACE

The paper deals with the issues of geometric structuring of sets of points of an arbitrary metric space. Methods for constructing rectilinear and flat sets of points of metric space are proposed. Such sets are a generalization of the concepts, respectively, of a straight line and a plane in the classical geometry Euclid. The construction of such sets of points makes it possible to model various geometric images in metric spaces.

The concept of rectilinear placement of points is based on the classical concept of 'lie between', which is widely used in modern geometric systems. The work uses the concept of an angle formed by three points of the metric space, and the concept of the angular characteristic of this angle. These concepts are basic for the definition of a flat placement of points in a metric space. In addition, the fact of the rectilinear placement of points can also be obtained using the concepts of angle and its angular characteristic.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15

For establish the fact that the points of the metric space are flat placement, the Jungius formula is used to calculate the volume of a tetrahedron in terms of the length of its lateral edges. The condition for this volume to be zero is a sign of the flat placement of the four vertices of the tetrahedron. The paper uses a modified Jungius formula, in which the volume of a tetrahedron is calculated in terms of the lengths of its three edges emerging from one vertex and the cosines of plane angles at this vertex. Since such calculations are rather laborious, it is proposed to carry out them using the 'Calculator' software tool. With the help of this calculator, you can determine whether there is a tetrahedron with given edges, and if so, calculate the volume of such a tetrahedron.

The paper gives examples of rectilinear and flat placement sets of points in different classical metric spaces. In particular, examples of such sets are considered in the space of continuous functions on an segment and in the space of Riemann-integrated functions on an segment. Some examples point to the 'non-Euclidean' concepts of rectilinear and flat placement of points. This allows modeling the basic concepts and properties of non-Euclidean geometries in metric spaces.

Key words: straight line; plane; angle; metric space; rectilinear placement set of points; angular characteristic; flat placement set of points.

Постановка проблеми

При обробці статистичних даних, при математичному моделюванні фізичних, економічних, соціологічних явищ та процесів виникає необхідність структуризації масивів числових даних, отриманих в результаті експериментів, спостережень, вимірювань. У останні роки значного розвитку та застосувань у різноманітних галузях науки та інженерії набули методи метричної геометрії. Метрична геометрія вивчає геометричні властивості та співвідношення між точками метричного простору. Ці властивості та співвідношення значною мірою залежать від метрики простору, тобто, від способу задання відстані між точками цього простору. Однак, є певні співвідношення, які несуть у собі геометричний зміст, і можуть бути однаково інтерпретовані у просторах з різною метрикою. До таких співвідношень можна віднести, наприклад, співвідношення «лежати між», «прямолінійне розміщення точок» або «плоске розміщення точок». Причому, ці співвідношення у метричній геометрії можна описати аналітично, за допомогою конкретних рівностей. Це дає можливість використовувати їх для структуризації даних і моделювання багатьох явищ та процесів за допомогою електронно-обчислювальної техніки.

У даній роботі будуть описані деякі методи побудови прямолінійно та плоско розміщених множин точок довільного метричного простору, а також наведені приклади побудови таких множин у конкретних класичних просторах з відомою метрикою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

З основними поняттями метричної геометрії можна ознайомитись по ряду монографій та посібників, написаних такими відомими математиками як Буземан [1], Берже [2], Бураго [3], а також, частково, по оглядовій статті Сабітова [4]. Властивості відношення «лежати між» для точок метричного простору досліджувались у роботах [5, 6]. Прямолінійне та плоске розміщення точок метричного простору вивчалось у роботах [7, 8].

Оскільки поняття метричного простору є базовим у математиці, то поряд з метричними просторами також активно вивчаються їх спеціальні класи та модифікації, що мають застосування у різних галузях сучасної науки. У зв’язку з цим відзначимо ультраметричні або неархімедові простори. Так, у [9] запропонована конструкція інваріантної метрики на вільній групі ультраметричного простору, яка є

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15

функторіальною на категорії ультраметричних просторів діаметра не більше одиниці і не розтягуючих відображень. Ця конструкція визначає монаду на цій категорії. Наведено, також, опис категорії алгебр цієї монади як категорії лівоінваріантних ультраметричних груп діаметра не більше одиниці і нерозтягуючих гомоморфізмів.

Такими, що заслуговують особливої уваги, є розмиті метричні простори, зокрема, стаціонарні розмиті метричні простори та пов'язані з ними функторіальні конструкції [10], [11]. Так, в роботі [12] утворений за допомогою певної ультраметризації функтор ймовірнісних мір утворює монаду на категорії розмитих ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень. Встановлено, що функтор гіперпростору допускає продовження на категорію Клейслі монади гіперпростору.

Інтенсивно досліджуваними у теперішній час є метричні простори, які виникають на межі теоретичної інформатики та прикладної математики. Це так звані простори діаграм стійкості. Відстань між діаграмами стійкості є кількісною характеристикою віддаленості між собою великих масивів даних, тому такий метричний простір є об'єктом вивчення багатьох дослідників. Зокрема, в [13] доведено, що множина діаграм стійкості тісно пов'язана з однією з добре відомих конструкцій алгебраїчної топології — нескінченним симетричним добутком у сенсі Дольда і Тома.

Мета дослідження

Метою цієї роботи є опис методів геометричної структуризації метричних просторів, шляхом побудови прямолінійно та плоско розміщених множин точок у цих просторах. При побудові плоско розміщених множин точок використовується програмний засіб «Калькулятор», за допомогою якого можна встановити факт плоского розміщення чотирьох точок метричного простору.

Викладення основного матеріалу дослідження

У подальшому будемо користуватись наступним означенням метричного простору [14, с. 41].

Означення 1. *Метричним простором називається пара (X, ρ), що складається з деякої множини (простору) X елементів (точок) і відстані, тобто однозначної, невід'ємної, дійсної функції $\rho(x; y)$, визначеної для будь-яких x і y з X, і яка задовольняє таким трьом аксіомам:*

1) $\rho(x; y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$ (x і y співпадають);

2) $\rho(x; y) = \rho(y; x)$ (аксіома симетрії);

3) $\rho(x; y) \leq \rho(x; z) + \rho(z; y)$ (аксіома трикутника).

Надалі будемо вважати, що всі розглядувані точки метричного простору різні (не співпадають), тому відстані між точками невід'ємні. Будемо використовувати, також, поняття кута, утвореного трьома точками метричного простору, та його кутової характеристики [7, с. 383]

Означення 2. *Нехай a, b, c – довільні точки метричного простору (X, ρ). Упорядковану трійку (a, b, c) цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці b, і позначати: $\angle(a, b, c)$. Пари точок (a, b) і (b, c), при цьому, будемо називати сторонами кута.*

Означення 3. *Нехай a, b, c – довільні точки метричного простору (X, ρ). Характеристикою кута $\angle(a, b, c)$, або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число $\varphi(a, b, c)$, що знаходиться за формулою:*

$$\varphi(a, b, c) = \frac{\rho^2(a, b) + \rho^2(b, c) - \rho^2(a, c)}{2\rho(a, b)\rho(b, c)}.$$

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15

Надалі будемо використовувати зручніші позначення:

$$\rho(x_i, x_j) = \rho_{ij}, \quad \varphi(x_i, x_j, x_k) = \frac{\rho_{ij}^2 + \rho_{jk}^2 - \rho_{ik}^2}{2\rho_{ij}\rho_{jk}} = \varphi_{ijk} \ (i, j, k = 1,2,3, \dots).$$

Тепер наведемо означення прямолінійного розміщення точок метричного простору.

Означення 4. *Три точки a, b, c метричного простору (X, ρ) називають прямолінійно розміщеними у цьому просторі, якщо виконується рівність:*

$$\rho(a, c) = \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

Поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору увів В.Ф. Каган [15, с. 527]. Це означення можна переформулювати, використовуючи кутову характеристику [7, с. 384].

Означення 5. *Три точки a, b, c метричного простору (X, ρ) називають прямолінійно розміщеними у цьому просторі, якщо хоча б для однієї з них (наприклад, для точки b) виконується рівність:* $\varphi^2(a, b, c) = 1$.

Множину точок метричного простору природно вважати прямолінійно розміщеною, якщо будь-які три її точки прямолінійно розміщені у цьому просторі.

Найпростішим прикладом прямолінійно розміщеної множини точок є множина дійсних чисел (точки одновимірного евклідового простору R^1). Відстань між двома точками x_1 і x_2 у цьому просторі знаходять за формулою: $\rho(x, y) = |x - y|$.

Більш складнішим прикладом прямолінійно розміщеної множини точок є множина лінійних функцій виду $y = kx$, якщо розглядати їх як точки метричного простору $C_{[0;1]}$ неперервних на відрізку $[0; 1]$ функцій. У цьому просторі відстань між двома функціями (точками простору) $f(x)$ і $g(x)$ знаходиться за формулою: $\rho(f, g) = max_{x \epsilon [0;1]}|f(x) - g(x)|$. Отже, відстань між функціями $y_1 = k_1 x$ та $y_2 = k_2 x$ у просторі $C_{[0;1]}$ буде: $\rho(y_1, y_2) = max_{x \epsilon [0;1]}|k_1 x - k_2 x| = |k_1 - k_2|$. Прямолінійне розміщення цієї множини точок у просторі $C_{[0;1]}$ випливає з властивостей множини дійсних чисел [7, с. 384; 16, с. 32].

Тепер розглянемо поняття плоского розміщення точок метричного простору. За аналогією з випадком прямолінійного розміщення точок, за характеристичну властивість плоского розміщення чотирьох точок x_1, x_2, x_3, x_4 візьмемо умову рівності нулю об'єму тетраедра, утвореного цими точками. Його можна обчислити, використовуючи формулу Юнгіуса [17, с. 99-100] об'єму тетраедра за довжинами його ребер ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{14}, ρ_{23}, ρ_{24}, ρ_{34}. Для проведення таких розрахунків можна використати програмний засіб «Калькулятор» [18, с. 63; 19, с. 68], який знаходиться за адресою: http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645.

Рівність:

$$\rho_{12}^2\rho_{34}^2(\rho_{13}^2 + \rho_{14}^2 + \rho_{23}^2 + \rho_{24}^2 - \rho_{12}^2 - \rho_{34}^2) +$$

$$+\rho_{13}^2\rho_{24}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{14}^2 + \rho_{23}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{24}^2) +$$

$$+\rho_{14}^2\rho_{23}^2(\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{24}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{14}^2 - \rho_{23}^2) -$$

$$-\rho_{13}^2\rho_{14}^2\rho_{34}^2 - \rho_{12}^2\rho_{14}^2\rho_{24}^2 - \rho_{12}^2\rho_{13}^2\rho_{23}^2 - \rho_{23}^2\rho_{24}^2\rho_{34}^2 = 0$$

забезпечує рівність нулю тетраедра з вершинами у точках x_1, x_2, x_3, x_4 [18, с. 62].

Якщо використати кутові характеристики плоских кутів при вершині x_1 тетраедра, то останню рівність можна переписати у формі [7, с. 387; 18, с. 61]:

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15

$$1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0.$$

Тепер можна дати означення плоского розміщення чотирьох точок метричного простору [7, с. 387; 20, с. 42; 21, с. 11-12; 22, с. 63].

Означення 6. *Будемо казати, що точки x_1, x_2, x_3, x_4 простору (X, ρ) плоско розміщені у цьому просторі, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки x_1) виконується рівність*

$$1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0.$$

Множину точок метричного простору природно вважати плоско розміщеною, якщо будь-які чотири її точки прямолінійно розміщені в цьому просторі.

Співвідношення між прямолінійним і плоским розміщенням точок набагато складніше, ніж відношення між прямою лінією і площиною у геометрії Евкліда. «Неевклідовість» цих понять можна продемонструвати наступним прикладом.

У метричному просторі R_0^2, де точками є пари дійсних чисел $a(a_1, a_2)$, відстань між двома точками $a(a_1, a_2)$ і $b(b_1, b_2)$ простору визначається формулою: $\rho(x, y) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$. Чотири точки $a(1,0)$, $b(0,1)$, $c(-1,0)$, $d(0,-1)$ простору R_0^2 прямолінійно розміщені у цьому просторі [7, с. 387]. Кутові характеристики дванадцяти усіх можливих кутів, утворених цими точками, прийматимуть такі значення:

$$\varphi(b, a, c) = 1, \varphi(b, a, d) = -1, \varphi(c, a, d) = 1, \varphi(a, b, c) = -1, \varphi(a, b, d) = 1,$$

$$\varphi(c, b, d) = 1, \varphi(a, c, b) = 1, \varphi(a, c, d) = 1, \varphi(b, c, d) = -1, \varphi(a, d, b) = 1,$$

$$\varphi(a, d, c) = -1, \varphi(b, d, c) = 1.$$

З цих значень випливає, що усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі R_0^2 (квадрати кутових характеристик дорівнюють одиниці). Крім того, кожна з чотирьох точок лежить між деякими двома з них, тобто, крайніх точок серед них нема. Більше того, легко перевірити, що ці точки не є плоско розміщеними в цьому просторі. Наведені факти не можуть виконуватись у геометрії Евкліда.

Висновки

За допомогою засобів геометризації метричних просторів можливо провести структуризацію цих просторів, моделюючи геометричні образи основних понять геометрії Евкліда. Достатньо прості аналітичні перетворення при такому моделюванні дають можливість застосувати електронно-обчислювальні засоби при побудові відповідних геометричних образів.

У подальшому дослідження слід спрямувати на побудову аналогів класичних співвідношень між елементами геометричних фігур у геометрії Евкліда.

Список використаної літератури

1. Буземан Г. Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962. 503 с.
2. Берже М. Геометрия. Том 1. М.: Мир, 1984. 559 с.
3. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 512 с.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15

4. Сабитов И. Х. Московское математическое общество и метрическая геометрия: от Петерсона до современных исследований. *Труды Московского математического общества*. 2016. Том 77. Вып. 2. С. 185–218.
5. Довгошей А. А., Дордовский Д. В. Отношение лежать между и изометрические вложения метрических пространств. *Укр. мат. журн*. 2009. № 10(61). С. 1319–1328.
6. Галущак С. І. Деякі геометричні криві у сенсі d-відрізка. *Прикарпатський вісник НТШ. Число*. 2016. № 1(33). С. 157–166.
7. Кузьмич В. І. Геометричні властивості метричних просторів. *Укр. мат. журн.* 2019. № 3(71). С. 382–399. DOI: 10.1007/s11253-019-01656-1
8. Kuz′mych, V. I., Savchenko A. G. Geometric Relations in an Arbitrary Metric Space. *Matematychni Studii*. 2019. № 1(52). С. 86–95. DOI: 10.30970/ms.52.1.76-85
9. Savchenko A., Zarichnyi M. Metrization of Free Groups on Ultrametric Spaces. *Topol. and Appl.* 2010. № 4(157). С. 724–729. https://doi.org/10.1016/j.topol.2009.08.015
10. Savchenko O. A Remark on Stationary Fuzzy Metric Spaces. *Carpathian Mathematical Publications*. 2011. № 1(**3**). С. 124–129. http://journals.pu.if.ua/index.php/cmp/article/view/85
11. Savchenko A. Fuzzy hyperspace monad. *Matematychni Studii*. 2010. № 2(33). С. 192–198. URL: http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/192-198.pdf
12. Savchenko A., Zarichnyi M. Probability Measure Monad on the Category of Fuzzy Ultrametric Spaces. *Azerb. J. Math.* 2011. № 1(1). 114–121. https://www.azjm.org/volumes/0101/0101-6.pdf
13. Kiosak V., Savchenko A., Zarichnyi M. Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conference Proceedings*. 2019. № 1(2164). С. 040006-1–040006-4. DOI:10.1063/1.5130798
14. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Київ: Вища школа, 1974. 456 с.
15. Каган В.Ф. Очерки по геометрии. М.: Издательство Московского университета, 1963. 571 с.
16. Кузьмич В., Кузьмич Л. Побудова прямолінійно розміщених множин при вивченні метричних просторів. *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки. Серія: Педагогічні науки*. 2018. № 9(382). С. 30–36.
17. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Том 2: Стереометрия, преобразования пространства. М.: МЦНМО, 2006. 256 с.
18. Кузьмич В. І., Кузьмич Ю. В. Аналоги формули Юнгіуса об’єму тетраедра. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. 2012. № 36(249). С. 55–64.
19. Kuzmich V. I., Kuzmich Y. V. Software Tool for Calculating the Volume of the Tetrahedron on the Lengths of its Edges. *Інформаційні технології в освіті*. Херсон: Видавництво Херсонського державного університету. 2012. Вип. 12. С. 67–72.
20. Кузьмич В. І. Побудова плоских образів у довільному метричному просторі. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. 2017. № 11. С. 40–46.
21. Кузьмич В. І. Кутова характеристика у метричному просторі. *Algebraic and Geometric Methods of Analysis: International Scientific Conference: book of abstracts*. (Ukraine, Odessa, May 31 – June 5, 2017). Odessa, 2017. С. 11–12. URL: https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf
22. Кузьмич В. І. Плоско розміщені множини точок у метричному просторі. *Вісник Львівського університету. Серія: механіко-математична*. 2017. Вип. 83. С. 58–71.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15

References

1. Buzeman, G. (1962). Geometriya geodezicheskikh. M.: Fizmatgiz.
2. Berzhe, M. (1984). Geometriya. Tom 1. M.: Mir.
3. Burago, D. Yu., Burago Yu. D., & Ivanov S. V. (2014). Kurs metricheskoy geometrii. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.
4. Sabitov, I. Kh. (2016). Moskovskoye matematicheskoye obshchestvo i metricheskaya geometriya : ot Petersona do sovremennykh issledovaniy. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*. **77**, 2, 185–218.
5. Dovgoshey, A. A., & Dordovskiy, D. V. (2009). Otnosheniye lezhat' mezhdu i izometricheskiye vlozheniya metricheskikh prostranstv. *Ukr. mat. zhurn*. **61**, 10, 1319–1328.
6. Halushchak, S. I. (2016). Deyaki heometrychni kryvi u sensi d-vidrizka. *Prykarpat·s'kyy visnyk NTSH. Chyslo*. **33**, 1, 157–166.
7. Kuz′mych, V. I. (2019). Heometrychni vlastyvosti metrychnykh prostoriv. *Ukr. mat. zhurn*. **71**, 3, 382–399. DOI: 10.1007/s11253-019-01656-1
8. Kuz′mych, V. I., Savchenko, A. G. (2019). Geometric Relations in an Arbitrary Metric Space. *Matematychni Studii*. **52**, 1, 86-95. DOI: 10.30970/ms.52.1.76-85
9. Savchenko, A., Zarichnyi, M. (2010). Metrization of free groups on ultrametric spaces, *Topol. and Appl.* **157**, 4, 724–729. DOI: 10.1016/j.topol.2009.08.015
10. Savchenko, O. (2011). A remark on stationary fuzzy metric spaces. *Carpathian Mathematical Publications*. **3**, 1, 124–129.
Retrieved from http://journals.pu.if.ua/index.php/cmp/article/view/85
11. Savchenko, A. (2010). Fuzzy hyperspace monad. *Matematychni Studii*. **33**, 2, 192–198.
Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/192-198.pdf
12. Savchenko, A., Zarichnyi, M. (2011). Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces. *Azerb. J. Math.* **1**, 1, 114–121.
Retrieved from https://www.azjm.org/volumes/0101/0101-6.pdf
13. Kiosak, V., Savchenko, A., Zarichnyi, M. (2019). Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conference Proceedings*. **2164**, 1, 040006-1–040006-4. DOI:10.1063/1.5130798.
14. Kolmohorov, A. M., Fomin, S. V. (1974). Elementy teoriyi funktsiy i funktsional′noho analizu. Kyyiv: Vyshcha shkola,.
15. Kagan, V. F. (1963). Ocherki po geometrii. M.: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta.
16. Kuz′mych, V., Kuz′mych, L. (2018). Pobudova pryamoliniyno rozmishchenykh mnozhyn pry vyvchenni metrychnykh prostoriv. *Naukovyy visnyk Skhidnoyevropeys'koho natsional'noho universytetu imeni Lesi Ukrayinky. Seriya: Pedahohichni nauky*. **382**, 9, 30–36.
17. Ponarin, Ya. P. (2006). Elementarnaya geometriya. Tom 2: Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva. M.: MTSNMO.
18. Kuz′mych, V. I., Kuz′mych, Yu. V. (2012). Analohy formuly Yunhiusa ob″yemu tetraedra. *Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya: Pedahohichni nauky*. **249**, 36, 55–64.
19. Kuzmich, V. I., Kuzmich, Y. V. (2012). Software tool for calculating the volume of the tetrahedron on the lengths of its edges. *Informatsiyni tekhnolohiyi v osviti:* Kherson: Vydavnytstvo Khersons′koho derzhavnoho universytetu. **12**, 67-72.
20. Kuz′mych, V. I. (2017). Pobudova ploskykh obraziv u dovil′nomu metrychnomu prostori. *Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya: Pedahohichni nauky*. **11**, 40–46.
21. Kuz′mych, V. I. (2017). Kutova kharakterystyka u metrychnomu prostori. *Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference: book of abstracts*. (Ukraine, Odessa, May 31 – June 5, 2017), pp. 11–12.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15

22. Kuz′mych, V. I. (2017). Plosko rozmishcheni mnozhyny tochok u metrychnomu prostori. *Visnyk L'vivs'koho universytetu. Seriya: mekhaniko-matematychna*. **83**, 58–71.

Кузьмич Валерій Іванович – к.ф.-м.н., доцент, професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, e-mail: kuzmich121251@ukr.net, ORCID: 0000-0002-8150-3456.

Кузьмич Людмила Василівна – к.пед.н., доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, e-mail: kuzmich121251@ukr.net, ORCID: 0000-0002-6727-9064.

Савченко Олександр Григорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, e-mail: savchenko.o.g@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4687-5542.

10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.15