

УДК656.02

В.П. СЛАВИЧ

Херсонський національний технічний університет

К.Д. ДОБРОВА

Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради

### МОДЕЛЬ ТА МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ОПОРНОГО ТА ОПТИМАЛЬНИХ ПЛАНІВ МОДИФІКОВАНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ГРУПУВАННЯ ПОСТАЧАЛЬНИКІВ ВАНТАЖУ

*В даній роботі запропоновано модель спеціального типу транспортної задачі, на умови якої додається обмеження за вивезенням вантажу із груп постачальників, що закріплені за відповідними постачальниками більш високого порядку, які мають власні обмеження запасів вантажу. Це додаткове обмеження дійсно зустрічається в практиці вантажних перевезень, оскільки постачальники, як правило, в свою чергу отримують вантаж від заводів, місць видобування природних ресурсів, оптових складів та інших. Для зазначеної моделі розроблено модифіковані методи знаходження опорного та оптимального планів вантажних перевезень з метою мінімізації вартості перевезень в заданих обмеженнях.*

*Ключові слова: транспортна задача, модифікована транспортна задача, споживачі, постачальники, опорний план, оптимальний план, метод потенціалів.*

В.П. СЛАВИЧ

Херсонский национальный технический университет

К.Д. ДОБРОВА

Херсонский физико-технический лицей Херсонского городского совета

### МОДЕЛЬ И МЕТОД НАХОЖДЕНИЕ ОПОРНОГО И ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ГРУППИРОВАНИЕ ПОСТАВЩИКОВ ГРУЗОВ

*В данной работе предложена модель специального типа транспортной задачи, в условия которой добавляются ограничения по вывозам груза из групп поставщиков, которые закреплены за соответствующими поставщиками более высокого уровня, которые имеют собственные ограничения запасов груза. Это дополнительное ограничение действительно встречается в практике грузовых перевозок, поскольку поставщики обычно, в свою очередь, получают груз от заводов, мест добычи природных ресурсов, оптовых складов и другое. Для указанной модели разработаны модифицированные методы нахождения опорного и оптимального планов грузовых перевозок с целью минимизации стоимости перевозок в заданных ограничениях.*

*Ключевые слова: транспортная задача, модифицированная транспортная задача, потребители, поставщики, опорный план, оптимальный план, метод потенциалов.*

V.P. SLAVIC

Kherson National Technical University

K.D. DOBROVA

Kherson Physical and Technical Lyceum of Kherson City Council

## MODEL AND METHOD OF TASKING SUPPORT AND OPTIMAL PLAN OF THE MODIFIED TRANSPORT PROBLEM IN ACTIVE GROUPS OF GOODS

*Transportation is one of the most important branches of the economy. The efficiency of cargo transportation is described by the transport task. It solves problems of optimization of mathematical programming and is devoted to minimization of expenses for transportation of cargoes from cargo suppliers to consumers. However, in the case of freight transportation, there are cases where suppliers themselves receive goods from top-level suppliers (for example, factories producing transported goods or wholesale warehouses from which goods are transported to small warehouses, etc.), with those high-level suppliers limited by their own inventory (e.g. , if they are factories, they are limited in production capacity). Therefore, an important task is to create methods and algorithms for finding optimal transportation plans for this type of transportation. In this work, we propose a model of a special type of transport task that limits the export of goods from supplier groups that retrieve goods from suppliers in a higher order, which have their limitations. This additional restriction is indeed encountered in the practice of freight transportation, since suppliers usually receive cargo from factories, natural resource extraction sites, wholesale warehouses and more. Therefore, modified methods for finding the basic and optimal plans of freight transportation were developed for this model in order to minimize the cost of transportation within the given restrictions. Applying optimization methods, finding the best solution, developing the optimal transportation plan from a certain number of suppliers to a certain number of consumers. This streamlines and optimizes transportation, which in turn will increase the revenue and efficiency of the enterprise as a whole and the transport department separately.*

*Keywords: transport problem, modified transport problem, consumers, suppliers, support plan, optimal plan, potential method.*

### Постановка проблеми

Перевезення є однією з найважливіших гілок економіки. Економічна ефективність перевезення вантажів описується транспортною задачею. Транспортна задача відноситься до оптимізаційних задач математичного програмування і присвячена мінімізації вартості перевезення від постачальників вантажу до споживачів. Але в практиці вантажних перевезень існують випадки, коли постачальники вантажу самі отримують вантаж від постачальників більш високого порядку (наприклад, заводів, що виробляють продукцію, яка перевозиться, або оптових складів, з яких перевозиться вантаж до дрібних складів, та інше), причому зазначені постачальники високого рівня обмежені власними запасами вантажу (наприклад, якщо це заводи, то вони обмежені виробничою потужністю). На відміну від відомої транспортної задачі з проміжними пунктами дана задача відрізняється відсутністю конкретних наперед заданих значень кількості вантажу, що має бути вивезений від постачальників. Тому важливою задачею є створення методів та алгоритмів знаходження оптимальних планів вантажних перевезень зазначеного різновиду транспортної задачі.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз останніх наукових розробок показав, що питаннями оптимізації вантажних перевезень присвячено роботи багатьох вчених, зокрема, Канторовича Л.В.,

Афанасьєва Л.Л., Гаджинського А.М., Левковецького П.Р., Курганова В.М. [1-6]. Проте для зазначеного вище типу транспортної задачі не наводиться моделей та методів її розв'язання.

### Мета дослідження

Метою роботи є розробка методу та алгоритмів знаходження опорного та оптимального планів транспортної задачі математичного програмування у випадку, коли постачальники вантажу розподіляються на групи, що обслуговуються постачальниками більш високого порядку, а вони, в свою чергу, мають власні обмеження, які утворюють обмеження за вивезенням вантажу із зазначених груп.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай задано  $n$  постачальників деякого однорідного вантажу  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , у яких цей вантаж знаходиться відповідно у кількостях  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Постачальники поділені на групи  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ , вантаж у яких обмежено відповідно значеннями  $z_1, z_2, \dots, z_p$ . Узагальнимо дане групування наступним чином:

$$Z_1 : \{A_1, A_2, \dots, A_{i_1}\}; Z_2 : \{A_{i_1+1}, A_{i_1+2}, \dots, A_{i_2}\}; Z_3 : \{A_{i_2+1}, A_{i_2+2}, \dots, A_{i_3}\}; \dots; \\ Z_k : \{A_{i_{k-1}+1}, A_{i_{k-1}+2}, \dots, A_{i_k}\}; \dots; Z_p : \{A_{i_{p-1}+1}, A_{i_{p-1}+2}, \dots, A_{i_p}\}.$$

Даний вантаж необхідно розвести  $m$  споживачам  $B_1, B_2, \dots, B_m$ , яким він необхідний відповідно у кількостях  $b_1, b_2, \dots, b_m$ . Відомі величини вартостей перевезення однієї одиниці вантажу, від будь-якого постачальника до будь-якого споживача, які задані у вигляді коефіцієнтів  $C_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ .

Необхідно знайти такий план перевезень, який дозволяє вивезти весь вантаж від постачальників, задовольняє потреби споживачів, відповідає вимогам обмежень за вивезенням із груп та який матиме найменшу вартість. У даній роботі розглядається замкнена модель, до якої додається умова:

$$\sum_{l=1}^k z_p \neq \sum_{j=1}^m b_j.$$

Схематично умову групування постачальників вантажу за постачальниками більш високого рівня показано на рис. 1.

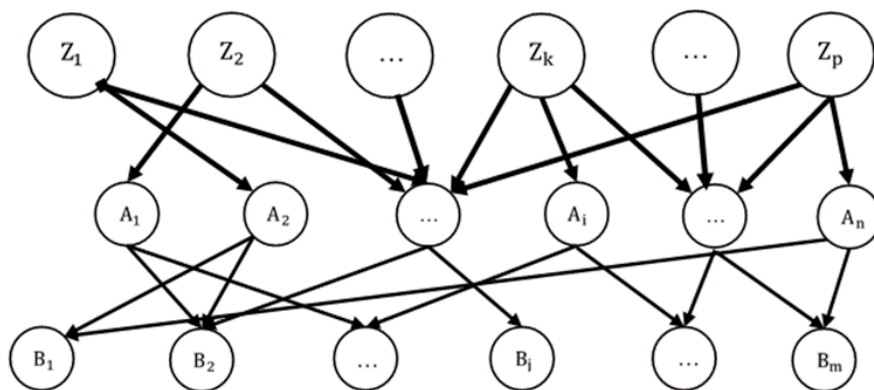


Рис. 1. Групування постачальників вантажу.

Модель зазначеної задачі складається із класичної цільової функції:

$$F = C_{11} \cdot X_{11} + C_{12} \cdot X_{12} + \dots + C_{nm} \cdot X_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} \cdot X_{ij} \rightarrow \min,$$

де  $X_{ij}$  – кількість вантажу, який перевозиться від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача,

та системи обмежень:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2m} = a_2 \\ \dots \\ x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} = a_n \\ \hline x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} = b_2 \\ \dots \\ x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{nm} = b_m \\ \hline x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1m} + x_{21} + \\ + x_{22} + \dots + x_{2m} + \dots + x_{i_1 1} + \\ + x_{i_1 2} + \dots + x_{i_1 m} \leq z_1 \\ \\ x_{(i_1+1)1} + x_{(i_1+1)2} + \dots + x_{(i_1+1)m} + \\ + x_{(i_1+2)1} + x_{(i_1+2)2} + \dots + x_{(i_1+2)m} + \\ + \dots + x_{i_2 1} + x_{i_2 2} + \dots + x_{i_2 m} \leq z_2 \\ \\ x_{(i_{p-1}+1)1} + x_{(i_{p-1}+1)2} + \dots + x_{(i_{p-1}+1)m} + \\ + x_{(i_{p-1}+2)1} + x_{(i_{p-1}+2)2} + \dots + x_{(i_{p-1}+2)m} + \\ + \dots + x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nm} \leq z_p \end{array} \right.$$

Для знаходження опорного плану пропонується наступний модифікований метод найменшої вартості.

Складаємо таблицю, в яку заносяться вхідні дані та в якій в результаті виконання пунктів алгоритму, буде знайдено опорний та оптимальний плани (табл. 1).

1. Знаходимо клітинку з найменшою вартістю перевезень, позначаємо її через  $(i_0; j_0)$ , а номер групи постачальників, до якої вона відноситься через  $k_0$ , та порівнюємо відповідні їй значення запасів, потреб та обмежень за вивезенням із групи, знаходимо менше з цих чисел:  $\Delta x = \min(a_{i_0}; b_{j_0}; z_{k_0})$ .

2. Знайдений мінімум записуємо в клітинку в якості значення перевезення:

$$X_{ij} = \Delta x.$$

3. Далі зменшуємо значення запасів, потреб та обмеження за вивезенням з групи на величину  $\Delta x$ :

$$a'_{i_0} = a_{i_0} - \Delta x; \quad b'_{j_0} = b_{j_0} - \Delta x; \quad z'_{k_0} = z_{k_0} - \Delta x.$$

Таблиця 1

Постановка модифікованої транспортної задачі

Групи			Споживачі							Запаси	Запаси в групах
			$B_1$		$B_2$		...	$B_m$			
	Постач.	$\frac{V_j}{U_i}$	$V_1$		$V_2$		...	$V_m$			
$Z_1$	$A_1$	$U_1$	$X_{11}$	$c_{11}$	$X_{12}$	$c_{12}$	...	$X_{1m}$	$c_{1m}$	$a_1$	$Z_1$
	$A_2$	$U_2$	$X_{21}$	$c_{21}$	$X_{22}$	$c_{22}$	...	$X_{2m}$	$c_{2m}$	$a_2$	
	...	...	...		...		...	...		...	
	$A_{i_1}$	$U_{i_1}$	$X_{i_11}$	$c_{i_11}$	$X_{i_12}$	$c_{i_12}$	...	$X_{i_1m}$	$c_{i_1m}$	$a_{i_1}$	
$Z_2$	$A_{i_1+1}$	$U_{i_1+1}$	$X_{(i_1+1)1}$	$c_{(i_1+1)1}$	$X_{(i_1+1)2}$	$c_{(i_1+1)2}$	...	$X_{(i_1+1)m}$	$c_{(i_1+1)m}$	$a_{i_1+1}$	$Z_2$
	$A_{i_1+2}$	$U_{i_1+2}$	$X_{(i_1+2)1}$	$c_{(i_1+2)1}$	$X_{(i_1+2)2}$	$c_{(i_1+2)2}$	...	$X_{(i_1+2)m}$	$c_{(i_1+2)m}$	$a_{i_1+2}$	
	...	...	...		...		...	...		...	
	$A_{i_2}$	$U_{i_2}$	$X_{i_21}$	$c_{i_21}$	$X_{i_22}$	$c_{i_22}$	...	$X_{i_2m}$	$c_{i_2m}$	$a_{i_2}$	
$Z_3$	$A_{i_2+1}$	$U_{i_2+1}$	$X_{(i_2+1)1}$	$c_{(i_2+1)1}$	$X_{(i_2+1)2}$	$c_{(i_2+1)2}$	...	$X_{(i_2+1)m}$	$c_{(i_2+1)m}$	$a_{i_2+1}$	$Z_3$
	$A_{i_2+2}$	$U_{i_2+2}$	$X_{(i_2+2)1}$	$c_{(i_2+2)1}$	$X_{(i_2+2)2}$	$c_{(i_2+2)2}$	...	$X_{(i_2+2)m}$	$c_{(i_2+2)m}$	$a_{i_2+2}$	
	...	...	...		...		...	...		...	
	$A_{i_3}$	$U_{i_3}$	$X_{i_31}$	$c_{i_31}$	$X_{i_32}$	$c_{i_32}$	...	$X_{i_3m}$	$c_{i_3m}$	$a_{i_3}$	
...	...	...	...		...		...	...		...	
$Z_k$	$A_{i_{k-1}+1}$	$U_{i_{k-1}+1}$	$X_{(i_{k-1}+1)1}$	$c_{(i_{k-1}+1)1}$	$X_{(i_{k-1}+1)2}$	$c_{(i_{k-1}+1)2}$	...	$X_{(i_{k-1}+1)m}$	$c_{(i_{k-1}+1)m}$	$a_{i_{k-1}+1}$	$Z_k$
	$A_{i_{k-1}+2}$	$U_{i_{k-1}+2}$	$X_{(i_{k-1}+2)1}$	$c_{(i_{k-1}+2)1}$	$X_{(i_{k-1}+2)2}$	$c_{(i_{k-1}+2)2}$	...	$X_{(i_{k-1}+2)m}$	$c_{(i_{k-1}+2)m}$	$a_{i_{k-1}+2}$	
	...	...	...		...		...	...		...	
	$A_{i_k}$	$U_{i_k}$	$X_{i_k1}$	$c_{i_k1}$	$X_{i_k2}$	$c_{i_k2}$	...	$X_{i_km}$	$c_{i_km}$	$a_{i_k}$	
...	...	...	...		...		...	...		...	
$Z_p$	$A_{i_{p-1}+1}$	$U_{i_{p-1}+1}$	$X_{(i_{p-1}+1)1}$	$c_{(i_{p-1}+1)1}$	$X_{(i_{p-1}+1)2}$	$c_{(i_{p-1}+1)2}$	...	$X_{(i_{p-1}+1)m}$	$c_{(i_{p-1}+1)m}$	$a_{i_{p-1}+1}$	$Z_p$
	$A_{i_{p-1}+2}$	$U_{i_{p-1}+2}$	$X_{(i_{p-1}+2)1}$	$c_{(i_{p-1}+2)1}$	$X_{(i_{p-1}+2)2}$	$c_{(i_{p-1}+2)2}$	...	$X_{(i_{p-1}+2)m}$	$c_{(i_{p-1}+2)m}$	$a_{i_{p-1}+2}$	
	...	...	...		...		...	...		...	
	$A_n$	$U_n$	$X_{n1}$	$c_{n1}$	$X_{n2}$	$c_{n2}$	...	$X_{nm}$	$c_{nm}$	$a_{i_n}$	
			$b_1$		$b_2$			$b_m$			

4. У вільній частині таблиці знову знаходимо клітку з найменшою вартістю і повторюємо для неї процедури попередніх пунктів алгоритму.

Описаний процес повторюється до повного заповнення таблиці.

Оптимальний план знаходиться за допомогою модифікованого методу потенціалів

1. Знаходимо опорний план за допомогою модифікованого методу найменшої вартості.

2. Визначаємо систему потенціалів. Оскільки число зайнятих клітин дорівнює  $n + m - 1$ , а число потенціалів  $n + m$ , тому надаємо потенціалу значення 0, у тому рядку або стовпці, в якому найбільше зайнятих клітин, виходячи з умови оптимального плану перевезень:

$$U_i + V_j = C_{ij}, \text{ якщо } X_{ij} > 0.$$

3. Перевірка умови оптимального плану:

$$U_i + V_j \leq C_{ij}, \text{ якщо } X_{ij} = 0.$$

Якщо ця умова виконується, тодіданий план є оптимальним. Якщо існує клітинка, в якій дана умова порушується, тоді переходимо до пункту 4.

4. У клітинах яких порушується умова оптимальності записуємо величину порушення:

$$U_i + V_j - C_{ij}.$$

5. Знаходимо максимальне значення серед всіх порушень:

$$G_{\text{похибки}} = \{k_{ij}/U_i + V_j - C_{ij} > 0\}.$$

Клітинку, для якої це максимальне порушення виконується, позначимо знаком «+». Вона набуває значення  $G^+$ .

6. Побудова циклу. У даному циклі позначаємо по черзі вершини знаками «+», «-». Ці клітини по черзі набувають значень  $G^+$  та  $G^-$ , починаючи з клітини, визначеної попереднім пунктом.

7. Визначаємо величини перерозподілу вантажу. Серед вершин циклу, позначених знаками «-», знаходимо найменше значення:  $\Delta x = \min G^-$ .

Будуємо нову таблицю, в якій перевезення змінюються за такими правилами:

$$X'_{ij} = X_{ij} + \begin{cases} +\Delta x, & \text{якщо } X \text{ належить } G^+, \\ -\Delta x, & \text{якщо } X \text{ належить } G^-. \end{cases}$$

Клітини, не позначені знаками «+» або «-», переписуються без змін.

В результаті цієї процедури колишня порожня клітка стає зайнятою, а клітина, для якої виконується умова  $\Delta x = \min G^-$ , стає вільною.

8. Будуємо нову систему потенціалів для отриманого плану, оскільки попередня система потенціалів не підходить.

На цьому етапі алгоритм замкнувся і переходимо до пункту 3.

### Висновки

Таким чином, в даній роботі запропоновано модель спеціального типу транспортної задачі, до умов якої додається обмеження за вивезенням вантажу з груп постачальників, що закріплені за відповідними постачальниками більш високого

порядку, які мають власні обмеження запасів вантажу. Це додаткове обмеження дійсно зустрічається в практиці вантажних перевезень, оскільки постачальники як правило в свою чергу отримують вантаж від заводів, місць видобування природних ресурсів, оптових складів та інше. Для зазначеної моделі розроблено модифіковані методи знаходження опорного та оптимального планів вантажних перевезень з метою мінімізації вартості перевезень в заданих обмеженнях.

### Список використаної літератури

1. Афанасьев Л. Л. Единая транспортная система и автомобильные перевозки. М.: Транспорт, 1984. 333 с.
2. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування. Київ: КНЕУ, 2001. 250с.
3. Гаджинский А. М. Практикум по логистике. М.: Дашков и К, 2010. 312 с.
4. Канторович Л. В. Математико-экономические работы. Новосибирск: Наука, 2011. 760 с.
5. Курганов В. М. Логистика. Транспорт исклад в цепи поставок товаров. М.: Книжный мир, 2009. 512 с.
6. Левковець П. Р., Сергійчук І. М., Сергійчук А. І. Удосконалення керування рухом автотранспортних засобів. *Вісник Національного транспортного університету*. 2006. № 11. С. 236–239.
7. Славич В. П., Доброва К. Д. Модель задачі про потік вантажу із додатковими подвійними обмеженнями. *Модернізація економіки: сучасні реалії, прогностичні сценарії та перспективи розвитку: Матеріали І Міжнародної науково-практичної конференції (м. Херсон, 25-26 квітня 2019 р.)*. Херсон: ФОП Вишемирський В.С., 2019. С. 378–380.

### References

1. Afanasev, L. L. (1984). *Edinaya transportnaya Sistema i avtomobilnyie perevozki*. М.: Transport.
2. Vitlinskiy, V. V., Nakonechniy, S. I., & Tereschenko, T. O. (2001). *Matematichne programuvannya*. Kyiv: KNEU.
3. Gadzhinskiy, A. M. (2010). *Praktikum po logistike*. М.: Dashkov i K.
4. Kantorovich, L. V. (2011). *Matematiko-ekonomicheskie raboty*. Novosibirsk: Nauka.
5. Kurganov, V. M. (2009). *Logistika. Transportiskladvtsepipostavoktovarov*. М.: Knizhnyiymir.
6. Levkovets, P. R., Serhiichuk, I. M., & Serhiichuk, A. I. (2006). *Udoskonalennia keruvannia rukhom avtotransportnykh zasobiv. Visnyk Natsionalnoho transportnoho universytetu*. **11**, 236–239.
7. Slavych, V. P., & Dobrova, K. D. (2019). *Model zadachi pro potik vantazhu iz dodatkovymu podviinymu obmezhenniamy. Proceedings of the Modernizatsiia ekonomiky: suchasni realii, prohnosni stsenarii ta perspektyvy rozvytku: Materialy I Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii (Kherson, 25-26 April, 2019)*. Kherson: FOP Vyshemyrskyi V.S., pp. 378–380.

Славич В'ячеслав Петрович – к.т.н., доцент, доцент кафедри транспортних систем і технічного сервісу Херсонського національного технічного університету, e-mail: vslavich@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7882-4198.

Доброва Катерина Денисівна – учениця Херсонського фізико-технічного ліцею Херсонської міської ради, e-mail: tools1sw@gmail.com.