УДК 519.71

Г.О. ДИМОВА
Херсонський державний аграрно-економічний університет

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Економічна система охоплює параметри і характеристики суспільного виробництва, розподілу, обміну та споживання матеріальних благ. В економічній системі вибір і формування як структури, так і способу функціонування є задачами управління, що забезпечують динаміку соціально-економічного розвитку.

У структурі системи управління можна виділити: об'єкт управління – це безпосередній пристрій, агрегат, підсистема загальної системи, в якій реалізується мета функціонування всієї системи; управляюча система – представляє собою орган управління (суб'єкт управління), що фіксує параметри об'єкта управління і виробляє керуючі впливи на об'єкт управління; обернений зв'язок – це об'єкт, підсистема, за допомогою якої реалізується вплив управляючої системи на керований об'єкт. Ці елементи разом утворюють замкнену систему управління.

Задачі управління економічною системою погано структуровані, і не завжди модель може бути побудована однозначним способом. Це означає, що цілі функціонування багатьох економічних систем не завжди можуть бути чітко сформульовані. Задача управління такою системою полягає в тому, щоб прийняти найкраще рішення для цієї системи.

Одним з ефективних методів дослідження економічної динаміки як в теоретичному, так і в прикладному аспекті є динамічні моделі витрати-випуск (моделі міжгалузевого балансу). Математичні залежності між величиною капітальних вкладень і приростом продукції є основою побудови різних варіантів динамічних моделей міжгалузевого балансу. Відмінною рисою динамічних моделей міжгалузевого балансу є виділення виробничих капіталовкладень (інвестицій) зі складу кінцевої продукції і вивчення їх впливу на зростання обсягу виробництва. В роботі складається та аналізується нелінійний варіант динамічної моделі Леонтьєва, розглядається можливість дослідження динамічних рівнянь міжгалузевого балансу при виникненні збурень в елементах матриць прямих матеріальних затрат та внутрішніх інвестицій. За результатами дослідження зроблені висновки про вплив збурень на матриці внутрішніх інвестицій і матеріальних витрат.

Ключові слова: характеристичне рівняння, власне значення, власний вектор, матриця, збурення, збіжність степеневих рядів, евклідова норма.

А.О. ДЫМОВА
Херсонский государственный аграрно-экономический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Экономическая система охватывает параметры и характеристики общественного производства, распределения, обмена и потребления материальных благ. В экономической системе выбор и формирование как структуры, так и способа функционирования являются задачами управления, обеспечивающими динамику социально-экономического развития.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

В структуре системы управления можно выделить: объект управления - непосредственное устройство, агрегат, подсистема общей системы, в которой реализуется цель функционирования всей системы; управляющая система - орган управления (субъект управления), фиксирующий параметры объекта управления и вырабатывающий управляющие воздействия на объект управления; обратная связь - это объект, подсистема, с помощью которой реализуется воздействие управляющей системы на управляемый объект. Эти элементы вместе образуют замкнутую систему управления.

Задачи управления экономической системой плохо структурированы, и не всегда модель может быть построена однозначно. Это означает, что цели функционирования многих экономических систем не всегда могут быть четко сформулированы. Задача управления такой системой состоит в том, чтобы принять наилучшее решение для этой системы.

Одним из эффективных методов исследования экономической динамики как в теоретическом, так и в прикладном аспекте являются динамические модели затраты-выпуск (модели межотраслевого баланса). Математические зависимости между величиной капитальных вложений и приростом продукции является основой построения различных вариантов динамических моделей межотраслевого баланса. Отличительной особенностью динамических моделей межотраслевого баланса является выделение производственных капиталовложений (инвестиций) из состава конечной продукции и изучения их влияния на рост объема производства. В работе составляется и анализируется нелинейный вариант динамической модели Леонтьева, рассматривается возможность исследования динамических уравнений межотраслевого баланса при возникновении возмущений в элементах матриц прямых материальных затрат и инвестиций. По результатам исследования сделаны выводы о влиянии возмущений на матрицы внутренних инвестиций и материальных затрат.

Ключевые слова: характеристическое уравнение, собственное значение, собственный вектор, матрица, возмущения, сходимость степенных рядов, евклидова норма.

H. DYMOVA
Kherson State Agrarian and Economic University

USE OF THE PERTURBATION THEORY METHOD FOR THE STUDY OF DYNAMIC EQUATIONS OF THE INTERBRANCH BALANCE

The economic system covers the parameters and characteristics of social production, distribution, exchange and consumption of material goods. In the economic system, the choice and formation of both the structure and the way of functioning are management tasks that ensure the dynamics of socio-economic development.

In the structure of the control system, one can distinguish: the control object – the direct device, unit, subsystem of the general system, in which the goal of the functioning of the entire system is realized; management system – management body (management entity), fixing the parameters of the control object and generating control actions on the control object; feedback is an object, a subsystem, with the help of which the control system acts on a managed object. These elements together form a closed control system.

Economic management tasks are poorly structured and not always a model can be constructed unambiguously. This means that the goals of the functioning of many economic systems cannot always be clearly formulated. The task of managing such a system is to make the best decision for this system.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

One of the effective methods for studying economic dynamics in both theoretical and applied aspects are dynamic input-output models (models of interindustry balance). Mathematical dependencies between the value of capital investments and production growth is the basis for constructing various options for dynamic models of interbranch balance. A distinctive feature of the dynamic models of the interindustry balance is the allocation of industrial investments (investments) from the composition of the final product and the study of their impact on the growth of production volume. A nonlinear version of the Leontiev dynamic model is compiled and analyzed, the possibility of studying the dynamic equations of the interindustry balance in the event of disturbances in the elements of the direct material cost and investment matrices is considered. Based on the results of the study, conclusions are drawn about the influence of disturbances on the matrix of domestic investment and material costs.

Keywords: characteristic equation, eigenvalue, eigenvector, matrix, perturbation, convergence of power series, euclidean norm.

Постановка проблеми

Економічна система охоплює параметри і характеристики суспільного виробництва, розподілу, обміну та споживання матеріальних благ. В економічній системі вибір і формування як структури, так і способу функціонування є задачами управління, що забезпечують динаміку соціально-економічного розвитку.

У структурі системи управління можна виділити: об'єкт управління – безпосередньо пристрій, агрегат, підсистема загальної системи, в якій реалізується мета функціонування всієї системи; управляюча система – орган управління (суб'єкт управління), що фіксує параметри об'єкта управління і виробляє управляючі впливи на об'єкт управління; обернений зв'язок – об'єкт, підсистема, за допомогою якої реалізується вплив управляючої системи на керований об'єкт. Ці елементи формують в сукупності замкнуту систему управління. Необхідно дослідити рівняння економічної динаміки на стійкість методом теорії збурень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Міжгалузевий баланс служить базою визначення взаємозбалансованої системи основних показників і відображає кругообіг суспільного продукту на міжгалузевому рівні. Аналіз структурних взаємодій міжгалузевого балансу описаний математичною моделлю В. Леонтьєва (США) [6].

Мета дослідження

Мета роботи полягає в дослідженні динамічних рівнянь міжгалузевого балансу при виникненні збурень в елементах матриць прямих матеріальних затрат та внутрішніх інвестицій.

Викладення основного матеріалу

У статистичному балансі капіталовкладення відображаються загальною величиною в складі кінцевої продукції [6]. У динамічній же схемі вироблений кінцевий продукт $Y_i(t)$ в i-й галузі за період t ділиться на дві частини: $C_i(t)$ та $K_i(t)$, тобто

$$Y_i(t) = K_i(t) + C_i(t). \tag{1}$$

Величина $C_i(t)$ призначена для опису об'ємів особистого і суспільного споживання, накопичення в невиробничій сфері, на експорт і т.п. Величина $K_i(t)$ описує приріст фондів в галузях, тобто

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Delta\varphi_{ij}(t), \tag{2}$$

де $\Delta\varphi_{ij}(t)$ – кількість продукції i-ої галузі, що направляється в поточному періоді в j-у галузь в якості виробничих капіталовкладень (для збільшення кількості виробничого обладнання, споруд і т.п.).

Таким чином, система рівнянь виробництва і розподілу продукції за період t в динамічному балансі має вигляд:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} \Delta\varphi_{ij}(t) + C_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \\ x_{ij}(t) &= a_{ij}(t)x_j(t), \quad i,j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{3}$$

де $a_{ij}(t)$ – коефіцієнт прямих матеріальних витрат в період t;
$C_i(t)$ – частина кінцевого продукту, що йде на споживання.

Приріст продукції j-ї галузі за період t дорівнює

$$\Delta x_j(t) = x_j(t) - x_j(t-1).$$

Приймемо, що приріст фондів прямо пропорційний приросту продукції, тобто

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{ij}(t) &= b_{ij}(t)\Delta x_{ij}(t), \\ b_{ij}(t) &= \frac{\Delta\varphi_{ij}(t)}{\Delta x_j(t)}, \end{aligned} \tag{4}$$

де $b_{ij}(t)$ – коефіцієнт пропорційності, який показує скільки продукції i-ї галузі треба вкласти в j-у галузь, щоб збільшити випуск в цій галузі на одиницю (капіталомісткість одиниці випуску продукції j-ї галузі – коефіцієнт вкладень).

З співвідношень (3) випливає, що

$$x_i(t) = \sum a_{ij}(t)x_j(t) + \sum b_{ij}(t)\Delta x_j(t) + C_i(t). \tag{5}$$

Оскільки в неперервному випадку $\dfrac{d\varphi_{ij}(t)}{dt} = b_{ij}(t)\dfrac{dx_j(t)}{dt}$, тому

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\frac{dx_j(t)}{dt} + C_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Вираз (6) є динамічною моделлю В. Леонтьєва [6].

Коефіцієнти $a_{ij}(t)$ утворюють матрицю прямих витрат $\mathbf{A}(t)$ розміром $(n\times n)$. Коефіцієнти $b_{ij}(t)$ утворюють матрицю $\mathbf{B}(t)$ – матрицю внутрішніх інвестицій розміром $(n\times n)$.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

Ввівши вектор $\vec{C}(t)$ кінцевого продукту, що йде на споживання з точністю до структури споживання в період t $\vec{C}(t) = x(t)\,\vec{d}(t)$, $\vec{d}(t)$ – вектор, що задає структуру споживання, і вектор трудомісткості продукції $\vec{l}(t) = (l_1(t), l_2(t), \ldots, l_n(t))$, $\sum_{j=1}^{n} l_j(t) x_j(t) = L(t)$ – загальну кількість трудових ресурсів, задіяних в економічній системі, отримаємо систему (n+1) рівнянь:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \mathbf{B}(t)\frac{d\vec{x}(t)}{dt} + \vec{x}(t)\vec{d}(t), \tag{7}$$

$$\vec{l}(t)\vec{x}(t) = L(t), \tag{8}$$

де останнє рівняння може виступати в якості обмеження по трудовим ресурсам.

Наведемо рівняння (7) в стандартній формі:

$$\vec{x}(t)\left[\mathbf{I} - \mathbf{A}(t) - \vec{d}(t)\right] = \mathbf{B}(t)\frac{d\vec{x}(t)}{dt},$$

де $\mathbf{B}(t)\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{x}(t)\left[\mathbf{I} - \mathbf{A}(t) - \vec{d}(t)\right]$.

Вважаючи структуру споживання постійною і позначивши $\mathbf{A}(t) - \vec{d}(t) = \widetilde{\mathbf{A}}(t)$, отримаємо:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \left[\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{A}}(t)\right]\mathbf{B}^{-1}(t)\vec{x}(t). \tag{9}$$

У моделі (9) передбачається, що приріст продукції поточного періоду обумовлюється вкладеннями, зробленими в цьому ж періоді. Хоча в реальних системах матеріального балансу існує запізнювання інвестицій, амортизація основних виробничих фондів.

Розв’язком рівняння (9) є вектор $\vec{x}(t)$, координатами якого є значення валового продукту при відомих матрицях матеріальних витрат $\mathbf{A}(t)$ і матрицях виробничих інвестицій $\mathbf{B}(t)$, які за змістом функціонування економічної системи повинні бути невід’ємно визначеними. Крім того, матриця $\mathbf{A}(t)$ повинна бути нерозкладеною і продуктивною [4, 6, 7], що еквівалентно одній з наступних вимог:
1) максимальне власне число матриці $\mathbf{A}(t)$ $\lambda(A) < 1$;
2) матриця $\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}(t)\right)^{-1}$ – додатно визначена;
3) матричний ряд $\sum_{i=0}^{\infty} A^i(t)$ є збіжним;
4)

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i(t) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}(t)\right)^{-1}. \tag{10}$$

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

Як показано в [5, 6, 7] плавна зміна елементів матриць **A** і **B** може привести до порушення їх продуктивності, нерозкладеності і додатної визначеності, що призведе до якісних змін розв'язків рівнянь матеріального балансу і до нестійкого функціонування економічної системи. Тому роль виродженої критичної точки грають вироджені власні значення матриць $\mathbf{A}(t)$ і $\mathbf{B}(t)$ [1, 5, 8].

Нехай зазначені матриці задовольняють умові:

$$\left|a_{ij}\right| < 1\,, \quad \left|b_{ij}\right| < 1 \tag{11}$$

і змінилася умова внутрішніх інвестицій.

Нехай λ_1 – просте власне значення матриці **A** при деякому t. Знайдемо відповідне власне значення матриці

$$(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}). \tag{12}$$

Характеристичне рівняння матриці **A** має вигляд:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + C_{n\text{-}1}\lambda^{n\text{-}1} + C_{n\text{-}2}\lambda^{n\text{-}2} + \ldots + C_0 = 0\,. \tag{13}$$

Тоді отримуємо таке характеристичне рівняння матриці (12):

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{B}) = \lambda^n + C_{n\text{-}1}(\varepsilon)\,)\lambda^{n\text{-}1} + C_{n\text{-}2}(\varepsilon)\lambda^{n\text{-}2} + \ldots + C_0(\varepsilon) = 0\,, \tag{14}$$

де $C_r(\varepsilon)$ – поліноми степеня $(n–r)$ такі, що

$$C_r(0) = C_r\,. \tag{15}$$

Це стає очевидним (відповідно до теорії алгебраїчних функцій), якщо запишемо точний вираз для $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \varepsilon\mathbf{B})$ [1–2]. Можна накласти вимоги [4]:

$$C_r(\varepsilon) = C_r + C_{r1}\varepsilon + C_{r2}\varepsilon^2 + \ldots + C_{r,n\text{-}r}\varepsilon^{n\text{-}r}\,. \tag{16}$$

Розглянемо випадок, коли λ_1 – простий корінь рівняння (13), тоді для $|\varepsilon| < 1$ існує простий корінь рівняння (14), який задається збіжним степеневим рядом:

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots \tag{17}$$

Очевидно, що $\lambda_1(\varepsilon) \to \lambda_1$ при $\varepsilon \to 0$.

Збурення елементів матриці $\boldsymbol{\varepsilon}$ визначає збурення власного значення λ_1 характеристичного полінома матриці **A**, що внаслідок неперервної залежності змін коефіцієнтів характеристичного полінома від змін елементів матриці **A**, в свою чергу, приведе до зміни власного вектора x_1 матриці **A**, а вона приведе до зміни напряму і величини руху економічної системи. Оскільки λ_1 – просте власне значення матриці $(\mathbf{A} – \lambda\mathbf{I})$, тому на основі теорії лінійних рівнянь [3, 7] за компоненти власного вектора x можна взяти

$$\left(A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn}\right), \tag{18}$$

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

де A_{n1} – алгебраїчне доповнення (n, i)-го елемента ($\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$), а, отже, A_{ni} – це поліноми степеня λ_1, не вищого за (n – 1).

Застосуємо цей результат до простого власного значення $\lambda_1(\varepsilon)$ матриці ($\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}$). Введемо позначення: $\mathbf{x}_1$ – власний вектор матриці $\mathbf{A}$; $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ – власний вектор матриці ($\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}$). Тоді елементи вектора $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ – це поліноми за ε, і завдяки тому, що степеневий ряд для $\lambda_1(\varepsilon)$ збігається при заданих ε, кожний елемент вектора $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ можна представити збіжним степеневим рядом за ε, постійний член в якому – це відповідний елемент вектора $\mathbf{x}_1$. Звідси отримуємо:

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \ldots, \tag{19}$$

де кожна компонента векторного ряду (19) в правій частині є абсолютно збіжним степеневим рядом за ε.

Аналогічно результату (17) для власного значення, отримуємо результат для власного вектора.

Розглянемо більш складний випадок: матриця $\mathbf{A}$ має елементарні дільники. В цьому випадку існує система правих і лівих власних векторів $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_n$ та $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, …, $\mathbf{y}_n$ таких, що

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j = 0 \quad (i \neq j), \tag{20}$$

хоча ці вектори єдині, якщо всі власні значення прості [1, 2, 3].

Виразимо кожний вектор $\mathbf{z}_i$ у ряді (19) через вектори $\mathbf{x}_j$:

$$\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \mathbf{x}_j . \tag{21}$$

Тоді маємо

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = \mathbf{x}_1 + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} S_{j1} \mathbf{x}_j + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} S_{j2} \mathbf{x}_j + \ldots, \tag{22}$$

і, збираючи разом члени з $\mathbf{x}_j$, отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(\varepsilon) = \left(1 + \varepsilon S_{11} + \varepsilon^2 S_{12} + \ldots\right)\mathbf{x}_1 + \left(\varepsilon S_{21} + \varepsilon^2 S_{22} + \ldots\right)\mathbf{x}_2 + \ldots + \\ + \left(\varepsilon S_{n1} + \varepsilon^2 S_{n2} + \ldots\right)\mathbf{x}_n .\end{aligned} \tag{23}$$

Збіжність n степеневих рядів, що стоять в дужках, є простий наслідок абсолютної збіжності рядів (19).

Отримаємо точне значення виразу для збурення першого порядку в термінах правих і лівих власних векторів (20). Позначимо

$$S_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j , \; i = \overline{1, n}, \tag{24}$$

де $\mathbf{y}_j$ та $\mathbf{x}_j$ – нормовані ліві та праві власні вектори.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

Якщо $\mathbf{y}_j$ і $\mathbf{x}_j$ дійсні, тоді S_i є косинусом кута між цими векторами [2, 3]. В будь-якому випадку $\left|S_i\right| = \left|\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_j\right| \le \left\|\mathbf{y}_i\right\|_2 \cdot \left\|\mathbf{x}_j\right\|_2 = 1$, де $\left\|\mathbf{y}_i\right\|_2, \left\|\mathbf{x}_j\right\|_2$ – евклідові норми векторів.

Для нормованих векторів формула (23) має вигляд:

$$\mathbf{x}_1(\varepsilon) = x_1 + \left(\varepsilon t_{21} + \varepsilon^2 t_{22} + \ldots\right) \cdot \mathbf{x}_2 + \ldots + \left(\varepsilon t_{n1} + \varepsilon^2 t_{n2} + \ldots\right) \cdot \mathbf{x}_n . \tag{25}$$

Визначимо величину

$$\beta_{ij} = \mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j , \tag{26}$$

$$\left|\beta_{ij}\right| = \left|\mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_j\right| \le \left\|\mathbf{B}\right\|_2 \left\|\mathbf{y}_i\right\|_2 \left\|\mathbf{x}_j\right\|_2 . \tag{27}$$

За визначенням

$$(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B}) \mathbf{x}_1(\varepsilon) = \lambda_1(\varepsilon) \mathbf{x}_1(\varepsilon) \tag{28}$$

і завдяки тому, що просте власне значення $\lambda_1(\varepsilon)$ матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B})$ і всі компоненти вектора $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$ представляються збіжними степеневими рядами, можна прирівняти члени при однакових степенях ε в цьому рівнянні. Використовуючи співвідношення (17) та (27), отримаємо

$$\mathbf{A}\left(\sum_{i=2}^{n} t_{i1} \mathbf{x}_i\right) + \mathbf{B} \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \left(\sum_{i=2}^{n} t_{i1} \mathbf{x}_i\right) + k_1 \mathbf{x}_1 \tag{29}$$

або

$$\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) t_{i1} \mathbf{x}_i + \mathbf{B} \mathbf{x}_1 = k_1 \mathbf{x}_1 . \tag{30}$$

Помноживши зліва отримане рівняння на $\mathbf{Y}_1^T$, і з урахуванням того, що $\mathbf{Y}_1^T \mathbf{x}_i = 0 \quad (i \ne 1)$, маємо

$$k_1 = \frac{\mathbf{Y}_1^T \mathbf{B} \mathbf{x}_1}{\mathbf{Y}_1^T \mathbf{x}_1} = \frac{\beta_{11}}{S_1} . \tag{31}$$

Отже,

$$\left|k_1\right| \le \frac{n}{\left|S_1\right|} . \tag{32}$$

Помноживши рівність (30) зліва на $\mathbf{Y}_i^T$, отримаємо

$$(\lambda_i - \lambda_1) t_{i1} S_i + \beta_{i1} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n) . \tag{33}$$

Отже, з подання (25) випливає, що член першого порядку в збуренні x_1 має вигляд:

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

$$\varepsilon\left[\frac{\beta_{21}x_2}{(\lambda_1-\lambda_2)S_2}+\frac{\beta_{31}x_2}{(\lambda_1-\lambda_3)S_3}+\ldots+\frac{\beta_{n1}x_n}{(\lambda_1-\lambda_n)S_n}\right]=\varepsilon\sum_{i=2}^{n}\frac{\beta_{i1}}{S_i(\lambda_1-\lambda_i)}x_i\,. \tag{34}$$

Розглядаючи власні вектори, розкладаємо їх збурення на компоненти в напрямках $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_n$. Якщо $\mathbf{x}_i$ ортогональні (це має місце, коли матриця **A** має n елементарних дільників), тоді можна оцінити відхилення економічної системи при заданих збуреннях ε. За параметр ε можна взяти коефіцієнт інфляції. При великих значеннях косинуса кута між векторами $\mathbf{x}_i^T(\varepsilon),\ \mathbf{x}_i$ складові векторів практично збігаються і система є стійкою до збурень. Випадок кратних власних значень і нелінійних дільників матриць **A** та **B** може бути досліджений з переходом до канонічних форм Жордана і з використанням теорем Гершгоріна [1, 2, 4, 7, 9].

Висновки

1. При простому власному значенні матриці матеріальних витрат **A** дослідження впливу збурень на матриці внутрішніх інвестицій **B** і матеріальних витрат **A** може бути зведено до знаходження косинуса кута між векторами $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_1(\varepsilon)$.
2. При наявності n елементарних дільників матриці **A** дослідження впливу збурення ε може бути зведено до знаходження косинусів кутів між власними векторами, які відповідають різним власним значенням. Малі значення косинусів кутів між векторами $\mathbf{x}_i(\varepsilon)$ та $\mathbf{x}_i$ означають значний дрейф економічної системи під дією інфляції.
3. Випадок кратних власних значень і нелінійних дільників вимагає більш складного дослідження з залученням, крім теорії збурень і алгебраїчних функцій, математичного апарату канонічних форм Жордана [1].

Список використаної літератури

1. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров. *Успехи математических наук*. 1971. Т. XXVI. № 2 (158). С. 101–114.
2. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976. 649 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
4. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
5. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1. М.: Мир, 1981. 344 с.
6. Кротов В. Ф., Лагоша Б. А., Лагоша С. М. Основы теории оптимального управления. М.: Мир, 1990. 430 с.
7. Марасанов В. В., Дымова А. О., Дымов В. С. Проекционные методы оценки состояний динамической системы при частично наблюдаемых выходных координатах. *Проблеми інформаційних технологій*. 2016. №1(019). С. 259–264.
8. Марасанов В. В., Дымова А. О., Дымов В. С. Исследование на чувствительность моделей динамических систем, полученных проекционным методом. *Проблеми інформаційних технологій*. 2016. №1(019). С. 169–173.
9. Димова Г. О. Дослідження чутливості та стійкості моделей динамічних систем. Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. 2017. № 28–29. С. 55–59.

References

1. Arnold, V. I. (1971). About Matrices Depending on Parameters. *Successes of Mathematical Sciences*. **XXVI**, 2 (158), 101–114.
2. Van der Varden, B. L. (1976). Algebra. M.: Science.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5

3. Gantmakher, F. R. (2004). Matrix Theory. M.: FIZMATLIT.
4. Lankaster, P. (1978), Matrix Theory. M.: Science.
5. Gilmor, R. (1981). Applied Catastrophe Theory. T. 1. M.: World.
6. Krotov, V. F., Lagosha, B. A., & Lagosha, S. M. (1990). Fundamentals of the Theory of Optimal Control. M.: World.
7. Marasanov, V. V., Dymova, A. O., & Dymov, V. S. (2016). Projection Methods for Estimating the States of a Dynamical System with Partially Observed Output Coordinates. *Problems of Informational Technologies*. **1** (019), 259–264.
8. Marasanov, V. V, Dymova, A. O., & Dymov, V. S. (2016). Sensitivity Investigation of the Dynamic Systems Models Obtained by the Projection Method. *Problems of Informational Technologies*. **1** (019), 169–173.
9. Dymova, H. O. (2017). Investigation of Sensitivity and Stability of Models of Dynamic Systems. *Computer-Integrated Technologies: Education, Science, Production*. **28-29**, 55–59.

Димова Ганна Олегівна – к.т.н., доцент кафедри прикладної математики та економічної кібернетики Херсонського державного аграрно-економічного університету, e-mail: anndymova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5294-1756.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.5