УДК 514.180

В.М. ВЕРЕЩАГА, М.О. РУБЦОВ, О.М. ПАВЛЕНКО
Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького
Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

ГЛОБАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТОЧКОВИМ ПОЛІНОМОМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ КОМПОЗИЦІЇ ІЗ ТРЬОХ ТОЧОК, СЕРЕД ЯКИХ Є ДВОКРАТНА

У статті показано послідовність виконання параметризації, уздовж координатної осі, вихідної дискретно поданої лінії (ДПЛ) та надано у загальному вигляді інтерполяційний точковий поліном. Розглядається можливий варіант виконання інтерполяції дискретно поданої кривої (ДПК), яку утворюють три точки, які перетворилися у трикратну точку та надаються значення параметрів щодо цього варіанту. Вказується на те, що з появою на ДПЛ кратних точок у складових елементах параметричного точкового полінома виникають невизначеності. Доведено, що усі ці невизначеності розкриваються, границями яких, у вузлових точках є нуль або одиниця. Вказується на те, що з появою на ДПЛ кратних точок у складових елементах параметричного полінома Лагранжа виникають невизначеності. Доведено, що усі ці невизначеності розкриваються, границями яких, у вузлових точках є нуль або одиниця. Показано, що невизначеності, які виникають з появою кратних точок на ДПЛ, не є перешкодою для глобальної інтерполяції із застосуванням параметричного точкового полінома. Тобто, для будь-якої композиції з трьох точок, побудова та структура запису параметричного точкового полінома лишається без змін. При цьому, ніяких обмежень на створення композиції з трьох точок не існує. Доведено, що усі ці невизначеності розкриваються, границями яких, у вузлових точках є нуль або одиниця. Показано, що невизначеності, які виникають з появою кратних точок на ДПЛ, не є перешкодою для глобальної інтерполяції із застосуванням параметричного полінома за формою Лагранжа. Цей факт доведено у даній статті. Надано композиційну числову матрицю, у відповідності до якої відбувається обумовлена інтерполяція. Елементами цієї композиційної матриці є значення характеристичних функцій інтерполянта у вузлових точках. Показано, що елементи композиційної матриці інтерполяції не змінюються за наявності будь-якої геометричної композиції з трьох точок. Може змінюватись лише статус цих елементів. В одному випадку їх значення є точними, а у іншому – вони можуть бути границею, до якої прямує значення характеристичної функції інтерполяційного точкового параметричного полінома.

Ключові слова: кратні точки, геометрична композиція, композиційна матриця, розкриття невизначеностей, точковий поліном.

В.М. ВЕРЕЩАГА, Н.А. РУБЦОВ, А.М. ПАВЛЕНКО
Мелитопольский государственный педагогический университет
имени Богдана Хмельницкого
Мелитопольская школа прикладной геометрии имени Владимира Найдыша

ГЛОБАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТОЧЕЧНЫМ ПОЛИНОМОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОМПОЗИЦИИ ИЗ ТРЕХ ТОЧЕК, СРЕДИ КОТОРЫХ ЕСТЬ ДВУХКРАТНАЯ

В статье показана последовательность выполнения параметризации, вдоль координатной оси, исходной дискретно представленной линии (ДПЛ) и предоставлено в общем виде интерполяционный точечный полином. Рассматривается возможный

10.32782/2618-0340/2020.1-3.3

вариант выполнения интерполяции дискретно представленной кривой (ДПК), которую образуют три точки, которые превратились в трехкратную точку и предоставляются значения параметров по этому варианту. Указывается на то, что с появлением на ДПЛ кратных точек в составляющих элементах параметрического точечного полинома возникают неопределенности. Доказано, что все эти неопределенности раскрываются, границами которых, в узловых точках является ноль или единица. Указывается на то, что с появлением на ДПЛ кратных точек в составляющих элементах параметрического полинома Лагранжа возникают неопределенности. Доказано, что все эти неопределенности раскрываются, границами которых, в узловых точках являются ноль или единица. Показано, что неопределенности, которые возникают с появлением кратных точек на ДПЛ, не является препятствием для глобальной интерполяции с применением параметрического точечного полинома. То есть, для любой композиции из трех точек, построение и структура записи параметрического точечного полинома остается без изменений. При этом, никаких ограничений на создание композиции из трех точек не существует. Доказано, что все эти неопределенности раскрываются, границами которых, в узловых точках являются ноль или единица. Показано, что неопределенности, которые возникают с появлением кратных точек на ДПЛ, не является препятствием для глобальной интерполяции с применением параметрического полинома по форме Лагранжа. Этот факт доказан в данной статье. Предоставлено композиционную числовую матрицу, в соответствии с которой происходит обусловлена интерполяция. Элементами этой композиционной матрицы является значение характеристических функций интерполянта в узловых точках. Показано, что элементы композиционного матрицы интерполяции не изменяются при наличии любой геометрической композиции из трех точек. Может изменяться только статус этих элементов. В одном случае их значения являются точными, а в другом - они могут быть границей, к которой следует значение характеристической функции интерполяционного точечного параметрического полинома.

Ключевые слова: кратные точки, геометрическая композиция, композиционная матрица, раскрытия неопределенностей, точечный полином.

V.M. VERESHCHAHA, M.O. RUBCOV, O.M. PAVLENKO
Bogdan Khmelnitsky Melitopol State Pedagogical University
Volodimir Naydysh Melitopol School of Applied Geometry

GLOBAL INTERPOLATION BY A POINT POLYNOMIC GEOMETRIC COMPOSITION OF THREE POINTS, AMONG THESE TWO-TIME

The article shows the sequence of performing parameterization, along the coordinate axis, of the original discretely presented line (DPL) and provides in general form an interpolation point polynomial. A possible embodiment of the interpolation of a discretely presented curve (DPC) is considered, which is formed by three points that have turned into a triple point and the parameter values for this option are provided. It is indicated that with the appearance of multiple points on the DPL in the constituent elements of a parametric point polynomial, uncertainties arise. It is proved that all these uncertainties are revealed, the boundaries of which, at nodal points, is zero or one. It is indicated that with the appearance of multiple points on the DPL in the constituent elements of the parametric Lagrange polynomial, uncertainties arise. It is proved that all these uncertainties are revealed, the boundaries of which, at nodal points, are zero or one. It is shown that the uncertainties that arise with the appearance of multiple points on the LPL are not an obstacle to global

10.32782/2618-0340/2020.1-3.3

interpolation using a parametric point polynomial. That is, for any composition of three points, the construction and recording structure of a parametric point polynomial remains unchanged. At the same time, there are no restrictions on creating a composition of three points. It is proved that all these uncertainties are revealed, the boundaries of which, at nodal points, are zero or one. It is shown that the uncertainties that arise with the appearance of multiple points on the LPL are not an obstacle to global interpolation using a parametric polynomial in the Lagrange form. This fact is proved in this article. A composite numerical matrix is provided according to which interpolation occurs. The elements of this compositional matrix is the value of the characteristic functions of the interpolant at the nodal points. It is shown that the elements of the composite interpolation matrix do not change in the presence of any geometric composition of three points. Only the status of these elements can be changed. In one case, their values are accurate, and in the other, they can be the boundary to which the value of the characteristic function of the interpolation point parametric polynomial follows.

Keywords: multiple points, geometric composition, compositional matrix, disclosure of uncertainties, point polynomial.

Постановка проблеми

Геометричне моделювання об’ємних об’єктів довільної форми потребує побудови його поверхні. Зазвичай, побудова поверхонь відбувається шляхом нанесення на неї сітки. Якщо на поверхні геометричного тіла довільної форми нанести сітку, що має незмінну кількість ліній у прямому та трансверсальному напрямках, то будуть виникати чарунки різних розмірів, як великі, так і дуже замалі. На великих чарунках буде збільшуватись похибка відтворення поверхні, а на малих – будуть збільшуватись витрати ресурсів моделювання, що буде зменшувати ефективність та якість моделювання. Сказане обґрунтовує необхідність розробки способу моделювання сіток на поверхнях об’ємних геометричних тіл довільної форми, який мав би можливість використовувати сітки зі змінною кількістю ліній. Змінна кількість ліній у сітках викликає появу дво-, три-,…,n-кратних точок. Отже, розробка та доведення можливості застосування способу інтерполяції дискретно поданих ліній, що утримують кратні точки є, у певній мірі, проблемою, яка і буде розв’язуватись у даній статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Ця робота виконана у рамках і є подальшим розвитком композиційного геометричного моделювання [1, 4, 5, 7], який було розроблено на базі точкового числення Балюби-Найдиша [2, 3].

У згаданих роботах вказується на те, що будь-яка геометрична фігура (ГФ) розглядається як скінчена дискретна непуста множина точок, яка може утримувати різного роду підмножини, що представляють собою цілісний геометричний об’єкт (ГО), який являє собою геометричну композицію, при цьому зміна або заміна будь-якого з елементів геометричної композиції не тягне за собою ніяких змін для решти інших елементів композиції. Геометрична композиція відрізняється від іншого роду композицій тим, що для кожного з її елементів встановлено власні розміри та розміри, що визначають взаємне розташування усіх елементів. Окрім того, у композиційному геометричному моделюванні кожна вихідна геометрична фігура подається у вигляді двох складових – геометричної і параметричної частин. Такий поділ на дві частини обґрунтовується тим, що будь-яку ГФ визначає безпосередньо наявна кількість вихідних точок, а ні в якому разі, не їх взаємне розташування. Наявність точок ГФ представляє її геометричну частину, а взаємне розташування точок ГФ представляє її

10.32782/2618-0340/2020.1-3.3

параметричну частину. Представлення вихідної ГФ у вигляді двох частин названо, у роботах [1, 4, 5, 7], уніфікацією ГФ.

Композиційне геометричне моделювання базується на застосуванні композиційних матриць. Існуюча теорія матриць [9] вивчає матриці, що описують алгебраїчні системи, у алгебраїчних описах яких їх складові елементи знаходяться у певній комбінаційній залежності один від одного. Наявність таких комбінаційних залежностей, зі зміною одного будь-якого з елементів, тягне за собою відповідні зміни вихідних значень для решти інших.

Окрім цього, наявність взаємозалежностей між елементами у описах алгебраїчних систем впливає на результати розв'язків через обмеження свободи вибору складових вихідних елементів. І навпаки, у композиційних матрицях елементи обираються вільно, незалежно один від одного, кількість яких відповідає вимогам до певної композиції. Наприклад, трикутник – визначається трьома точками і, при цьому, для загального виду трикутника не існує жодних обмежень щодо взаємного розташування цих трьох точок. Отже, композиційні матриці призначені для опису геометричних фігур.

У роботі [6, 8] розглядається спосіб розгортання-згортання чарунок, який передбачає наявність на дискретно поданих кривих (ДПК) кратних точок. Однак, у роботах [6, 8] не було доведено можливість проведення інтерполяції ДПК з наявними кратними точками. Чим і викликано написання даної статті, теоретичним підґрунтям для якої є теорія нескінченно малих [9].

Мета дослідження

Розробка способу інтерполяції, доведення його правдивості і можливостей застосування для різних варіантів розташування кратних точок на дискретно поданих лініях для геометричної композиції з трьох точок.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай необхідно глобально інтерполювати ДПК, що має за вузли інтерполяції три базисні точки A_i для $i=\overline{(1,3)}$ (рис. 1), які утворюють геометричну композицію (геометричну фігуру – ГФ) з трьох точок.

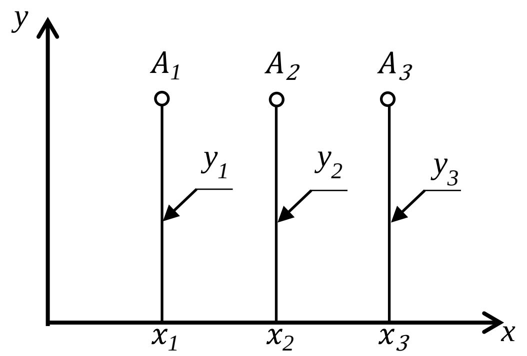

Рис. 1. Вихідна ДПК.

Введемо позначення:

$$x_{11} = x_1 - x_1;\ x_{21} = x_2 - x_1;\ x_{31} = x_3 - x_1. \quad (1)$$

Введемо параметри для вихідної ГФ (рис. 1) уздовж осі 0x:

$$t_1 = \frac{x_{11}}{x_{31}} = 0;\ t_2 = \frac{x_{21}}{x_{31}};\ t_3 = \frac{x_{31}}{x_{31}} = 1\ . \quad (2)$$

Тоді інтерполяційний точковий поліном, що глобально інтерполює вихідну ДПК (рис. 1), матиме вигляд [1, 7]:

$$y_M = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} y_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} (t_j - t),\ \text{для}\ i=\overline{(1,3)}, \quad (3)$$

де y_M – поточна точка на інтерполяційній кривій (3); λ_i – знаменник коефіцієнту, який приводить до одиниці значення відповідної характеристичної функції (ХФ) в i-му вузлі.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.3

Характеристичні функції (ХФ) – це вирази $\frac{1}{\lambda_i}$, , які для відповідного i-го вузла позначимо через $P_i(t)$. Тоді рівняння (3) прийме вигляд:

$$y_M = \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot P_i(t) \tag{4}$$

Розкриємо вирази ХФ із (4), дістанемо:

$$P_1(t)=\frac{(t_2-t)(t_3-t)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)};\ P_2(t)=\frac{(t_1-t)(t_3-t)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)};\ P_3(t)=\frac{(t_1-t)(t_2-t)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)} \tag{5}$$

Усе викладене вище є відомими фактами [1, 4, 5, 7]. Однак, сучасні методи геометричного моделювання потребують виконувати інтерполяцію ДПК з наявними кратними точками [6, 8]. У статті [10] було розглянуто випадок, коли кратними були точки A_1 та A_2. Розглянемо можливість виконання інтерполяції ДПК, яку утворюють три точки, серед яких є кратні (A_2 і A_3).

Нехай точки A_2 *і* A_3 є двократними, тобто $A_2 \equiv A_3$ (рис. 2). Тоді значення параметрів t, що відповідають (2) будуть дорівнювати:

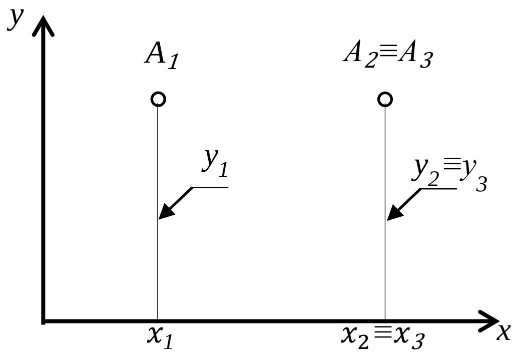

Рис. 2. Варіант вихідної ДПК з двократними точками.

$$t_1=0;\ t_2=1;\ t_3=1. \tag{6}$$

Для кожного зі значень параметрів (6) розрахуємо значення характеристичних функцій із (5).

1) Для $t= t_1$ маємо:

$$P_1(t_1)=\frac{(1-0)(1-0)}{(1-0)(1-0)}=1;\ P_2(t_1)=\frac{(0-0)(1-0)}{(0-1)(1-1)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_1)=\frac{(0-0)(1-0)}{(0-1)(1-1)}=\left(\frac{0}{0}\right). \tag{7}$$

Розкриємо невизначеності з (7)

$$\lim_{t\to t_1} P_2(t_1)=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_1-t_1)(t_3-t_1)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}=0, \tag{8}$$

оскільки $t_1-t_1=0$ – точний нуль, а $t_3-t_1\to 1$; $t_1-t_2\to -1$; $t_3-t_2\to 0$.

$$\lim_{t\to t_1} P_3(t_1)=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_1-t_1)(t_2-t_1)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)}=0, \tag{9}$$

тому що t_1-$t_1=0$ – точний нуль, а $t_2-t_1\to 1$; $t_1-t_3\to -1$; $t_2-t_3\to 0$.

2) Для $t= t_2$ маємо:

$$P_1(t_2)=\frac{(1-1)(1-1)}{(1-0)(1-0)}=0;\ P_2(t_2)=\frac{(0-1)(1-1)}{(0-1)(1-1)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_2)=\frac{(0-1)(1-1)}{(0-1)(1-1)}=\left(\frac{0}{0}\right). \tag{10}$$

Розкриємо невизначеності з (10):

$$\lim_{t\to t_2} P_2(t_2)=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)}=1, \tag{11}$$

10.32782/2618-0340/2020.1-3.3

через те, що t_3-t_2 у чисельнику і знаменнику скорочуються.

$$\lim_{t\to t_2} P_3(t_2) = \lim_{t\to t_2} \frac{(t_1-t_2)(t_2-t_2)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)} = 0, \tag{12}$$

оскільки t_2–t_2=0 – точний нуль, а t_1–t_2→–1; t_1–t_3→–1; t_2–t_3→0.
3) Для $t= t_3$ маємо:

$$P_1(t_3) = \frac{(1-1)(1-1)}{(1-0)(1-0)} = 0;\ P_2(t_3) = \frac{(0-1)(1-1)}{(0-1)(1-1)} = \left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_3) = \frac{(0-1)(1-1)}{(0-1)(1-1)} = \left(\frac{0}{0}\right). \tag{13}$$

Розкриємо невизначеності з (13)

$$\lim_{t\to t_3} P_2(t_3) = \lim_{t\to t_3} \frac{(t_1-t_2)(t_2-t_3)}{(t_1-t_2)(t_3-t_2)} = 0, \tag{14}$$

через те, що t_2-t_3=*0* – точний нуль, а t_1–t_3→–1; t_1–t_2→–1; t_3–t_2→0.

$$\lim_{t\to t_3} P_3(t_3) = \lim_{t\to t_3} \frac{(t_1-t_3)(t_2-t_3)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)} = 1, \tag{15}$$

тому що у чисельнику і знаменнику перший множник $\frac{-1}{-1}$=1, а другий – скорочується.

Як бачимо, для варіанту наявними кратними точками, наявність невизначеностей (7), (10), (13) не стає на перешкоді для здійснення інтерполяції точковим поліномом через те, що вказані невизначеності розкриваються (8), (9), (11), (12), (14), (15) у повній відповідності до вимог, щодо інтерполяції дискретно поданої лінії, яку наведено на рис.1, тобто без наявних особливостей щодо розташування вихідних точок.

Висновки

У даній статті доведено, що для будь-якої композиції, яку утворюють три точки, що подають ДПК, є можливим застосовувати, у якості інтерполянта, точковий поліном і який, при цьому, однаково записується для ДПК з наявними кратними точками.

Список використаної літератури

1. Адоньєв Є. О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. 44 с.
2. Балюба И. Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления: автореф. дис. … д-ра техн. наук. К.: КГТУСА, 1995. 36 с.
3. Балюба И. Г., Найдыш В. М. Точечное исчисление / Под ред. В. М. Верещаги. Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. 234 с.
4. Верещага В. М., Найдиш А. В., Адоньєв Є. О., Лисенко К. Ю. Основи композиційного геометричного моделювання. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 255 с.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.3

5. Верещага В. М., Найдиш А. В., Адоньєв Є. О. Метод композиційного геометричного моделювання: монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. 310 с.
6. Верещага В. М., Павленко О. М., Найдиш А. В. Моделювання горизонтального земельного майданчика у точковому численні: монографія. Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. 187 с.
7. Верещага В. М. Композиційне геометричне моделювання: моногафія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017. 108 с.
8. Павленко О. М. Геометричне моделювання вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН-числення: автореф. дис. … канд. техн. наук, Мелітополь: ТДАТУ, 2017. 25с.
9. Рубцов М. О., Кравець В. І., Назарова О. П. Вища математика: у 2-х ч. Ч. 1. Мелітополь: видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2015. 242 с.
10. Верещага В. М., Найдиш А. В., Рубцов М. О., Павленко О. М. Глобальна інтерполяція композиції з трьох точок параметричними поліномами за формою Лагранжа, що мають кратні точки. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2020. Вип. 97. С. 29–35.

References

1. Adoniev, Ye. O. (2018). Kompozytsiinyi metod heometrychnoho modeliuvannia bahatofaktornykh system: avtoref. ... d-ra tekhn. nauk. K.: KNUBA.
2. Balyuba, I. G. (1995). Konstruktivnaya geometriya mnogoobraziy na osnove tochechnogo ischisleniya: avtoref. dis. … d-ra tehn. nauk. K.: KGTUSA.
3. Balyuba, I. G., & Naydyish, V. M. (2015). Tochechnoe ischislenie / Pod red. V. M. Vereschagi. Melitopol: Izd-vo MGPU im. B. Hmelnitskogo.
4. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., Adoniev Ye. O., & Lysenko K. Yu. (2019). Osnovy kompozytsiinoho heometrychnoho modeliuvannia. Melitopol: FOP Odnoroh T.V.
5. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., & Adoniev, Ye. O. (2019). Metod kompozytsiinoho heometrychnoho modeliuvannia: monohrafiia. Melitopol: FOP Odnoroh T.V.
6. Vereshchaha, V. M., Pavlenko, O. M., & Naidysh, A. V. (2019). Modeliuvannia horyzontalnoho zemelnoho maidanchyka u tochkovomu chyslenni: monohrafiia. Melitopol: MDPU imeni Bohdana Khmelnytskoho.
7. Vereshchaha, V. M. (2017). Kompozytsiine heometrychne modeliuvannia: monohafiia. Melitopol: FOP Odnoroh T.V.
8. Pavlenko, O. M. (2017). Heometrychne modeliuvannia vertykalnoho planuvannia horyzontalnoi zemelnoi dilianky zasobamy tochkovoho BN-chyslennia: avtoref. dys…kand.. tekhn. nauk. Melitopol: TDATU.
9. Rubtsov, M. O., Kravets, V. I., & Nazarova, O. P. (2015). Vyshcha matematyka: u 2-kh ch. Ch. 1. Melitopol: vydavnytstvo MDPU im. B. Khmelnytskoho.
10. Vereshchaha, V. M., Naidysh, A. V., Rubtsov, M. O., & Pavlenko, O. M. (2020). Hlobalna interpoliatsiia kompozytsii z trokh tochok parametrychnymy polinomamy za formoiu Lahranzha, shcho maiut kratni tochky. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. **97**, 29–35.

Верещага Віктор Михайлович – д.т.н., професор, завідувач кафедри математики та фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького, e-mail: mail337@i.ua

10.32782/2618-0340/2020.1-3.3

Рубцов Микола Олексійович – к.т.н., доцент, доцент кафедри математики та фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького, e-mail: rubtsovnik3077@gmail.com

Павленко Олександр Михайлович – к.т.н., доцент, доцент кафедри математики та інформаційних технологій Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького, e-mail: alexander8944@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8646-2622

10.32782/2618-0340/2020.1-3.3