УДК: 517. 912

Р.М. ТАЦІЙ, О.Ю. ЧМИР, О.О. КАРАБИН
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ЗАГАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ

Моделювання коливальних процесів пов'язане з диференціальними рівняннями другого порядку в частинних похідних (загальні крайові задачі). Поздовжні коливання стрижнів є коливальними процесами, для вивчення яких застосовуються дискретно-неперервні математичні моделі, основою яких є загальні крайові задачі. Методи розв'язування нестаціонарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Ґріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

У багатьох випадках отримання розв'язків таких задач в замкнутому вигляді викликає великі труднощі. Уникнути труднощів можна зведенням вказаних задач до квазідиференціальних рівнянь, аналітичні розв'язки яких порівняно легше можна отримати із застосуванням матричного числення. Обґрунтування існування та побудова точних аналітичних розв'язків квазідиференціальних рівнянь, розробка програм для наближених обчислень власних значень та власних функцій є актуальним завданням.

Запропонована в даній роботі схема побудови розв'язку належить до прямих методів розв'язування крайових задач. В роботі розглянуто загальні крайові задачі для поздовжніх коливань стрижня, який складається з двох частин кусково-сталого перерізу, та з навантаженням, заданим у правій частині диференціального рівняння. Розглянуто п'ять різних випадків крайових умов. Знайдено розв'язки таких задач з використанням концепції квазіпохідних, сучасної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, класичного методу Фур'є та методу редукції. Концепція квазіпохідних дозволяє обходити проблему множення узагальнених функцій, які виникають в правій частинні рівняння залежно від виду навантаження.

За допомогою методу редукції розв'язування задачі зводиться до знаходження розв'язків двох задач. Одна задача є стаціонарною неоднорідною крайовою задачею з вихідними крайовими умовами. Друга задача є мішаною задачею з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння. Проміжок інтегрування розбивається на відрізки. Задачі розглядаються на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записується аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дозволяє застосовувати програмні засоби до процесу розв'язання задачі, зокрема для знаходження власних значень та власних функцій.

Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є, метод власних функцій.

Р.М. ТАЦИЙ, О.Ю. ЧМЫРЬ, О.О. КАРАБЫН
Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Моделирование колебательных процессов связано с дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных (общие краевые задачи). Продольные колебания стержней являются колебательными процессами для изучения которых применяются дискретно-непрерывные математические модели, основой которых являются общие краевые задачи. Методы решения нестационарных краевых

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

задач можно разделить на прямые, основу которых составляет метод разделения переменных, метод источников (метод функции Грина), метод интегральных преобразований, приближенные и численные методы.

Во многих случаях получение решения таких задач в замкнутом виде вызывает большие трудности. Избежать трудностей можно сведением указанных задач к квазидифференциальным уравнениям, аналитические решения которых сравнительно легче можно получить с применением матричного исчисления. Обоснование существования и построение точных аналитических решений квазидифференциальных уравнений, разработка программ для приближенных вычислений собственных значений и собственных функций является актуальной задачей.

Предложенная в данной работе схема построения решения относится к прямым методам решения краевых задач. В работе рассмотрены общие краевые задачи для продольных колебаний стержня, который состоит из двух частей кусочно-постоянного сечения, и с нагрузкой, заданной в правой части дифференциального уравнения. Рассмотрены пять различных случаев краевых условий. Найдено решение таких задач с использованием концепции квазипроизводных, современной теории систем линейных дифференциальных уравнений, классического метода Фурье и метода редукции. Концепция квазипроизводных позволяет обходить проблему умножения обобщенных функций, возникающих в правой части уравнения в зависимости от вида нагрузки.

С помощью метода редукции решения задачи сводится к нахождению решений двух задач. Одна задача является стационарной неоднородной краевой задачей с исходными краевыми условиями. Вторая задача является смешанной задачей с нулевыми краевыми условиями для определенного неоднородного уравнения. Промежуток интегрирования разбивается на отрезки. Задачи рассматриваются на каждом отрезке разбиения, а затем с помощью матричного исчисления записывается аналитическое выражение решения. Такой подход позволяет применять программные средства в процессе решения задачи, в частности для нахождения собственных значений и собственных функций.

Ключевые слова: квазидифференциальное уравнение, краевая задача, матрица Коши, задача на собственные значения, метод Фурье, метод собственных функций.

R.M. TATSIJ, O.Yu. CHMYR, O.O. KARABYN
Lviv State University of Life Safety

THE TOTAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF ROD

Modeling of oscillatory processes is associated with second-order differential equations in partial derivatives (general boundary value problems). Longitudinal oscillations of rods are oscillatory processes for the study of which discrete-continuous mathematical models are used, the basis of which are general boundary value problems. Methods for solving nonstationary boundary value problems can be divided into direct, which are based on the method of separating variables, the method of sources (Green's function method), the method of integral transformations, approximate and numerical methods.

In many cases, obtaining solutions to such problems in a closed form is very difficult. Difficulties can be avoided by reducing these problems to quasi-differential equations, the analytical solutions of which are relatively easier to obtain using matrix calculus. Substantiation of existence and construction of exact analytical solutions of quasi-differential

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

equations, development of programs for approximate calculations of eigenvalues and eigenfunctions is an urgent task.

The scheme of solution proposed in this paper belongs to the direct methods of solving boundary value problems. The paper considers general boundary value problems for longitudinal oscillations of a rod, which consists of two pieces of piece-stable cross-section and load in the right part. Five different cases of boundary conditions are considered. Solutions of such problems are found using the concept of quasi-derivatives, modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and the reduction method. The concept of quasi-derivatives allows to bypass the problem of multiplication of generalized functions that occur in the right-hand side of the equation depending on the type of load.

Using the reduction method, the solution of the problem is reduced to finding the solutions of two problems. One problem is a stationary inhomogeneous boundary value problem with initial boundary conditions. The second problem is a mixed problem with zero boundary conditions for a certain inhomogeneous equation. The integration interval is divided into segments. The problems are considered on each segment of the partition, and then the analytical expression of the solution is written with the help of matrix calculus. This approach allows you to apply software to the process of solving the problem, in particular to find eigenvalues and eigenfunctions.

Keywords: quasi-differential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.

Постановка проблеми

Математичне моделювання реальних фізичних процесів та явищ, яке враховує єдність дискретної та неперервної природи, як правило, приводить до необхідності дослідження, так званих, квазідиференціальних рівнянь із узагальненими функціями в коефіцієнтах та правих частинах. Для знаходження розв’язків таких рівнянь широко застосовується математичний апарат теорії узагальнених функцій, а також концепція квазіпохідних.

Узагальнення та обґрунтування методу побудови точних аналітичних та наближених розв’язків таких задач із врахуванням зосереджених факторів та розробка математичних і комп’ютерних моделей коливальних процесів є важливим та актуальним науково-практичним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Методи розв’язування нестаціонарних крайових задач можна поділити на прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних, метод джерел (метод функції Ґріна), метод інтегральних перетворень, наближені та числові методи.

Запропонована у цій роботі схема належить до прямих методів розв’язування крайових задач. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [1], метод зведення вихідної задачі до розв’язування двох простіших, але взаємопов’язаних задач, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, класичний метод Фур’є та модифікований метод власних функцій.

У роботі [2] розглянуто загальну схему дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу. Отримано явні формули розв’язку та його квазіпохідної такої задачі для будь-якого підінтервалу основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду у функціях – коефіцієнтах задачі.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

У роботі [3] розглядається гіперболічне рівняння з кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами з найбільш загальними локальними крайовими умовами. Виділено випадок кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин, коли розв'язки вихідної задачі можуть бути отримані в замкненій формі.

В цій роботі досліджуються поздовжні коливання стрижня, який складається з двох частин кусково-сталого перерізу та має навантаження, яке задається функцією в правій частині рівняння. За допомогою методу редукції дослідження зводиться до знаходження розв'язку двох задач: стаціонарної неоднорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння.

Мета дослідження

Метою роботи є отримання власних значень і власних функцій та розв'язок нестаціонарної крайової задачі поздовжніх коливань стрижня з двох частин кусково-сталого перерізу з навантаженням, яке задається функцією в правій частині рівняння.

Викладення основного матеріалу дослідження

1. Основні позначення, формулювання задачі та допоміжні твердження.

Нехай $[x_0; x_2]$ – відрізок дійсної осі; x_1 – довільна внутрішня точка, що розбиває відрізок на дві частини.

Нехай F_0, F_1, E, ρ – сталі, $g_0(x)$, $g_1(x)$ – додатньо визначені функції на проміжках $\left[x_0; x_1\right)$, $\left[x_1; x_2\right)$ відповідно. Покладемо $F(x) = F_0 \cdot \theta_0 + F_1 \cdot \theta_1$, $g(x) = g_0(x) \cdot \theta_0 + g_1(x) \cdot \theta_1$, де θ_i – характеристична функція проміжку $\left[x_i; x_{i+1}\right)$, $i = \overline{0,1}$. Визначимо квазіпохідну функції $u(x,t)$ як добуток функції $F(x)$ та похідної по змінній x функції $u(x,t)$, тобто $u^{[1]} = F \cdot u_x'$.

Розглянемо рівняння поздовжніх коливань стрижня

$$\frac{\rho}{E} \cdot F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g(x), \; x \in (x_0; x_2), \; t \in (0; +\infty) \tag{1}$$

із загальними крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11} u(x_0, t) + p_{12} u^{[1]}(x_0, t) = \psi_0(t), \\ q_{21} u(x_2, t) + q_{22} u^{[1]}(x_2, t) = \psi_1(t), \end{cases} \; t \in [0; +\infty) \tag{2}$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x), \end{cases} \; x \in [x_0; x_2], \tag{3}$$

де $\psi_0(t)$, $\psi_1(t) \in C^2(0; +\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – функції, кусково-неперервні на $(x_0; x_2)$.

Метод редукції відшукання розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [4–5]. Згідно з цим методом, розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді суми двох функцій

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t). \tag{4}$$

Одну з функцій, наприклад $w(x,t)$, побудуємо спеціальним способом, тоді функцію $v(x,t)$ визначимо, використавши функцію $w(x,t)$.

2. Побудова функції $w(x,t)$.

Запишемо крайову задачу для функції $w(x,t)$

$$(F(x)\cdot w_x{}')_x{}'=-g(x), \tag{5}$$

$$\begin{cases} p_{11}w(x_0,t)+p_{12}w^{[1]}(x_0,t)=\psi_0(t), \\ q_{21}w(x_2,t)+q_{22}w^{[1]}(x_2,t)=\psi_1(t), \end{cases} \quad t\in[0;+\infty). \tag{6}$$

Зауважимо, що змінна t тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (5), (6) лежить концепція квазіпохідних [6].

Введемо вектор $\overline{W}=\begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$, $\overline{G}=\begin{pmatrix} 0 \\ -g(x) \end{pmatrix}$. За таких позначень квазідиференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{W}_x{}'=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{W}+\overline{G}. \tag{7}$$

Під розв'язком системи (7) розуміємо абсолютно-неперервну вектор-функцію $\overline{W}(x,t)$, що за змінною x справджує її майже скрізь (див. [6]).

Крайові умови (6) запишемо у векторній формі

$$P\cdot\overline{W}(x_0,t)+Q\cdot\overline{W}(x_2,t)=\overline{\Gamma}(t), \tag{8}$$

де $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, причому $rang(P\,|\,Q)=2$, $\overline{\Gamma}(t)=\begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}$.

Нехай $w_i(x,t)$ та $w_i^{[1]}(x,t)$ визначені на проміжку $[x_i;x_{i+1})$, $i=\overline{0,1}$. Покладемо

$$w(x,t)=w_0(x,t)\theta_0+w_1(x,t)\theta_1. \tag{9}$$

Система (7) відповідно на проміжках $[x_i;x_{i+1})$, $i=\overline{0,1}$ набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}_x'=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -g_i(x) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Розглянемо однорідну систему, що відповідає системі (10)

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{F_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}.$$

Матриці Коші $B_i(x,s)$ $i=\overline{0,1}$ таких систем відповідно матимуть вигляд

$$B_i(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ де } b_i(x,s) = \int_s^x \frac{1}{F_i} dz = \frac{x-s}{F_i}. \qquad (11)$$

Позначимо

$$B(x_1,x_0) \overset{def}{=} B_0(x_1,x_0), \qquad B(x_2,x_0) \overset{def}{=} B_1(x_2,x_1)\cdot B_0(x_1,x_0). \qquad (12)$$

Структура (11) матриць $B_i(x,s)$ $i=\overline{0,1}$ дає можливість встановити структуру матриць (12)

$$B(x_1,x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_1-x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(x_2,x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x_1-x_0}{F_0} + \dfrac{x_2-x_1}{F_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причому $B(x_i,x_i) \overset{def}{=} I$, $i=\overline{0,1}$, де I – одинична матриця.

Розв’язки систем (10) на проміжках $[x_0;x_1)$ та $[x_1;x_2]$ відповідно мають вигляд

$$\overline{W}_i(x,t) = B_i(x,x_i)\cdot \overline{P}_i + \int_{x_i}^x B_i(x,s)\cdot \overline{G}_i(s)\,ds, \qquad (13)$$

де $\overline{P}_i$, $i=\overline{0,1}$ – поки що невідомі вектори.

В точці $x=x_1$ повинна виконуватись умова спряження, а саме $\overline{W}_1(x_1,t) = \overline{W}_0(x_1,t)$ (див. [6]), в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення

$$\overline{P}_1 = B_0(x_1,x_0)\cdot \overline{P}_0 + \int_{x_0}^{x_1} B_0(x_1,s)\cdot \overline{G}_0(s)\,ds, \qquad (14)$$

де $\overline{P}_0$ – початковий (невідомий) вектор.

Нехай $\overline{W}(x_0,t) \overset{def}{=} \overline{P}_0$. Використовуючи (13), (12) та (14), визначаємо

$$\overline{W}(x_2,t) \overset{def}{=} \overline{W}_1(x_2,t) = B(x_2,x_0)\overline{P}_0 + B_1(x_2,x_1)\int_{x_0}^{x_1} B_0(x_1,s)\cdot \overline{G}_0(s)\,ds + \int_{x_1}^{x_2} B_1(x_2,s)\cdot \overline{G}_1(s)\,ds =$$

$= B(x_2,x_0)\overline{P}_0 + B_1(x_2,x_1)\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$, де $\overline{Z}_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k,s)\cdot\overline{G}_{k-1}(s)\,ds$, $k=\overline{1,2}$.

Підставивши $\overline{W}(x_0,t)$ та $\overline{W}(x_2,t)$ в крайові умови (8), одержуємо

$$\overline{P}_0 = [P + Q\cdot B(x_2,x_0)]^{-1}\cdot\left(\overline{\Gamma} - Q\left(B_1(x_2,x_1)\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\right)\right). \tag{15}$$

Обчислимо

$$[P + Q\cdot B(x_2,x_0)]^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} q_{21}\sigma + q_{22} & -p_{12} \\ -q_{21} & p_{11} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

де $\sigma = \sum\limits_{m=0}^{1} b_m(x_{m+1},x_m)$, $\Delta = p_{11}(q_{21}\sigma + q_{22}) - q_{21}p_{12} \neq 0$;

$$\overline{\Gamma} - Q\left(B_1(x_2,x_1)\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}\left(B_1(x_2,x_1)\int\limits_{x_0}^{x_1} B_0(x_1,s)\cdot\overline{G}_0(s)\,ds + \int\limits_{x_1}^{x_2} B_1(x_2,s)\cdot\overline{G}_1(s)\,ds \right). \tag{17}$$

Запишемо праву частину (17) в матричному вигляді

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k,s)\cdot\overline{G}_{k-1}(s)\,ds = \begin{pmatrix} -\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} b_{k-1}(x_k,s)\cdot g_{k-1}(s)\,ds \\ -\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g_{k-1}(s)\,ds \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix} = \overline{Z}_k,\ k=\overline{1,2},$$

$$B_1(x_2,x_1)\overline{Z}_1 = B_1(x_2,x_1)\int\limits_{x_0}^{x_1} B_0(x_1,s)\cdot\overline{G}_0(s)\,ds = \begin{pmatrix} I_0(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) \\ I_0^{[1]}(x_1) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\overline{\Gamma} - Q\left(B_1(x_2,x_1)\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) - q_{21}\left(I_0(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) + I_1(x_2) \right) - q_{22}\left(I_0^{[1]}(x_1) + I_1^{[1]}(x_2) \right) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

Підставивши (16) та (18) у (15) та (14), отримуємо вектори:

$$\overline{P}_0 = \\ = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \psi_0(t)(q_{21}\sigma + q_{22}) - p_{12}\left(\psi_1(t) - q_{21}\left(I_0(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) + I_1(x_2)\right) - q_{22}\left(I_0^{[1]}(x_1) + I_1^{[1]}(x_2)\right)\right) \\ -q_{21}\psi_0(t) + p_{11}\left(\psi_1(t) - q_{21}\left(I_0(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) + I_1(x_2)\right) - q_{22}\left(I_0^{[1]}(x_1) + I_1^{[1]}(x_2)\right)\right) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\overline{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{P}_0 + \int_{x_0}^{x_1} B_0(x_1, s) \cdot \overline{G}_0(s)\, ds = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{P}_0 + \begin{pmatrix} I_0(x_1) \\ I_0^{[1]}(x_1) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

На основі формул (13), (19), (20) після перетворень отримаємо вектор-функції $\overline{W}_0(x,t)$ та $\overline{W}_1(x,t)$ на проміжках $[x_0; x_1)$ та $[x_1; x_2]$, відповідно:

$$\overline{W}_0(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - x_0}{F_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{P}_0 + \begin{pmatrix} I_0(x) \\ I_0^{[1]}(x) \end{pmatrix},$$

$$\overline{W}_1(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 - x_0}{F_0} + \frac{x - x_1}{F_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{P}_0 + \begin{pmatrix} I_0(x_1) + \frac{x - x_1}{F_1} I_0^{[1]}(x_1) \\ I_0^{[1]}(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1(x) \\ I_1^{[1]}(x) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Перші координати векторів $\overline{W}_0(x,t)$ та $\overline{W}_1(x,t)$ в (21) є шуканими функціями $w_0(x,t)$ та $w_1(x,t)$, відповідно. Підставляючи їх у (9), отримуємо розв'язок на всьому проміжку $[x_0; x_2]$.

3. Побудова функції $v(x,t)$.

Запишемо мішану задачу для функції $v(x,t)$. Для цього підставимо (4) в (1)–(3), врахувавши, що функція $w(x,t)$ задовольняє вимогам (5)–(6) Одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\rho}{E} \cdot F(x) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\rho}{E} \cdot F(x) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \ x \in (x_0; x_2), \ t \in (0; +\infty). \quad (22)$$

$$\begin{cases} v(x,0) = \Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \Phi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_2], \quad (23)$$

$$\begin{cases} p_{11} v(x_0,t) + p_{12} v^{[1]}(x_0,t) = 0, \\ q_{21} v(x_2,t) + q_{22} v^{[1]}(x_2,t) = 0, \end{cases} \quad t \in [0; +\infty). \quad (24)$$

де $\Phi_0(x) \overset{def}{=} \varphi_0(x) - w(x,0)$, $\Phi_1(x) \overset{def}{=} \varphi_1(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,0)$.

Отже, за умови, що розв'язок $w(x,t)$ задачі (5), (6) є відомим, функція $v(x,t)$ є розв'язком мішаної задачі (22)–(24).

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

4. Метод Фур'є та задача на власні значення.

Для рівняння (22) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\frac{\rho}{E}\cdot F(x)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{25}$$

з крайовими умовами (24).

Його нетривіальні розв'язки шукаємо у вигляді

$$v(x,t)=\sin(\omega t+\varepsilon)\cdot X(x), \tag{26}$$

де ω – параметр, ε – константа, $X(x)$ – невідома функція.

Підставимо (26) у (24)–(25). Одержимо задачу

$$\left(F(x)X'(x)\right)'+\alpha^2F(x)X(x)=0, \tag{27}$$

$$\begin{cases} p_{11}X(x_0)+p_{12}X^{[1]}(x_0)=0,\\ q_{21}X(x_2)+q_{22}X^{[1]}(x_2)=0.\end{cases} \tag{28}$$

де $\alpha^2=\frac{\rho}{E}\cdot\omega^2$.

Ввівши квазіпохідну $X^{[1]}\overset{def}{=}FX'$, вектор $\overline{X}=\begin{pmatrix}X\\ X^{[1]}\end{pmatrix}$ та матрицю $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{F}\\ -\alpha^2F & 0\end{pmatrix}$, запишемо задачу (27)–(28) у матричному вигляді

$$\overline{X}'=A\cdot\overline{X}, \tag{29}$$

$$P\overline{X}(x_0)+Q\overline{X}(x_2)=\overline{0}. \tag{30}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриці Коші $\tilde{B}_0(x,s,\omega)$ та $\tilde{B}_1(x,s,\omega)$ системи (29) відповідно на проміжках $[x_0;x_1)$ та $[x_1;x_2]$ мають вигляд $\tilde{B}_i(x,s,\omega)=\begin{pmatrix}\cos\alpha(x-s) & \frac{\sin\alpha(x-s)}{F_i\,\alpha}\\ -F_i\,\alpha\sin\alpha(x-s) & \cos\alpha(x-s)\end{pmatrix}$, $i=\overline{0,1}$. Фундаментальна матриця (аналог матриці Коші на всьому проміжку) системи (29) має структуру

$$\tilde{B}(x,x_0,\omega)\overset{def}{=}\tilde{B}_0(x,x_0,\omega)\cdot\tilde{B}(x_0,x_0,\omega)\cdot\theta_0+\tilde{B}_1(x,x_1,\omega)\cdot\tilde{B}(x_1,x_0,\omega)\cdot\theta_1, \tag{31}$$

де, аналогічно, як і в формулі (12), $\tilde{B}(x_1,x_0,\omega)\overset{def}{=}\tilde{B}_1(x_2,x_1,\omega)\cdot\tilde{B}_0(x_1,x_0,\omega)$.

Позначимо також

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

$$\tilde{B}(x, x_0, \omega) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Нетривіальний розв’язок $\overline{X}(x,\omega)$ системи (29) шукаємо у вигляді $\overline{X}(x,\omega) = \tilde{B}(x, x_0, \omega) \cdot \overline{C}$, де $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор.

Вектор-функція $\overline{X}(x,\omega)$ має задовольняти крайові умови (30), тобто $\left[P \cdot \tilde{B}(x_0, x_0, \omega) + Q \cdot \tilde{B}(x_2, x_0, \omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0}$, врахувавши, що $\tilde{B}(x_0, x_0, \omega) = I$, прийдемо до рівності

$$\left[P + Q \cdot \tilde{B}(x_2, x_0, \omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0}. \tag{33}$$

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (33) необхідно і досить виконання умови

$$\det\left[P + Q \cdot \tilde{B}(x_2, x_0, \omega)\right] = 0. \tag{34}$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (34), врахувавши вигляд матриць *P*, *Q* та (32)

$$\det\left[P + Q \cdot \tilde{B}(x_2, x_0, \omega)\right] = p_{11} \cdot (q_{21} b_{12}(\omega) + q_{22} b_{22}(\omega)) - p_{12} \cdot (q_{21} b_{11}(\omega) + q_{22} b_{21}(\omega)).$$

Характеристичне рівняння задачі на власні значення (27)–(28) має вигляд

$$p_{11} \cdot (q_{21} b_{12}(\omega) + q_{22} b_{22}(\omega)) - p_{12} \cdot (q_{21} b_{11}(\omega) + q_{22} b_{21}(\omega)) = 0. \tag{35}$$

Як відомо (див. [7]), корені ω_k характеристичного рівняння (35), які є власними значеннями задачі (27), (28), є додатними та різними. Для знаходження ненульового вектора $\overline{C}$ підставимо в рівність (33) ω_k замість ω. Тоді прийдемо до системи рівнянь

$$\begin{cases} p_{11} C_1 + p_{12} C_2 = 0, \\ (q_{21} b_{11}(\omega_k) + q_{22} b_{21}(\omega_k)) \cdot C_1 + (q_{21} b_{12}(\omega_k) + q_{22} b_{22}(\omega_k)) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Оскільки виконується (35), тому система (36) зводиться до рівняння $p_{11} C_1 + p_{12} C_2 = 0$, з якого знаходимо координати вектора $\overline{C}$ за певних припущень на коефіцієнти матриць *P* та *Q*:

1. $p_{11} = q_{21} = 1$, $p_{12} = q_{22} = 0$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (лівий та правий кінці закріплені);

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

2. $p_{11} = q_{22} = 1$, $p_{12} = q_{21} = 0$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (лівий кінець закріплений, правий – вільний);
3. $p_{11} = 1$, $p_{12} = 0$, $q_{21} = c$, $q_{22} = EF$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (лівий кінець закріплений, пружне закріплення правого кінця);
4. $p_{11} = -c$, $p_{12} = EF$, $q_{21} = c$, $q_{22} = EF$, поклавши $C_2 = 1$, маємо $C_1 = \dfrac{EF}{c}$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} \dfrac{EF}{c} \\ 1 \end{pmatrix}$; (пружне закріплення лівого та правого кінців);
5. $p_{11} = 1$, $p_{12} = 0$, $q_{21} = -M\omega^2$, $q_{22} = EF$, тоді $C_1 = 0$, а $C_2 \in R \setminus \{0\}$, наприклад, $C_2 = 1$, тобто $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (лівий кінець закріплений, на правому кінці закріплена маса).

Нехай $\overline{X}_k(x, \omega_k)$ – нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k. Справедливим є твердження.

Власні вектори системи диференціальних рівнянь (29) з крайовими умовами (30) мають структуру $\overline{X}_k(x, \omega_k) = \tilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \overline{C}$, $k \in N$. Власні функції $X_k(x, \omega_k)$, як перші координати власних векторів $\overline{X}_k(x, \omega_k)$, можна записати у вигляді

$$X_k(x, \omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \overline{C}, \; k = 1, 2, 3, \ldots \tag{37}$$

Зокрема, оскільки

$$X_k(x, \omega_k) = X_{k\,0}(x, \omega_k) \cdot \theta_0 + X_{k\,1}(x, \omega_k) \cdot \theta_1, \tag{38}$$

тому з (31) та (37) випливає, що

$$\begin{aligned} X_{k\,0}(x, \omega_k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{B}_0(x, x_0, \omega_k) \cdot \overline{C}, \\ X_{k\,1}(x, \omega_k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tilde{B}_1(x, x_1, \omega_k) \cdot \tilde{B}(x_1, x_0, \omega_k) \cdot \overline{C}. \end{aligned} \tag{39}$$

5. Побудова розв'язку $v(x,t)$ мішаної задачі (22)–(24).

У роботі [8] застосовуючи метод власних функцій, отримано розв'язок мішаної задачі (22)–(24). Враховуючи формулу (38) та те, що $v(x,t) = v_0(x,t) \cdot \theta_0 + v_1(x,t) \cdot \theta_1$, де $v_0(x,t)$ та $v_1(x,t)$ визначені відповідно на проміжках $[x_0; x_1)$ та $[x_1; x_2]$, одержуємо

$$v_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Phi_{0\,k} \cos \omega_k t + \frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k} \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k (t-s) \cdot w_k(s)\, ds \right] \cdot X_{k\,0}(x, \omega_k),$$

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

$$v_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Phi_{0\,k} \cos \omega_k t + \frac{\Phi_{1\,k}}{\omega_k} \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k (t-s) \cdot w_k(s)\, ds \right] \cdot X_{k\,1}(x,\omega_k)\,, \quad (40)$$

де функції $X_{k\,0}(x,\omega_k)$, $X_{k\,1}(x,\omega_k)$ обчислюються за формулою (39), $\Phi_{0\,k}$, $\Phi_{1\,k}$ – відповідні коефіцієнти Фур'є розкладу функцій $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$ в ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$.

Врахувавши перші координати векторів $\overline{W}_0(x,t)$, $\overline{W}_1(x,t)$ в (21) та (40), отримаємо розв'язок задачі (1)–(3)

$$u(x,t) = (w_0(x,t) + v_0(x,t)) \cdot \theta_0 + (w_1(x,t) + v_1(x,t)) \cdot \theta_1 \,.$$

Висновки

Отримано розв'язок та його квазіпохідна рівняння поздовжніх коливань стрижня, який складається з двох частин кусково-сталого перерізу, та з навантаженням, яке задане в правій частині цього рівняння.

Перевагою використаного методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дає змогу застосовувати програмні засоби до процесу розв'язання задачі. Отримані результати мають безпосереднє практичне застосування в теорії коливань стрижнів з кусково-змінним розподілом параметрів.

Список використаної літератури

1. Тацій Р. М., Власій О. О., Стасюк М. Ф. Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами. *Вісник НУ «Львівська політехніка»: Серія «Фіз.-мат. науки».* 2014. № 804. С. 64–69.
2. Тацій Р. М., Карабин О. О., Чмир О. Ю. Загальна схема дослідження поздовжніх коливань стрижнів кусково-сталого перерізу. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання*: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (Івано-Франківськ, 14-19 травня 2018 р.). Івано-Франківськ, 2018. С. 386–391.
3. Тацій Р. М., Чмир О. Ю., Карабин О. О. Загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними коефіцієнтами та правими частинами. *Дослідження в математиці і механіці*. 2017. Т. 22, Вип. 2(30). С. 55–70.
4. Арсенин В. Я. Методы математической физики. М.: Наука, 1974. 432 с.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
6. Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В., Власій О. О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Дрогобич: Коло, 2011. 297 с.
7. Тацій Р. М., Мазуренко В. В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2001. Т.44. №1. С. 43–53.
8. Тацій Р. М., Чмир О. Ю., Карабин О. О. Схема дослідження поздовжніх коливань стрижня кусково-сталого перерізу. *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*. 2018. № 18. С. 61–70.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20

References

1. Tatsij, R. M., Vlasij, O. O., & Stasjuk, M. F (2014). Zagalna persha krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovidnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy. *Buleten Universytetu 'Lvivska Politekhnika'. Seriya 'Phizyka i matematyka'*. **804**, 64–69.
2. Tatsij, R. M., Chmyr, O. Yu., & Karabyn, O. O. (2018). Zagalna schema doslidzhennya pozdovzhnikh kolyvan stryzhniv kuskovo-stalogo pererizu. Proceedings of the *Informatsyiyni tekhnologiyi ta compyuterne modelyuvannya*: *materialy Mizhnarodnoi naukovoi konferentsii*. (Ukraine, Ivano-Frankivsk, *May* 14-19, 2018), Ivano-Frankivsk, pp. 386–391.
3. Tatsij, R. M., Chmyr, O. Yu., & Karabyn, O. O. (2017). Zagalni krayovi zadachi dlya hiperbolichnogo rivnyannya iz kuskovo-neperervnymy koefitsientamy ta pravymy chastynamy. *Doslidzhennya v matematytsi i mekhanitsi*. **22**, 2(30), 55–70.
4. Arsenin, V. Ya. (1974). Metody matematicheskoy phiziki. Moscow: Nauka.
5. Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. (1977). Uravneniya matematicheskoy phiziki. Moscow: Nauka.
6. Tatsij, R. M., Stasjuk, M. F., Mazurenko, V. V., & Vlasij, O. O. (2011). Uzagalneni kvazidyferentsialni rivnyannya. Drogobych: Kolo.
7. Tatsij, R. M., & Mazurenko, V. V. (2001). Dyskretno-neperervni krayovi zadachi dlya kvazi-dyfererentsialykh rivnyan dovilnogo poryadku. *Reports of the Mathematical Methods and Physico-Mechanical Fields*. **44**, 1, 43–53.
8. Tatsij, R. M., Chmyr, O. Yu., & Karabyn, O. O. (2018). Schema doslidzhennya pozdovzhnikh kolyvan stryzhniv kuskovo-stalogo pererizu. *Visnyk Lvivskogo derzhavnogo universytetu bezpeky zhyttyediyalnosti*. **18**, 61–70.

Тацій Роман Мар'янович – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри прикладної математики і механіки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності, e-mail: ldubzh.lviv@dsns.gov.ua, ORCID: 0000-0001-8805-6305

Чмир Оксана Юріївна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності, e-mail: o_chmyr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-6340-9888.

Карабин Оксана Олександрівна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри прикладної математики і механіки Львівського державного університету безпеки життєдіяльності, e-mail: karabynoks@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9287-376X.

10.32782/2618-0340/2020.1-3.20