УДК 004.925.8

Г.А. ВІРЧЕНКО, П.М. ЯБЛОНСЬКИЙ
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ДЕЯКІ АСПЕКТИ КОМП'ЮТЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ КРИВИХ БЕЗЬЄ

На сьогоднішній день комп'ютерні інформаційні технології відіграють важливу роль у багатьох сферах життя нашого суспільства. Це стосується таких галузей діяльності як промисловість, сільське господарство, наука, освіта, медицина, культура та інших. Нині окреслені напрямки неможливо уявити без інтенсивного застосування комп'ютерної графіки, базовим компонентом якої є геометричне моделювання. Тому його подальший розвиток становить актуальну науково-прикладну проблему.

Широка популярність графічних комп'ютерних пристроїв і відповідного програмного забезпечення обумовлена простотою, зручністю та наочністю їх використання. Основу сучасних засобів векторного геометричного моделювання становлять належні параметричні лінії, зокрема, криві Безьє різних степенів, серед яких найбільш розповсюджені кубічні лінії. Це пов'язано з їх достатньою гнучкістю, прогнозованим характером формоутворення та ефективністю комп'ютерної реалізації. Однак у певних випадках виникає необхідність застосування кривих Безьє й інших степенів, як нижчих, так і вищих. Зазначений факт потребує опрацювання та покращення відповідного математичного апарату.

Статтю присвячено вдосконаленню комп'ютерного обчислення площ криволінійних трапецій, обмежених лініями Безьє, поліпшенню належних математичних і комп'ютерних програмних засобів. Такі задачі постійно виникають, зокрема, під час варіантних ітераційних оптимізаційних інженерних розрахунків різноманітних технічних конструкцій на міцність у зв'язку з параметричними обчисленнями площ поперечних перерізів силових елементів тощо. У дослідженні докладно розглянуто запропонований математичний апарат, акцентовано його переваги порівняно з існуючими методами, наведено відповідні приклади. Подані матеріали можуть бути успішно впроваджені у практику з метою покращення багатьох засобів геометричного моделювання сучасної комп'ютерної графіки.

Ключові слова: геометричне моделювання, комп'ютерні інформаційні технології, криві Безьє, площі криволінійних трапецій.

Г.А. ВИРЧЕНКО, П.Н. ЯБЛОНСКИЙ
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИВЫХ БЕЗЬЕ

На сегодняшний день компьютерные информационные технологии играют важную роль в различных сферах жизни общества. Это касается таких отраслей деятельности как промышленность, сельское хозяйство, наука, образование, медицина, культура и других. Сейчас указанные направления невозможно представить без интенсивного применения компьютерной графики, базовым компонентом которой является геометрическое моделирование. Поэтому его дальнейшее развитие составляет актуальную научно-прикладную проблему.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.4

Широкая популярность графических компьютерных устройств и соответствующего программного обеспечения обусловлена простотой, удобством и наглядностью их использования. Основу современных средств векторного геометрического моделирования составляют соответствующие параметрические линии, в частности, кривые Безье различных степеней, среди которых наиболее распространены кубические линии. Это связано с их достаточной гибкостью, прогнозируемым характером формообразования и эффективностью компьютерной реализации. Однако в определенных случаях возникает необходимость применения кривых Безье и других степеней, как низших, так и высших. Указанный факт требует проработки и улучшения соответствующего математического аппарата.

Статья посвящена совершенствованию компьютерного вычисления площадей криволинейных трапеций, ограниченных линиями Безье, улучшению надлежащих математических и программных средств. Такие задачи постоянно возникают, в частности, при вариантных итерационных оптимизационных инженерных расчетах различных технических конструкций на прочность в связи с параметрическими вычислениями площадей поперечных сечений силовых элементов и т. д. В исследовании подробно рассмотрен предложенный математический аппарат, акцентированы его преимущества по сравнению с существующими методами, приведены соответствующие примеры. Представленные материалы могут быть успешно внедрены в практику с целью улучшения многих средств геометрического моделирования современной компьютерной графики.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, компьютерные информационные технологии, кривые Безье, площади криволинейных трапеций.

G.A. VIRCHENKO, P.M. YABLONSKYI
National Technical University of Ukraine
'Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute'

SOME ASPECTS OF COMPUTER GEOMETRIC MODELING USING BESIER CURVES

In our time, computer information technologies play a very important role in various areas of modern society. This applies to such branches as industry, agriculture, science, education, medicine, culture and others. Today, the outlined directions cannot be imagined without the intensive use of computer graphics, the basic component of which is geometric modeling. Therefore, its further development is an urgent scientific and applied problem.

The wide popularity of graphic computer devices and related software is due to their simplicity, convenience and visibility of use. The basis of many modern means of vector geometric modeling is the corresponding parametric lines, in particular, Bezier curves of various degrees, among which the most common are cubic lines. This is due to their sufficient flexibility, the predicted nature of the formation and the effectiveness of computer implementation. However, in some cases it is necessary to use Bezier curves and other degrees, both lower and higher. This fact requires elaboration and improvement of the corresponding mathematical apparatus and computer software.

The article is devoted to the further improvement of computer calculation of the areas of curvilinear trapezoids bounded by Bezier curves, the amelioration of appropriate mathematical apparatus and computer software. Such problems constantly spring up, in particular, in case of variant iterative optimization engineering calculations of various technical structures for strength in connection with parametric calculations of the cross-sectional areas of power elements, etc. The study examines in detail the proposed mathematical apparatus and the corresponding computer algorithms, emphasizes their

10.32782/2618-0340/2020.1-3.4

advantages over existing methods and provides relevant examples. The presented materials can be successfully implemented in practice in order to improve many means of geometric modeling of modern computer graphics. Some perspectives for the further development of the presented scientific research are determined.

Keywords: geometric modeling, computer information technologies, Bezier curves, curved trapezoid areas.

Постановка проблеми

У наш час комп’ютерні інформаційні технології широко розповсюджені в різноманітних сферах життєдіяльності людини, зокрема, у промисловості, сільському господарстві, медицині, культурі та в інших галузях. Зазначені засоби нині важко уявити без інтенсивного використання комп’ютерної графіки, базовим компонентом якої є геометричне моделювання. Тому його подальший розвиток вважається актуальною науково-прикладною проблемою.

Основу багатьох сучасних засобів векторного геометричного моделювання становлять параметричні лінії, зокрема, криві Безьє різних степенів, серед яких найбільш популярні кубічні лінії. Це обумовлено їх гнучкістю, прогнозованим формоутворенням та ефективною комп’ютерною реалізацією. Однак у певних випадках виникає потреба застосування кривих Безьє й інших степенів, як нижчих, так і вищих. Зазначений факт потребує належного покращення відповідного математичного апарату.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Прикладом наукових розвідок школи прикладної геометрії НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» щодо використання кривих Безьє для конструювання технічних об’єктів є, зокрема, праці [1–3], де розглянуто задачі формоутворення поверхонь крила та фюзеляжу літака. Теоретичні основи геометричного моделювання даними лініями подано в роботі [4]. Інформацію стосовно розрахунків площ криволінійних трапецій наведено у виданні [5]. Публікацією [6] для кривих Безьє третього степеня запропоновано удосконалення цих обчислень щодо підвищення ефективності їх комп’ютерної реалізації.

Мета дослідження

Головними завданнями статті є подальше узагальнення матеріалів роботи [6] для розрахунків площ криволінійних трапецій, обмежених лініями Безьє різних степенів, аналіз належних прикладів, формулювання перспектив подальшого розвитку напрацьованого підходу та його впровадження в сучасні комп’ютерні інформаційні технології.

Викладення основного матеріалу дослідження

Згідно з виданням [5] площа S криволінійної трапеції, яка обмежена плоскою параметричною кривою $\mathbf{r}(u)$, що визначена в декартовій системі координат Oxy, обчислюється за формулою

$$S = \int_{u_1}^{u_2} r_y(u)\dot{r}_x(u)du, \tag{1}$$

де $r_x(u)$, $r_y(u)$ – це $x(u)$ та $y(u)$ координати радіус-вектора $\mathbf{r}(u)$;
$u \in [0, 1]$ – параметр.

Кубічна крива Безьє (рис. 1) має рівняння

10.32782/2618-0340/2020.1-3.4

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)^3\mathbf{r}_0 + 3u(1-u)^2\mathbf{r}_1 + 3u^2(1-u)\mathbf{r}_2 + u^3\mathbf{r}_3, \qquad (2)$$

де $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$, $\mathbf{r}_1(x_1, y_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2, y_2)$, $\mathbf{r}_3(x_3, y_3)$ – радіус-вектори вершин характеристичної ламаної, яка в даному випадку опукла та однозначна, що забезпечує потрібну властивість лінії (2);
$u \in [0, 1]$ – параметр.

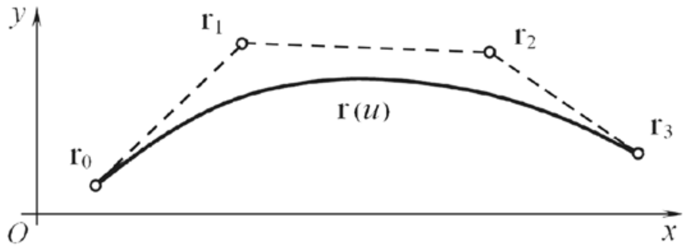

Рис. 1. Плоска крива Безьє третього степеня.

У праці [6] показано, що обчислення інтеграла (1) для кривої (2) еквівалентно добутку матриць:

$$S = K \cdot X \cdot Y, \qquad (3)$$

де $K = (k_i)_1^6$, $k_1 = \int_0^1 (1-u)^5 du = \frac{1}{6}$, $k_2 = \int_0^1 u(1-u)^4 du = \frac{1}{30}$, $k_3 = \int_0^1 u^2(1-u)^3 du = \frac{1}{60}$,

$$k_4 = \int_0^1 u^3(1-u)^2 du = \frac{1}{60}, \quad k_5 = \int_0^1 u^4(1-u) du = \frac{1}{30}, \quad k_6 = \int_0^1 u^5 du = \frac{1}{6};$$

$$X_1=3(x_1-x_0), \; X_2=6(x_2-x_1), \; X_3=3(x_3-x_2);$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 3X_1 & 0 & 0 \\ X_3 & 3X_2 & 3X_1 & 0 \\ 0 & 3X_3 & 3X_2 & X_1 \\ 0 & 0 & 3X_3 & X_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

перша матриця K із яких містить сталі числові коефіцієнти, друга матриця X та третя Y визначаються, відповідно, абсцисами й ординатами вершин характеристичної ламаної опрацьовуваної лінії.

Було розглянуто практичне використання запропонованого підходу на прикладі розрахунків площ поперечних перерізів крила літака між стінками лонжеронів, верхня та нижня поверхні якого сформовані кривими Безьє третього степеня. Зазначено, що розв’язати дану задачу можна й іншими способами, зокрема, чисельним інтегруванням методами прямокутників та трапецій. Перевагами ж розробленого підходу є суттєве зменшення кількості математичних обчислень і точний результат. Це особливо важливо для варіантної ітераційної комплексної оптимізації складних технічних виробів, у поданому випадку сучасного літака, де виконуються сотні тисяч подібних розрахунків. Також проаналізовано питання подальшого підвищення обчислювальної продуктивності викладеного математичного апарату комп’ютерними програмними засобами, зокрема, шляхом виключення з опрацювання нульових елементів матриці X формули (3).

Радіус-вектор $\mathbf{r}(u)$ кривої Безьє n-го степеня має вигляд:

10.32782/2618-0340/2020.1-3.4

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} \mathbf{r}_k, \tag{4}$$

де $\mathbf{r}_k(x_k,\ y_k)$ – радіус-вектори вершин характеристичної ламаної у досліджуваному випадку;
$u \in [0,\ 1]$ – параметр.

Похідна виразу (4) за параметром u визначається залежністю

$$\dot{\mathbf{r}}(u) = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} u^k (1-u)^{n-1-k} (\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k). \tag{5}$$

На підставі співвідношень (1), (4) та (5) для квадратичної кривої Безьє (n=2)

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)^2 \mathbf{r}_0 + 2u(1-u)\mathbf{r}_1 + u^2 \mathbf{r}_2, \tag{6}$$

отримуємо

$$S = K \cdot X \cdot Y, \tag{7}$$

де $K = (k_i)_1^4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$; X_1=(x_1-x_0), X_2=(x_2-x_1); $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ X_2 & 2X_1 & 0 \\ 0 & 2X_2 & X_1 \\ 0 & 0 & X_2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Для лінії Безьє першого степеня (n=1) відповідно маємо

$$\mathbf{r}(u) = (1-u)\mathbf{r}_0 + u\mathbf{r}_1 \tag{8}$$

та

$$S = K \cdot X \cdot Y, \tag{9}$$

де $K = (k_i)_1^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; X_1=(x_1-x_0); $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Вирази (8) і (9) являють собою відому формулу обчислення площі трапеції.

Розглянемо приклад використання співвідношень (6) та (7). Симетричний аеродинамічний профіль (рис. 2) визначений кривими Безьє другого степеня $\mathbf{r}_в(\underline{u})$ і $\mathbf{r}_н(\underline{u})$. Нехай застосовано наступні координати в міліметрах:

$$\mathbf{r}_{0в}=(x_{0в}, y_{0в})=\mathbf{r}_{0н}=(x_{0н}, y_{0н})=(0,\ 0),\ \ \mathbf{r}_{1в}=(x_{1в}, y_{1в})=(0,\ 120),$$
$$\mathbf{r}_{1н}=(x_{1н}, y_{1н})=(0,\ -120),\ \ \mathbf{r}_{2в}=(x_{2в}, y_{2в})=\mathbf{r}_{2н}=(x_{2н}, y_{2н})=(1000,\ 0).$$

(10)

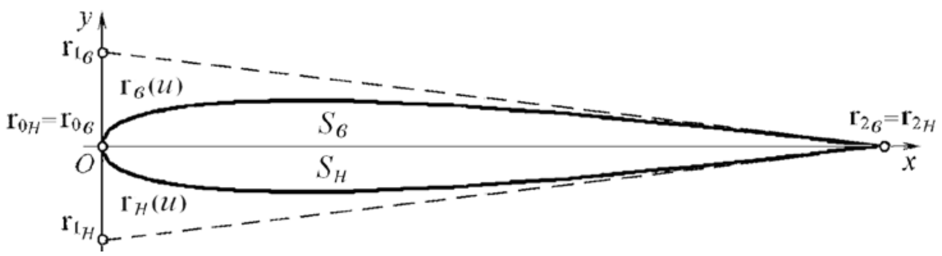

Рис. 2. Аеродинамічний профіль крила літака.

З рис. 2 видно, що необхідна площа S поперечного перерізу крила, обмеженого лініями $\mathbf{r}_в(\underline{u})$ і $\mathbf{r}_н(\underline{u})$, розраховується як сума рівних площ $S_в$ верхньої та $S_н$ нижньої криволінійних трапецій. На підставі формул (6), (7) і (10)

$$S = S_в + S_н = 2S_в = 2{\cdot}40000\ мм^2 = 80000\ мм^2.$$

Залежності (3), (7), (9) подаються також як

$$S = X \cdot K \cdot Y, \tag{11}$$

де $X = (x_i)_0^n$ та $Y^T = (y_i)_0^n$ – матриці абсцис та ординат вершин характеристичної ламаної кривої Безьє n-го степеня, K – матриця коефіцієнтів, що для першого, другого і третього степеня має відповідний вигляд:

$$n=1, K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 \\ -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, k_0 = -\frac{1}{2}, k_1 = -\frac{1}{2};$$

$$n=2, K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_1 \\ -k_2 & -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, k_0 = -\frac{1}{2}, k_1 = -\frac{1}{3}, k_2 = -\frac{1}{6};$$

$$n=3,\ K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 & k_2 & k_2 \\ -k_2 & -k_2 & 0 & k_1 \\ -k_3 & -k_2 & -k_1 & -k_0 \end{pmatrix},\ k_0 = -\frac{1}{2},\ k_1 = -\frac{3}{10},\ k_2 = -\frac{3}{20},\ k_3 = -\frac{1}{20}.$$

На початку статті зазначалось, що у практиці комп'ютерного геометричного моделювання застосовуються лінії Безьє й вищих, ніж третій, степенів. У цьому випадку описаний підхід для розрахунків площ криволінійних трапецій використовується за аналогією. Тоді для четвертого та п'ятого степеня маємо:

$$n=4,\ K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_4 & k_5 \\ -k_1 & 0 & k_3 & k_3 & k_4 \\ -k_2 & -k_3 & 0 & k_3 & k_2 \\ -k_4 & -k_3 & -k_3 & 0 & k_1 \\ -k_5 & -k_4 & -k_2 & -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k_0 = -\frac{1}{2},\ k_1 = -\frac{2}{7},\ k_2 = -\frac{1}{7}, \\ k_3 = -\frac{4}{35},\ k_4 = -\frac{2}{35},\ k_5 = -\frac{1}{70}; \end{matrix}$$

$$n=5,\ K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_5 & k_6 & k_7 \\ -k_1 & 0 & k_3 & k_3 & k_5 & k_6 \\ -k_2 & -k_3 & 0 & k_4 & k_3 & k_5 \\ -k_5 & -k_3 & -k_4 & 0 & k_3 & k_2 \\ -k_6 & -k_5 & -k_3 & -k_3 & 0 & k_1 \\ -k_7 & -k_6 & -k_5 & -k_2 & -k_1 & -k_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k_0 = -\frac{1}{2},\ k_1 = -\frac{5}{18},\ k_2 = -\frac{5}{36},\ k_3 = -\frac{25}{252}, \\ k_4 = -\frac{5}{63},\ k_5 = -\frac{5}{84},\ k_6 = -\frac{5}{252},\ k_7 = -\frac{1}{252}. \end{matrix} \tag{12}$$

10.32782/2618-0340/2020.1-3.4

Зауважимо, що для кривих Безьє вищих степенів характерно ускладнення математичного апарату та зниження комп'ютерної продуктивності їх опрацювання. Також дані лінії схильні до небажаних осциляцій і дещо втрачають передбачуваність свого формоутворення. Однак, поряд із окресленими недоліками, вони після належного наукового дослідження мають гарні перспективи успішного застосування в сучасних автоматизованих графічних засобах.

З точки зору структурно-параметричного геометричного моделювання матриці коефіцієнтів K у формулах (3), (7), (9), (11), (12) є сталими структурними складовими для кожного степеня кривої Безьє (інваріантними до координат останньої), а матриці X та Y – змінними параметричними компонентами (координатами) конкретної лінії.

Висновки

У даній публікації проаналізовано деякі питання вдосконалення обчислення площ криволінійних трапецій, обмежених кривими Безьє різних степенів. Напрацьовані матеріали можуть бути успішно використані у графічних середовищах сучасних комп'ютерних інформаційних технологій.

Список використаної літератури

1. Ванін І. В., Вірченко Г. А. Геометричне моделювання аеродинамічних профілів кривими Безьє третього порядку. *Праці Таврійської державної агротехнологічної академії*. 2004. Т. 26. Вип. 4. С. 91–95.
2. Ванін І. В., Вірченко Г. А. Геометричне моделювання крила літака на стадії ескізного проектування з використанням кривих Безьє третього порядку. *Праці Таврійської державної агротехнологічної академії.* 2006. Т. 31. Вип. 4. С. 89–95.
3. Вірченко Г. А. Параметричне моделювання теоретичної поверхні хвостової частини фюзеляжу пасажирського літака. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2015. Вип. 93. С. 10–13.
4. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. Москва: Мир, 2001. 604 с.
5. Гусак А. А., Гусак Г. М., Бричикова Е. А. Справочник по высшей математике. Минск: ТетраСистемс, 1999. 640 с.
6. Ванін В. В., Вірченко Г. А., Яблонський П. М. До питання геометричного моделювання з використанням кривих Безьє. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2020. Вип. 98. С. 29–34.

References

1. Vanin, I. V., & Virchenko, G. A. (2004). Heometrychne modeliuvannia aerodynamichnykh profiliv kryvymy Bezie tretoho poriadku. *Pratsi Tavriiskoi derzhavnoi ahrotekhnolohichnoi akademii*. **26**, 4, 91–95.
2. Vanin, I. V., & Virchenko, G. A. (2006). Heometrychne modeliuvannia kryla litaka na stadii eskiznoho proektuvannia z vykorystanniam kryvykh Bezie tretoho poriadku. *Pratsi Tavriiskoi derzhavnoi ahrotekhnolohichnoi akademii*. **31**, 4. 89–95.
3. Virchenko, G. A. (2015). Parametrychne modeliuvannia teoretychnoi poverkhni khvostovoi chastyny fiuzeliazhu pasazhyrskoho litaka. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika.* **93**, 10–13.
4. Rodzhers, D., & Adams, Dzh. (2001). Matematicheskie osnovyi mashinnoy grafiki. Moskva: Mir.
5. Gusak, A. A., Gusak G. M., & Brichikova E. A. (1999). Spravochnik po vyisshey matematike. Minsk: TetraSistems.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.4

6. Vanin, V. V., Virchenko, G. A., & Yablonskyi, P. M. (2020). Do pytannia heometrychnoho modeliuvannia z vykorystanniam kryvykh Bezie. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. **98**, 29–34.

Вірченко Геннадій Анатолійович – д.т.н., професор, професор кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп’ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: virchga@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9586-4538.

Яблонський Петро Миколайович – к.т.н., доцент, доцент кафедри нарисної геометрії, інженерної та комп’ютерної графіки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: ypn@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1971-5140.