

УДК 621.384.6

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ, Н.Г. РЕШЕТНЯК  
Национальный Научный Центр «Харьковский Физико-Технический Институт»

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАССИВА ДАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ МАГНЕТРОННОЙ ПУШКИ И ЗАДАЧА РАДИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

*Представлены результаты исследования по формированию радиального электронного пучка магнетронной пушкой с вторичноэмиссионным катодом. Целью работы являлось создание математической модели формирования радиального электронного пучка с энергией в десятки кэВ в спадающем магнитном поле соленоида, исследование зависимости характеристик тока пучка от амплитуды и распределения магнитного поля вдоль оси системы, изучение возможности облучения поверхности трубчатых изделий. В работе на основе гамильтонова формализма движения электронов в магнитном поле синтезировано программное средство, позволяющее провести численное моделирование динамики трубчатых электронных потоков в спадающем магнитном поле соленоида. На основе метода наименьших квадратов построен и реализован алгоритм преобразования массива значений магнитного поля вдоль оси транспортировки частиц в аналитическую дифференцируемую функцию. Синтезированная функция и её производная использованы при моделировании движения электронов в магнитном поле магнетронной пушки. Приводятся результаты численного моделирования по движению трубчатого электронного потока. Изучено формирование его распределения при транспортировке в спадающем магнитном поле соленоида. Приводятся также экспериментальные данные по облучению пучком электронов металлических мишеней в камере пушки. Полученные результаты моделирования согласуются с данными эксперимента.*

*Ключевые слова:* магнетронная пушка, вторичноэмиссионный катод, электронный пучок, математическое моделирование, гистограмма, распределение магнитного поля.

О.С. МАЗМАНИШВИЛІ, М.Г. РЕШЕТНЯК  
Національний Науковий Центр «Харківський Фізико-Технічний Інститут»

### ПЕРЕТВОРЕННЯ МАСИВУ ДАНИХ ЦИЛІНДРИЧНОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ МАГНЕТРОННОЇ ГАРМАТИ ТА ЗАДАЧА РАДІАЛЬНОГО РУХУ ЕЛЕКТРОНІВ

*Представлені результати досліджень щодо формування радіального электронного пучка в магнетронній гарматі з вторинноемісійним катодом. Ціллю роботи було створення математичної моделі формування радіального электронного пучка з енергією в десятки кеВ у магнітному полі соленоїда, дослідження залежності характеристик струму від амплітуди та розподілу магнітного поля вдовж осі системи, вивчення можливості опромінювання поверхні трубчастих виробів. У роботі на основі гамильтонового формалізму руху електронів у магнітному полі синтезовано програмний засіб, який дозволяє провести чисельне моделювання динаміки трубчастих електронних потоків у спадаючому магнітному полі соленоїда. На основі методу найменших квадратів побудований і реалізований алгоритм перетворення масиву значень магнітного поля вдовж осі транспортування частинок в аналітичну диференційовану функцію. Синтезована функція та її похідна використана*

*при моделюванні руху електронів у магнітному полі магнетронної гармати. Приведено результати чисельного моделювання руху трубчастого електронного потоку. Вивчено формування розподілу електронів при їх транспортуванні в повздовжньому спадаючому магнітному полі соленоїда. Приводяться також експериментальні дані стосовно опромінювання пучком електронів металічних мішеней в камері гармати. Отримані результати моделювання узгоджуються з даними експериментів.*

*Ключові слова: магнетронна гармата, вторинноemisійний катод, електронний пучок, математичне моделювання, гістограма, розподіл магнітного поля.*

A.S. MAZMANISHVILI, N.G. RESHETNYAK

National Science Center 'Kharkov Institute of Physics & Technology', Kharkov, Ukraine

## **DATA TRANSFORMATION CYLINDRICAL MAGNETIC FIELD MAGNETRON GUN AND THE PROBLEM OF RADIAL MOTION OF ELECTRONS**

*The results of the study on the formation of a radial electron beam by a magnetron gun with a secondary emission cathode are presented. The aim of the work was to create the mathematical model of the formation of a radial electron beam with energy of tens of keV in the incident magnetic field of the solenoid, to study the dependence of the characteristics of the beam current on the amplitude and distribution of the magnetic field along the axis of the system, to study the possibility of irradiation of the surface of the tubular products. In the work on the basis of the Hamiltonian formalism of electron motion in a magnetic field, a software tool has been synthesized that allows to perform numerical simulations of the dynamics of tubular electron flows in a falling magnetic field of a solenoid. Based on the least-squares method, an algorithm for converting an array of magnetic field values along an axis of particle transport into an analytic differentiable function is constructed and implemented. The synthesized function and its derivative are used to model the motion of electrons in the magnetic field of a magnetron gun. The results of numerical modeling of the motion of a tubular electron flow are presented. The formation of its distribution during transport in the falling magnetic field of the solenoid is studied. Experimental data on electron beam irradiation of metal targets in the gun chamber are also given. The simulation results are in good agreement with the experimental data.*

*Keywords: magnetron gun, secondary emission cathode, electron beam, mathematical modeling, histogram, magnetic field distribution.*

### **Постановка проблемы**

Данные о магнитных полях в циклических ускорителях представляются в виде массивов измеренных отсчетов амплитуд поля вдоль продольной координаты. Между тем, при решении задач о динамике частиц необходимо решать дифференциальные уравнения, в которых амплитуда поля и её производная рассматриваются как аналитические функции продольной координаты. Эти функции должны обладать свойствами функций Лапласа, описывающих в пространстве магнитные поля от заданных токов. Возникает задача представления функции магнитного поля, полученной опытным путем в цилиндрической системе в виде массива отсчетов вдоль продольной координаты, в её аналитический и дифференцируемый аналог. Эта функция должна представлять магнитное поле на всем интервале наблюдений и отвечающим им моделирующим расчетам.

## Анализ последних исследований и публикаций

Магнетронные пушки с холодными вторичноэмиссионными катодами перспективны для использования их при создании мощных СВЧ-приборов, в ускорительной технике в связи с высокой плотностью тока, конструктивной простотой, стабильностью эмиссии катодов и т.д. [1, 2]. На основе магнетронной пушки с вторичноэмиссионным катодом был создан ускоритель электронов, который использует осевой электронный пучок для облучения металлических мишеней [3].

## Цель исследования

Объектом данной работы является измерение параметров радиального электронного пучка при его транспортировке в спадающем магнитном поле соленоида и построение математической модели движения электронного потока в области спада поля.

Целью исследований является создание математической модели формирования радиального электронного пучка с энергией в десятки кэВ в спадающем магнитном поле, исследование зависимости характеристик тока пучка от амплитуды и распределения магнитного поля вдоль оси системы.

## Изложение основного материала исследования

В экспериментальной установке имеется цилиндрическое магнитное поле, значения которого заданы массивом данных. Этому массиву необходимо поставить в соответствие аналитическую дифференцируемую функцию, значения которой совпадают с опытным массивом поля в заданных узлах. Пусть электрон с энергией  $E$ , движущийся параллельно (или под углом) оси на некотором расстоянии  $r_0$  от неё, влетает в магнитное поле. Требуется построить уравнение движения частицы в магнитном поле и на основании решения уравнения движения для выбранных моментов времени  $t$  определить координаты электрона.

Для построения математической модели решения воспользуемся аксиальной симметрией задачи. Поэтому будем работать в полярной системе координат  $(r, z, \vartheta)$ .

Гамильтониан рассматриваемой задачи в ней имеет вид  $H = \frac{p_r^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left( \frac{p_\vartheta}{r} - e_0 A \right)^2$ ,

где  $e_0$ ,  $m$  – заряд и масса покоя электрона,  $p_r$ ,  $p_z$ ,  $p_\vartheta$  – канонические импульсы,  $A$  – магнитный потенциал. Его с учетом азимутальной симметрии пока запишем в виде  $A(r, z) = Brf(z)$ , где  $f(z)$  – функция продольной координаты, которой распорядимся ниже,  $B$  – напряженность магнитного поля в рассматриваемой точке.

В гамильтоновой форме уравнения движения для координат и импульсов имеют общий вид  $\dot{r} = \partial H / \partial p_r$ ,  $\dot{z} = \partial H / \partial p_z$ ,  $\dot{\vartheta} = \partial H / \partial p_\vartheta$ ,  $\dot{p}_r = -\partial H / \partial r$ ,  $\dot{p}_z = -\partial H / \partial z$ ,  $\dot{p}_\vartheta = -\partial H / \partial \vartheta$ . В результате нахождения частных производных получим систему из 6 уравнений. В ней перейдем, используя скорость света  $c$ , от текущего времени  $t$  к переменной  $s = ct$ , производную по ней будем обозначать штрихом.

Для канонических импульсов осуществим замену  $p_r = e_0 B q_r$ ,  $p_z = e_0 B q_z$ ,  $p_\vartheta = e_0 B q_\vartheta$ . После преобразований приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} r' = \mu q_r, & z' = \mu q_z, & \vartheta' = \mu (q_\vartheta / r^2 - f(z)), \\ q_r' = \mu r (q_\vartheta / r^2 - f(z)) (q_\vartheta / r^2 + f(z)), & q_z' = \mu r^2 (q_\vartheta / r^2 - f(z)) df(z) / dz, & q_\vartheta' = 0, \end{cases} \quad (1)$$

в которой  $f(z)$  – полевая функция продольной координаты,  $df(z)/dz$  – производная функции  $f(z)$ .

В уравнениях (1)  $\mu = e_0 B / mc$ ,  $Bf(z)$  – функция, описывающая напряженность магнитного поля вдоль оси  $z$ . Амплитуду  $B$  выбираем так, чтобы можно было пользоваться функцией  $Bf(z)$  на всем интервале возможных значений  $z$ .

К уравнениям (1) необходимо присоединить начальные условия для  $r_0$ ,  $z_0$ ,  $\vartheta_0$ , а также для  $q_{r0}$ ,  $q_{z0}$ ,  $q_{\vartheta 0}$ .

Устойчивость алгоритма решения связана с шагом  $\Delta s$  решения и параметром  $\mu$ . Тогда условие  $\mu \Delta s \ll 1$  будет выполняться, если  $\Delta s \ll 0.0001$  м. Итак, с вычислительной точки зрения задача может быть сформулирована как задача нахождения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Сформулированная задача Коши может быть решена, при условии, что обеспечена возможность на каждом шаге интегрирования уравнений (1) использовать функции  $f(z)$  и  $df(z)/dz$  как аналитические функции.

Блок-схема установки приведена на рис. 1. При движении электронов существенным является то обстоятельство, что магнитное поле в пушке (рис. 2) обладает цилиндрической симметрией. Это позволяет использовать систему (1) для анализа и численного моделирования.

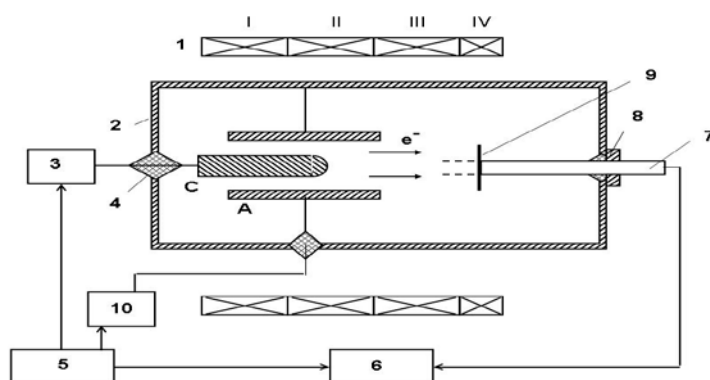


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки. 1 – секции соленоида (I, II, III, IV), 2 – вакуумный объем, 3 – высоковольтный импульсный генератор, 4 – изолятор, 5 – блок синхронизации, 6 – измерительная система, 7 – центрирующий стержень, 8 – уплотнение, 9 – цилиндр Фарадея, 10 – генератор, А – анод, С – катод.

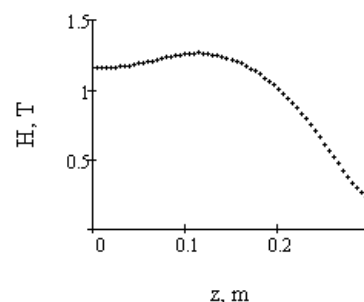


Рис. 2. Типичное продольное распределение магнитного поля.

Пусть вдоль оси  $z$  задано продольное распределение магнитного поля. Опытные данные получены в результате измерений, согласно которым построена таблица  $\{z_n, H_n\}$  где  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Примем, что это магнитное поле создано последовательной совокупностью из  $M$  виртуальных соленоидов с набором известных геометрических характеристик  $\{R_m, Z_{1,m}, Z_{2,m}\}$ , где  $m = 1, 2, \dots, M$ , а  $R_m$ ,  $Z_{1,m}$  и  $Z_{2,m}$  – соответственно радиус, левая и правая граница  $m$ -ого соленоида вдоль оси  $z$ . Необходимо восстановить (оценить) значения  $\{h_m\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  напряженностей в каждом из соленоидов и, опираясь на них, построить функцию  $f(z)$  конфигурации магнитного поля.

Задача такого рода, в общем случае, относится к числу некорректных задач. В частности, если количество измерений  $N$  превосходит число соленоидов  $M$ , то точного решения может не быть. Поэтому ниже мы ограничимся задачей *оценивания* искомым амплитуд  $\{h_m\}$ . Будем при решении использовать известное (точное) лапласовское выражение для амплитуды  $\varphi(z)$  магнитного поля амплитудой  $h$  на оси одного соленоида радиусом  $R$ , имеющего левую и правую границы  $Z_1$  и  $Z_2$ , соответственно

$$f(z, h, R, Z_1, Z_2) = h\varphi(z) \equiv \frac{1}{4}h \left[ \frac{z - Z_2}{\sqrt{(z - Z_2)^2 + R^2}} - \frac{z - Z_1}{\sqrt{(z - Z_1)^2 + R^2}} \right], \quad (2)$$

тогда магнитное поле  $f(z)$ , образованное совокупностью таких соленоидов, можно описать выражением:

$$f(z) = \sum_{m=1}^M h_m \varphi_m(z) = \sum_{m=1}^M h_m \frac{1}{4} \left[ \frac{z - Z_{2,m}}{\sqrt{(z - Z_{2,m})^2 + R_m^2}} - \frac{z - Z_{1,m}}{\sqrt{(z - Z_{1,m})^2 + R_m^2}} \right], \quad (3)$$

где  $\varphi_m(z) = \varphi_m(z, R_m, Z_{1,m}, Z_{2,m})$ , а  $\{h_m, R_m, Z_{1,m}, Z_{2,m}\}$  – амплитуда поля радиус, левая и правая граница  $m$ -ого соленоида вдоль оси  $z$ .

Из (3) можно получить аналитическое выражение для производной  $df(z)/dz$ .

Пусть имеются данные регистрации в виде таблицы  $\{z_n, H_n\}$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  (см. рис. 2), и на её основании требуется найти массив амплитуд  $\{h_m\}$  поля, где  $m = 1, 2, \dots, M$ , с помощью которых можно синтезировать поле  $f(z)$  со свойствами непрерывности и дифференцируемости.

Сопоставляя используемые группы данных, запишем уравнения для амплитуд магнитного поля  $\{h_m\}$  для каждой из точек вдоль оси  $z$ :  $\sum_{m=1}^M h_m \varphi_m(z_n) = H_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Это выражение является системой из  $(N+1)$  линейных неоднородных уравнений относительно  $M$  искомым величин  $\{h_m\}$ . В зависимости от значений  $(N+1)$  и  $M$  такая система может быть совместной, переполненной или недополненной, поэтому в общем случае её точное решение может отсутствовать. Поэтому в качестве решения будем рассматривать *оценку* значений величин  $\{h_m\}$ .

Применим известный метод наименьших квадратов (МНК), на основании которого в качестве решения примем то, которое наилучшим образом приближается к точному решению в смысле его наименьшего среднеквадратичного отклонения. В рамках МНК построим функционал  $Q(h_1, h_2, \dots, h_M) = \sum_{n=0}^N \left[ \sum_{m=1}^M h_m \varphi_m(z_n) - H_n \right]^2$  и потребуем, чтобы в пространстве переменных  $\{h_m\}$  функционал  $Q$  достигал минимума:  $Q(h_1, h_2, \dots, h_M) \xrightarrow{h} \min$ . Условие минимума приводит к системе уравнений  $\partial Q(h_1, h_2, \dots, h_M) / \partial h_m = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . В этой системе после дифференцирования по каждой из  $\{h_m\}$  получим набор линейных уравнений относительно компонент искомого вектора  $h_v$ , который запишем в виде  $Ah_v = B$ . Здесь  $A$  – матрица с

элементами  $A_{n,m} = \sum_{k=0}^N \varphi_m(z_k) \varphi_n(z_k)$ ,  $B$  – вектор правой части с компонентами  $B_n = \sum_{k=0}^N H_k f_n(z_k)$ . В результате получаем искомое решение  $h_v = A^{-1}B$ . Найденное решение полученной системы уравнений и будем принимать за искомый набор амплитуд  $\{h_m\}$ .

В работе рассматривался массив данных магнитного поля объемом  $N=73$  точек. В численных расчетах использовалась совокупность из  $M=12$  виртуальных соленоидов. На рис. 3 приведены исходные данные об амплитудах магнитного (квадратики) и результат восстановления распределения магнитного поля  $f(z)$ . Результат вычисления продольной производной поля  $df(z)/dz$  функции  $f(z)$  приведен на рис. 4.

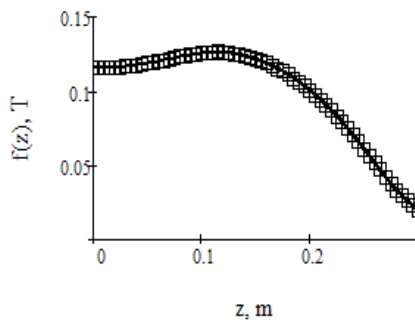


Рис. 3. Данные исходного магнитного поля (квадратики) и построенная функция  $f(z)$  (линия) от координаты  $z$ .

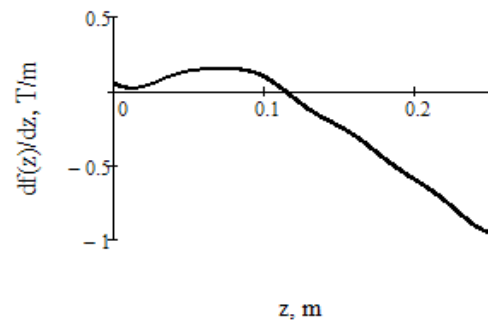
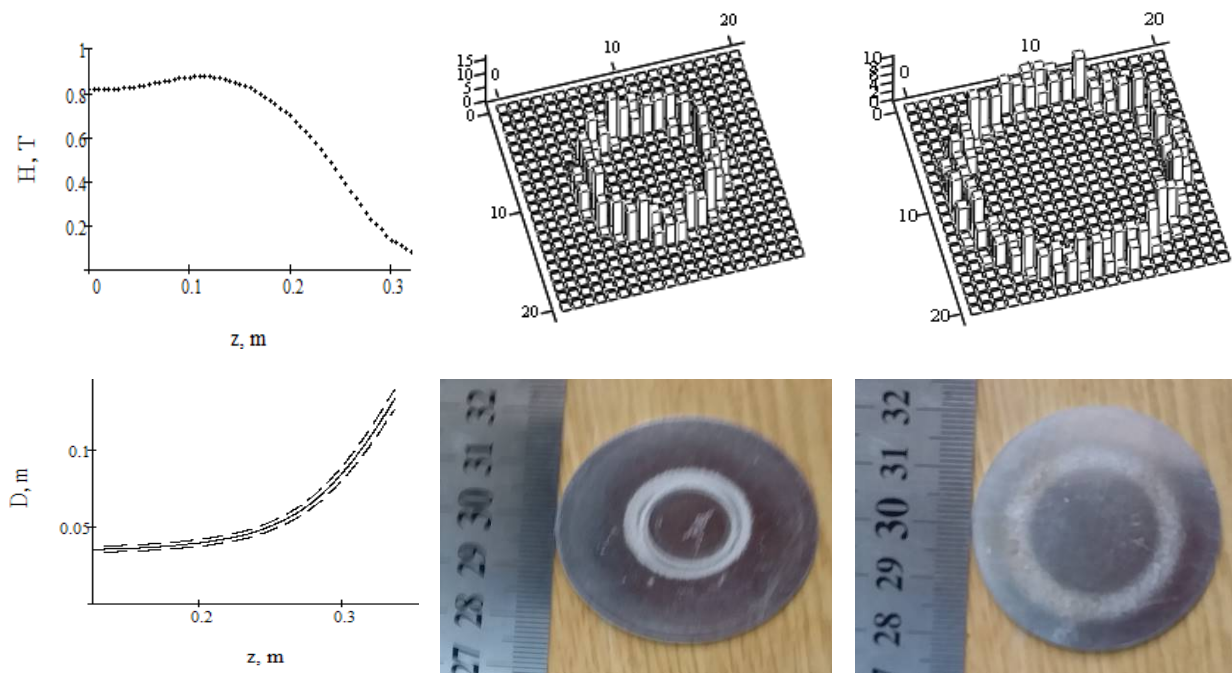


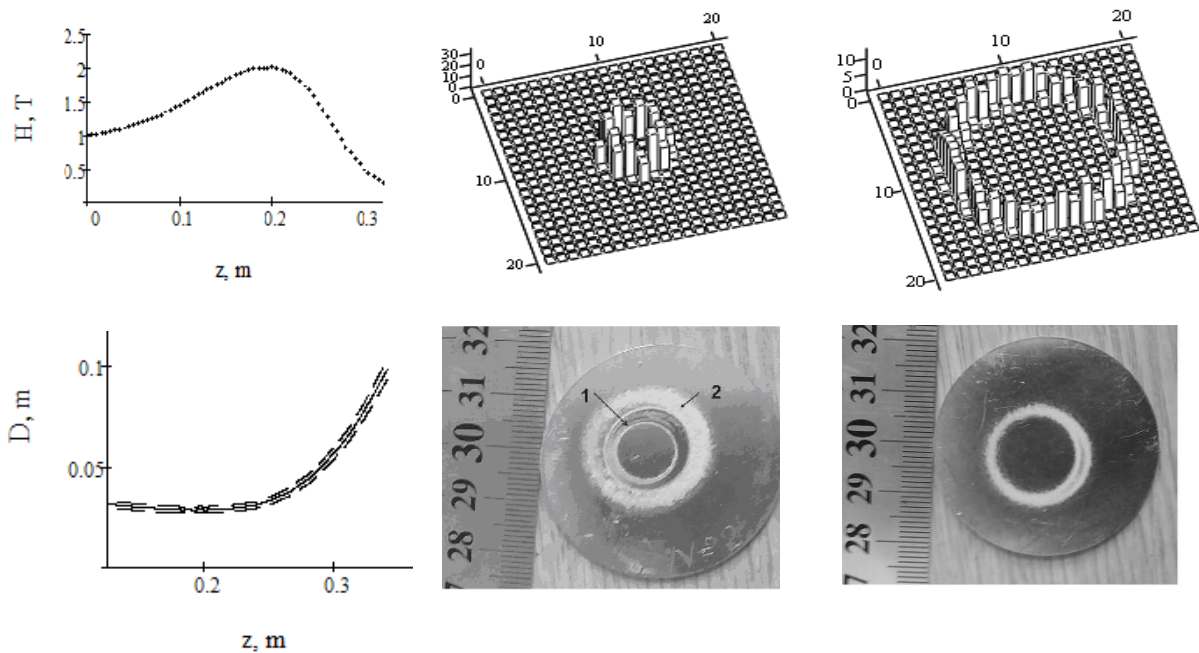
Рис. 4. Зависимость построенной производной  $df(z)/dz$  от продольной координаты  $z$ .

В эксперименте использовалось магнитное поле с максимальной амплитудой 0,8 Т, вид которого приведен на рис. 5. Продольная зависимость амплитуды поля здесь имеет плавный характер. На том же рисунке приведены расчетные зависимости (двумерные гистограммы) распределения электронного пучка (объем выборки 500 частиц, цена деления 12 мм/дел) и экспериментальные отпечатки пучка в плоскости мишени. Из рисунка можно видеть значительное увеличение размеров пучка при уменьшении амплитуды магнитного поля.

Также в эксперименте использовалось магнитное поле с максимальной амплитудой 2,0 Т, вид которого приведен на рис. 6. В этом случае продольная зависимость амплитуды поля здесь имеет градиентный характер. На том же рисунке приведены расчетные зависимости (двумерные гистограммы) распределения электронного пучка (объем выборки 500 частиц, цена деления 12 мм/дел) и отпечатки пучка в плоскости мишени. Из рисунка можно видеть уменьшение размеров пучка в области максимума амплитуды магнитного поля. Экспериментально показано, что с увеличением максимальной амплитуды и/или градиента поля эффект радиального сжатия пучка еще более выражен.



**Рис. 5. Результаты моделирования и опытные данные.**  
**Верхний ряд: конфигурация магнитного поля (слева),**  
**гистограмма плотности частиц при  $z = 275$  мм (посередине) и  $z = 327$  мм (справа).**  
**Нижний ряд: расчетная зависимость диаметра пучка от пролетной базы  $z$  (слева),**  
**плотности частиц на мишени при  $z = 185$  мм (посередине) и  $z = 312$  мм (справа).**



**Рис. 6. Результаты моделирования и опытные данные.**  
**Верхний ряд: конфигурация магнитного поля (слева),**  
**гистограмма плотности частиц при  $z = 185$  мм (посередине) и  $z = 327$  мм (справа).**  
**Нижний ряд: расчетная зависимость диаметра пучка от пролетной базы  $z$  (слева),**  
**плотности частиц на мишени при  $z = 185$  мм (посередине, цифра 1) и  $z = 327$  мм (справа).**

## Выводы

Применение разработанного программного средства, основанного на аналитической модели распределения магнитного поля вдоль оси идеального соленоида, позволило, опираясь на массив из 73 опытных данных на оси транспортировки электронов, восстановить амплитуду  $f(z)$  магнитного поля и её производную  $df(z)/dz$  как аналитические функции продольной координаты  $z$ .

Получены решения прямой задачи моделирования траекторий электронов для заданных начальных условий и параметров системы. Приведены расчетные зависимости распределения пучка электронов (объем выборки 500) в плоскости мишени.

Из проведенных исследований следует, что возможно устойчивое формирование электронного пучка в радиальном и осевом направлениях при транспортировке в магнитном поле магнетронной пушки.

Получены отпечатки электронного пучка на металлических мишенях, расположенных на различных выбранных расстояниях. Найденные численные зависимости согласуются с экспериментальными результатами.

## Список использованной литературы

1. Dovbnya A. N., Lavrinenko S. D., Zakutin V. V. Surface Modification of Zirconium and Zr1%Nb Alloy by the Electron Beam of the Magnetron Gun-Based Accelerator. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Physics of Radiation Effects and Radiation Materials Science*. 2011. № 2(72). P. 39–45.
2. Ayzatsky M. I., Dovbnya A. N., Mazmanishvili A. S., Reshetnyak N. G., Romas'ko V. P., Chertishchev I. A. Studies on Formation of the Radially-Directed Electron Beam Generated by the Magnetron Gun with a Secondary Emission Cathode. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations*. 2016. № 3(103). P. 11–16.
3. Dovbnya A. N., Dovbnya N. A., Mazmanishvili A. S., Reshetnyak N. G., Chertishchev I. A. Transport Simulation of a High-Current Electron Beam Formed by the Magnetron Gun with a Secondary-Emission Cathode in a Decreasing Solenoid Field. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations*. 2015. № 6(100). P. 77–82.

## References

1. Dovbnya, A. N., Lavrinenko, S. D., & Zakutin, V. V. (2011). Surface Modification of Zirconium and Zr1%Nb Alloy by the Electron Beam of the Magnetron Gun-Based Accelerator. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Physics of Radiation Effects and Radiation Materials Science*. 2(72), 39–45.
2. Ayzatsky, M. I., Dovbnya, A. N., Mazmanishvili, A. S., Reshetnyak, N. G., Romas'ko, V. P., & Chertishchev, I. A. (2016). Studies on Formation of the Radially-Directed Electron Beam Generated by the Magnetron Gun with a Secondary Emission Cathode. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations*. 3(103), 11–16.
3. Dovbnya, A. N., Dovbnya, N. A., Mazmanishvili, A. S., Reshetnyak, N. G., & Chertishchev, I. A. (2015). Transport Simulation of a High-Current Electron Beam Formed by the Magnetron Gun with a Secondary-Emission Cathode in a Decreasing Solenoid Field. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations*. 6(100), 77–82.



Мазманишвили Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник ННЦ ХФТИ, e-mail: mazmanishvili@gmail.com, ORCID: 0000-0003-0373-0626.

Решетняк Николай Григорьевич – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ННЦ ХФТИ, e-mail: nreshetnyak@kit.kharkov.ua, ORCID: 0000-0002-2345-6789.