УДК [519.711+519.876] (075)

А.В. УСОВ
Одесский национальный политехнический университет
Н.В. СЛОБОДЯНЮК
Национальный университет «Одесская морская академия»

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИЛОВЫМИ АГРЕГАТАМИ СУДОВОГО КОМПЛЕКСА НА НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ

Исследования основных динамических характеристик энергетических комплексов судовых систем в установившемся режиме при действии возмущающей силы являются актуальными. Особенно это подтверждается созданием управляющих систем для судовых силовых установок.

В статье авторами разработана математическая модель динамики судового комплекса с учетом переходных процессов и найден контроль, обеспечивающий его движение с максимальной средней скоростью и минимальным расходом топлива на единицу пути. Рассмотрены дифференциальные уравнения движения комплекса корабля в безразмерном виде в нестационарных условиях. Для оптимального управления этим объектом был разработан критерий оптимальности, который связан функциональными связями с характеристиками судового комплекса и с которым достигается оптимум. Задачи оптимального управления были поставлены и решены, чтобы найти управление, обеспечивающее движение судового комплекса с максимальной средней скоростью с дифференциальными связями и граничными условиями, и управление, обеспечивающее минимальный средний расход топлива на единицу пути судового комплекса. при заданной средней скорости его движения. Установлено, что значения основных характеристик силовых установок судового комплекса существенно зависят от всех параметров системы, поэтому для моделирования вводятся аппроксимирующие функции этих характеристик. Поскольку полученный закон управления действителен для любых возмущающих функций, система автоматического управления с характеристикой регулятора скорости в ведущем звене поддерживает режим, близкий к оптимальному, под действием произвольных возмущающих сил, в том числе непериодических.

Исследования, проведенные для судовых комплексов, показали, что величина прироста скорости судна в нестационарных условиях изменения параметров достигает 8%. Степень контроля зависит от всех параметров, характеризующих корабельный комплекс и состояние моря. Полученные соотношения при моделировании и оптимальном управлении энергоблоками судовых комплексов позволили проанализировать расход топлива на единицу пути с оптимальным управлением методом динамического программирования по сравнению с соответствующим постоянным управлением.

Ключевые слова: математическая модель, оптимальное управление, метод усреднения, переходной процесс, судовой комплекс.

А.В. УСОВ
Одеський національний політехнічний університет
М.В. СЛОБОДЯНЮК
Національний університет «Одеська морська академія»

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ СИЛОВИМИ АГРЕГАТАМИ СУДНОВОГО КОМПЛЕКСУ НА НЕСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМАХ

10.32782/2618-0340/2020.1-3.24

Дослідження основних динамічних характеристик енергетичних комплексів суднових систем в усталеному режимі при дії вимушених коливань є актуальними. Особливо це підтверджується створенням керуючих систем для суднових силових установок.

У статті авторами розроблена математична модель динаміки суднового комплексу з урахуванням перехідних процесів і знайдений контроль, що забезпечує його рух з максимальною середньою швидкістю і мінімальною витратою палива на одиницю шляху. Розглянуто диференціальні рівняння руху комплексу корабля в безрозмірному вигляді в нестаціонарних умовах. Для оптимального управління цим об'єктом був розроблений критерій оптимальності, який пов'язаний функціональними зв'язками зі характеристиками суднового комплексу і з яким досягається оптимум. Завдання оптимального управління були поставлені і вирішені, щоб знайти управління, яке забезпечує рух судового комплексу з максимальною середньою швидкістю зі диференціальними зв'язками і граничними умовами, і управління, що забезпечує мінімальний середній витрата палива на одиницю шляху суднового комплексу, при заданій середній швидкості його руху. Встановлено, що значення основних характеристик силових установок суднового комплексу істотно залежать від усіх параметрів системи, тому для моделювання вводяться функції характеристики яких апроксимуються. Оскільки отриманий закон управління дійсний для будь-яких функцій, які мають обурююче походження, система автоматичного управління з характеристикою регулятора швидкості в провідному ланці підтримує режим, близький до оптимального, під дією довільних сил, що обурюють, в тому числі неперіодичних.

Дослідження, проведені для суднових комплексів, показали, що величина приросту швидкості судна в нестаціонарних умовах зміни параметрів досягає 8%. Ступінь контролю залежить від всіх параметрів, що характеризують корабельний комплекс і стан моря. Отримані співвідношення при моделюванні і оптимальне управління енергоблоками суднових комплексів дозволили проаналізувати витрату палива на одиницю шляху з оптимальним керуванням методом динамічного програмування в порівнянні з відповідним постійним управлінням.

Ключові слова: математична модель, оптимальне управління, метод усереднення, перехідний процес, судновий комплекс.

A.V. USOV
Odesa national polytechnic university
N.V. SLOBODIANIUK
National University 'Odessa Maritime Academy'

DESIGN AND OPTIMAL MANAGEMENT POWER AGGREGATES OF SHIP COMPLEX ON NON-STATIONARY MODES

Studies of the main dynamic characteristics of the energy systems of ship systems in the steady state under the action of a disturbing force are relevant. This is especially confirmed by the creation of control systems for ship power plants.

In the article, the authors developed a mathematical model of the dynamics of the ship complex taking into account transients and found control that ensures its movement with a maximum average speed and minimum fuel consumption per unit of track. The differential equations of motion of the ship complex in a dimensionless form under unsteady conditions are considered. For optimal control of this facility, an optimality criterion was developed, which is connected by functional relationships with the characteristics of the ship complex *and with which an optimum is achieved. The tasks of optimal control were set and solved in order to find a control that ensures the movement of the ship complex with a maximum average speed with differential connections and boundary conditions, and a control that provides the minimum average fuel consumption per unit of the way of the ship complex. at a given average speed of its movement. It is established that the values of the main characteristics of the power plants of the ship complex significantly depend on all parameters of the system, therefore, approximating functions of these characteristics are introduced for modeling. Since the obtained control law is valid for any disturbing functions, an automatic control system with the characteristic of a speed controller in the driving link maintains a near optimal regime under the action of arbitrary disturbing forces, including non-periodic ones.*

Studies conducted for ship complexes showed that the magnitude of the increase in ship speed under unsteady conditions of change in parameters reaches 8%. The degree of control depends on all parameters characterizing the ship complex and the state of the sea. The obtained ratios during modeling and optimal control of power units of ship complexes made it possible to analyze fuel consumption per unit of track with optimal control using the dynamic programming method in comparison with the corresponding constant control.

Keywords: mathematical model, optimal control, averaging method, transient, ship complex.

Постановка проблемы

Исследования основных динамических характеристик энергетических комплексов судовых систем в установившемся режиме при действии возмущающей силы являются актуальными. Особенно это подтверждается созданием управляющих систем для судовых силовых установок.

Для оптимального управления судовыми силовыми системами необходимо разработать математическую модель для данного класса объектов и идентифицировать ее к выбранному объекту. Полученные результаты моделирования использовать для управления данным объектом.

Оптимальное управление данным объектом предусматривает разработку критерия оптимальности, связанного функциональными соотношениями с характеристиками данной системы и с помощью которых и достигается оптимум [1].

Критерий оптимальности – важнейший компонент задачи оптимизации. Роль моделирования и оптимизации в системах управления (СУ) следует рассматривать в контексте жизненного цикла СУ [1–3]. Некоторые этапы жизненного цикла представлены на рис. 1.

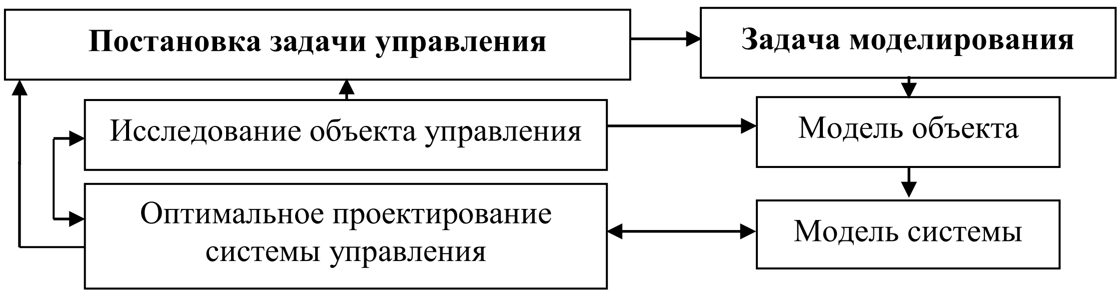

Рис. 1. Фрагменты жизненного цикла системы управления.

Важнейшим компонентом процесса эксплуатации объекта является оптимальное управление его системой, которая обеспечивает высокие технико-экономические показатели.

Анализ последних исследований и публикаций

В работах [4–6] анализируются способы модернизации систем топливоподачи непосредственного действия. При этом основное внимание уделяется не только повышению давления впрыскивания топлива, но и возможностям адаптационного регулирования процессов подачи топлива для получения требуемых значений цикловой подачи, угла опережения впрыскивания и закона подачи в условиях меняющейся нагрузки и переходных процессов. Для оптимального выбора параметров процесса топливоподачи эффективны методы моделирования.

Однако в ряде методов моделирования не рассматриваются вопросы оценки взаимовлияния изменяющихся параметров математических моделей.

Поэтому разработка математической модели оптимального управления топливной системой судового комплекса на переходных режимах является актуальной

Цель исследования

Целью исследования является получение математической модели динамики судового комплекса с учетом переходных процессов и нахождение управления, обеспечивающее его движение с максимальной средней скоростью и минимальным расходом топлива на единицу пути.

Для решения поставленной цели необходимо рассмотреть задачи:

– в качестве математической модели использовать дифференциальные уравнения движения судового комплекса в безразмерном виде в нестационарных условиях;

– построение оптимального управления по методу усреднения.

Изложение основного материала исследования

Дифференциальные уравнения движения судового комплекса в безразмерном виде в нестационарных условиях имеют вид [7]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B}{A}\left[\overline{M}_g^o(\omega) - \overline{M}_c^o(\omega,\upsilon,\varphi,t)\right],$$
$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{A}\left[\overline{P}^o(\omega,\upsilon,\varphi,t) - R^o(\upsilon)\right] \qquad (1)$$

$$\text{при } \omega(0) = 1; \ \ \upsilon(0) = 1, \qquad (2)$$

где ω, υ – относительная угловая скорость ведущего звена и относительная поступательная скорость ведомого звена (судового комплекса);

A, B, t – безразмерные динамические параметры и относительное время;

P, R, M_g, M_c – относительные величины;

$P(\omega,\upsilon,\varphi,t) = \left[\frac{\varphi}{\varphi_{\max}}\left(\omega^2 - 0{,}6\frac{\lambda_o}{\lambda_{1\max}}\omega\upsilon + 1{,}2\frac{\lambda_o^2}{\lambda_{1\max}^2}\upsilon^2\right) - 1{,}6\frac{\lambda_o^2}{\lambda_{1\max}^2}\upsilon^2\right]C_1(t)$ – сила тяги винта;

$R(\upsilon) = \chi P(1,1,\varphi_0,0)\upsilon^2$ – сила сопротивления воды движению судна;

ω – угловая скорость винта;

$M_g(\omega,u) = M_o(1,1,\varphi_o,0)\overline{M}_c(\omega)u(t)$ – движущий момент;

$$M_c(\omega,\upsilon,\varphi,t)=\begin{bmatrix}\dfrac{\varphi}{\varphi_{\max}}\left(\omega^2-0{,}65\dfrac{\lambda_o}{\lambda_{2\max}}\omega\upsilon+1{,}45\dfrac{\lambda_o^2}{\lambda_{2\max}^2}\upsilon^2\right)\\-1{,}8\dfrac{\lambda_o^2}{\lambda_{2\max}^2}\upsilon^2\end{bmatrix}\dfrac{\varphi}{\varphi_{\max}}C_2(t)-$$ момент сопротивления винта;

$\lambda_o / \lambda_{2\max}$, A, B, $\varphi / \varphi_{\max}$ – безразмерные коэффициенты;

$\varphi(t)$ – шаговое отношение винта (ВРШ);

$\upsilon(t)$ – относительная подача топлива;

$C_1(t)$, $C_2(t)$ – функции, характеризующие нестационарность водной среды;

$$M_g(\omega)=\frac{1-sign\left(\dfrac{\omega_o}{\omega_p}-1\right)}{2-(C-1)\left[1+\left(\dfrac{\omega_p}{\omega_o}-1\right)\psi\right]}\mu(\omega)+\frac{1+sign\left(\dfrac{\omega_o}{\omega_p}-1\right)}{2\left(C-\dfrac{\omega_p}{\omega_o}\right)}\mu(\omega); \tag{3}$$

$$\mu(\omega)=\left[\xi\psi(C-1)\frac{1-sign\left(\omega-\dfrac{\omega_p}{\omega_o}\right)}{2}+\frac{\omega_o}{\omega_p}\frac{1+sign\left(\omega-\dfrac{\omega_p}{\omega_o}\right)}{2}\right]\left(\omega-\frac{\omega_p}{\omega_o}\right).$$

Здесь ξ, C, ω_o / ω_p, ψ – характеристики двигателя.

Важной характеристикой, оценивающей экономичность работы энергетической системы, является относительный расход некоторого ресурса в качестве, которого для судового комплекса являются топливо, электроэнергия на единицу пути:

$$C^o=\frac{M_g(\omega)\omega M_c(\omega)}{\upsilon}. \tag{4}$$

При постановке задач оптимального управления можно [8–9]:

1) Находить управление $0 \le u(\tau) \le 1$, обеспечивающее движение судового комплекса с максимальной средней скоростью, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\upsilon(\tau)d\tau \to \max \upsilon_{cp} \tag{5}$$

при дифференциальных связях (1) и граничных условиях: $\omega(0) = \omega(2\pi)$, $\upsilon(0) = \upsilon(2\pi)$;

2) Находить управление $0 \le u(\tau) \le 1$, обеспечивающее минимальный средний расход топлива на единицу пути судового комплекса при заданной средней скорости его движения $u_1 < u_{\max}$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\frac{M_g(\omega)\omega M_c\omega}{\upsilon}d\tau \to \min \tag{6}$$

при дифференциальных связях (1), граничных условиях и интегральной связи

$$\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\upsilon(\tau)d\tau=\upsilon_1.$$

Особенно большое практическое значение они имеют в решении одной из основных проблем судовой механики – автоматизации силовых установок судов различных классов и типов с винтами регулируемого шага (ВРШ) при плавании судов в наиболее тяжелых морских условиях.

Рассмотрим влияние управляющего параметра $u(t)$ на основные динамические характеристики судовой системы.

Рассмотрение задач 1) и 2) необходимо для сравнения соответствующих функционалов, при оптимальном управлении $u(t)$ и на выгоднейшем постоянном значении u ($u = u_{\max}$ – задача 1, u ($u = u_{\min}$ – задача 2, т.е. для оценки эффективности от введения управления по u.

Обычно, параметр $1 / A << 1$. Поэтому, используя метод усреднения [8], можно записать:

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{2\pi}\left[P^{o}(\omega,\upsilon,u,t)-R^{o}(\upsilon)\right]dt=0\,;\\&\omega=\frac{B}{A}\left[M_g(\omega)-M_c^{o}(\omega,\upsilon,u,t)\right];\\&C^{o}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{M_g(\omega)\omega g_e^{o}\left(M_g(\omega)\right)}{\upsilon}dt\,.\end{aligned}\qquad(7)$$

Исследование влияния параметра B / A показано, что при увеличении значения экстремальные величины всех характеристик судовой системы асимптотически приближаются к некоторым предельным значениям. При $B / A > 5$, величины ω и υ, а следовательно, M_g^{o}, M_c^{o} и P^{o} практически не отличаются от своих предельных значений.

При $\Delta C_2 > 0{,}5$, где $\Delta C_2 = maxC_2(t) - minC_2(t)$ значения $\upsilon(u)$, u_{max} , u_{min} практически не зависят от B / A. Поэтому, для произвольного B / A можно задавать u_{max} и u_{min} полученные в предположении $B / A << 1$.

При $\Delta C_2 > 0{,}5$, т.е. для больших возмущений среды (при больших амплитудах морской поверхности) на промежутке (0,1; 1,0) значения u_{max} и u_{min} достигают некоторых максимальных величин, а затем монотонно уменьшаются. Если задавать значение скорости υ при $B / A >> 1$ и $u = u_o$, то значение u_{min} практически не зависит от B / A при произвольном реальном значении $\Delta\ C_2$.

Проведенное исследование также показало возможность получения решения в предположении $B / A << 1$ и $B / A >> 1$. В тоже время, при этих предположениях использование метода малого параметра [9–10] дает возможность практически довести исследование задач 1 и 2 до численных расчетов.

Значение основных характеристик силовых установок судового комплекса υ, $\omega_{\max}$, $\omega_{\min}$, C^{o} зависят существенно от всех параметров системы, поэтому для моделирования введем в рассмотрение аппроксимирующие функции указанных характеристик в виде:

Значение основных характеристик силовых установок судового комплекса υ, $\omega_{\max}$, $\omega_{\min}$, C^{o} зависят существенно от всех параметров системы, поэтому для моделирования введем в рассмотрение аппроксимирующие функции указанных характеристик в виде:

$$f = \psi_{2\xi} + a_o\left(\psi_{1\xi} - \psi_{2\xi}\right)\ell^{-\frac{B}{A}Hf},$$

где ξ – одна из перечисленных выше характеристик;

$$H_{\xi} = a_1 + a_2\frac{\lambda_o}{\lambda_{\max}} + a_3 u_o + a_4\chi + a_5\varsigma + a_6\frac{h_o}{R} + a_7\frac{\psi_o}{R} + a_8\left(\frac{\ell u_o}{R}\right)^2 + a_9 u_{\min};$$

$\psi_{i\xi}$ – аппроксимирующие функции для ξ при $B / A << 1$, $i = 1$ и $B / A << 1$, $i = 2$;
a_i – постоянные коэффициенты, которые определяются методом наименьших квадратов.

Аппроксимирующие функции получены при $\Delta C_2 \leq 0{,}5$ для произвольного отношенией B / A, а при $\Delta C_2 > 0{,}5$ для $B / A \geq 1$.

Рассмотрим построение управления системой, содержащей малый параметр. Для этого введем управление $u(t)$, минимизирующее функционал [10–11]:

$$I[u] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dt; \tag{8}$$

$$x'(t) = \varepsilon\sum_{j=1}^{B} X^j(x)\psi_j(u,t) \tag{9}$$

при граничных условиях:

$$x(0) = x(2\pi). \tag{10}$$

Задача (8)–(10) сводится к задачам оптимального управления, соответствующим последовательным приближением метода усреднения.

Задача оптимального управления, соответствующая первому приближению формируется следующим образом: найти управление, минимизирующее функционал:

$$I_1[u] = F(\xi); \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X^j(\xi)\overline{\psi_j(u,t)} = 0, \qquad \psi_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_j(u,\tau)d\tau. \tag{12}$$

Согласно сделанным предположениям система (12) имеет единственное решение [11]:

$$\xi = \xi\left(\overline{\psi(u,t)}\right).$$

Окончательно, получаем задачу с минимизируемым функционалом:

$$I[u] = W[Z(2\pi)]; \tag{13}$$

$$Z' = \frac{1}{2\pi}\psi(u,t), \quad Z'(0) = 0, \quad W[Z(2\pi)] = F\left[\xi\left(\overline{\psi(u,t)}\right)\right]. \tag{14}$$

На основании принципа максимума и теории управления Л.С. Понтрягина [11] $u(t)$ определяется из условия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \psi_c(u,t) \to \max,\ u \in \upsilon,$$

где $u = u(t, p)$, где $P = const$.

Оптимальное управление для задач 1) и 2) в случае m / A<<1, соответствующее первому приближению имеет вид:

$$u(t) = \frac{P_1 C_1(t) + P_3 C_2(t)}{P_2 C_1(t) + P_4 C_2(t)}. \tag{15}$$

Для судовых комплексов:

$$u(t) = a + b\frac{C_1(t)}{C_2(t)}, \tag{16}$$

где $a = P_1 / P_2$, $b = P_3 / P_4$.

Таким образом, задачи оптимального управления 1) и 2) в первом приближении можно свести к задачам экстремального регулирования по параметрам P_i.

В случае n / A>>1 получено аналитическое выражение для оптимального управления соответствующего первому приближению. Так, решение задачи 1) синтеза оптимального управления представляется в виде:

$$u(\omega) = 1 + \gamma\,\frac{1 - \sin g\left(\omega - \dfrac{\omega_p}{\omega_0}\right)}{2} - \left(\omega - \frac{\omega_p}{\omega_0}\right), \tag{17}$$

где γ >>1.

Управление (17) даст тем лучшее приближение к оптимальному, чем больше значение γ. Так как закон управления (17) справедлив для любых возмущающих функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$, то система автоматического управления с характеристикой регулятора скорости ведущего звена (17) поддерживает режим, близкий к оптимальному при действии произвольных возмущающих сил, в том числе и не периодических.

Проведенные исследования для судовых комплексов показали, что достаточно ограничиваться значением γ=50. При этом величина выигрыша скорости судна в нестационарных условиях изменения параметров достигает 8%, а при наилучшем управлении $u = u_{\max}$ – 4%. Величина $u_{\max}$ зависит от всех параметров, характеризующих судовой комплекс и состояние моря. Закон регулирования (17) является одинаковым для всех случаев и поэтому не требует проведения дополнительных расчётов.

Для задачи 2) при n / A>>1 оптимальное управление $u(t)$ имеет вид (16), т.е. совпадает с законом управления дня n / A<<1. Использование закона управления (16) для задачи 1) n / A>>1 позволяет получить скорость судна $\upsilon \to \upsilon_{\mathrm{opt}}$, близкую к оптимальной.

Необходимое условие оптимальности имеет вид [11]:

$$\left(-1\right)^k \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right]=0\,.$$

Если движение управляемой системы задается системой дифференциальных уравнений $\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial P_i}$, $H=\sum_{i-1}^{n}\xi_i P_i$, $P_i=\frac{\partial H}{\partial \chi_i}$, где i = 1, 2, . . ., n, управление $u(t)$ входит в функцию H, то при рассмотрении в качестве управления функции $W = du / dt$ получаем особые участки, которые удовлетворяют необходимым условием оптимальности. При полученных оптимальных управлениях для задачи управление ВРШ, обеспечивающее минимальный расход топлива на милю пути судна при заданной средней скорости его движения $\upsilon_1 < \upsilon_{\max}$, величина экономии в относительном расходе топлива может достигать 5%.

Рассмотрение управления вида

$$u\left(t\right)=a+bC_2\left(t\right) \tag{18}$$

показало, что экономия в расходе топлива при управлении по закону (16) мало отличается от экономии в расходе топлива при управлении по закону (18) и тоже достигает до 5%. Однако закон управления вида (18) более прост для реализации.

Полученные соотношения при моделировании и оптимальном управлении силовыми агрегатами судовых комплексов в отличие от результатов, изложенных в работах [12−13], позволили методом динамического программирования [8−9] провести анализ расхода топлива на единицу пути при оптимальном управлении по сравнению с соответствующим постоянным управлением.

Решение показало зависимость состояния судового комплекса от возмущений водной среды при оптимальном и постоянном управлении.

Выводы

Получены математическая модель динамики судового комплекса с учетом переходных процессов и найдено управление, обеспечивающее его движение с максимальной средней скоростью и минимальным расходом топлива на единицу пути.

Полученные соотношения при моделировании и оптимальном управлении силовыми агрегатами судовых комплексов позволили методом динамического программирования провести анализ расхода топлива на единицу пути при оптимальном управлении по сравнению с соответствующим постоянным управлением.

Решение показало зависимость состояния судового комплекса от возмущений водной среды при оптимальном и постоянном управлении.

Список использованной литературы

1. Дубовой В. М., Квєтний Р. Н., Міхальов О. І., Усов А. В. Моделювання та оптимізація систем. Вінниця: ПП «ТД» Едельвейс, 2017. 804 с.
2. Усов А. В., Дубров А. Н., Дмитришин Д. В. Моделирование систем с распределенными параметрами: монография. Одесса: Астропринт, 2002. 664 с.
3. Оборский Г. А., Дащенко А. Ф., Усов А. В., Дмитришин Д. В. Моделирование систем: монография. Одесса: Астропринт, 2013. 670 с.
4. Салыкин Е. А. и др. Опыт модернизации дизельных систем топливоподачи непосредственного действия. *Известия ВолгГТУ*. 2011. № 8(81). С. 38–40.
5. Блинов П. Н., Блинов А. П. Применение математической модели процесса топливоподачи топливной аппаратурой тепловозных дизелей для

многовариантных расчетов. *Известия Транссиба*. 2014. №3(19). С. 2–7.
6. Троицкий А. В. Компьютерное моделирование топливоподачи в судовом среднеоборотном четырехтактном дизеле. *Вестник АГТУ. Серия: Морская техника и технология*. 2009. № 2. С. 188–191.
7. Небеснов В. И., Плотников В. А. К динамике энергетической системы с двумя степенями свободы. Машиноведение. 1968. №1. С.45–54.
8. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. Москва: Наука, 1969. 119 с.
9. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 382 с.
10. Мойсеев Н. Н. Численные методы динамического программирования. М.: Наука, 1965. 268 с.
11. Понтрягин Л. С. Принцип максимума в оптимальном управлении. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 64 с.
12. Обозов А. А., Субботенко Д. И., Тараканов В. В. Оптимизация процессов в топливной аппаратуре дизеля с целью улучшения его экономических и экологических характеристик. *Вестник Брянского государственного технического университета*. 2014. № 2(42) С. 34–43 с.
13. Дьяконов М. Ю., Зайцев В. В., Бахрачева Ю. С. Оптимизация режимов работы тепловозных дизель-генераторов. *Современные проблемы транспортного комплекса России*. 2013. Т. 3. № 2. С. 193–196.

References

1. Dubovoi, V. M., Quarter, R. N., & Mikhalov, O. I., Usov, A. V. (2017). Modeling and Systems Optimization. Vinnitsa: PP 'TD' Edelweiss.
2. Usov, A. V., Dubrov, A. N., & Dmitrishin, D. V. (2002). Modeling of Systems with Distributed Parameters. Odessa: Astroprint.
3. Oborsky, G. A., Dashchenko, A. F., Usov, A. V., & Dmitrishin, D. V. (2013). Modeling of Systems. Odessa: Astroprint.
4. Salykin, E. A. (2011). The Experience of Modernization of Direct-Acting Diesel Fuel supply Systems. *Bulletin of the Volgograd State Technical University Interuniversity*. **8** (81), 38–40.
5. Blinov, P. N. (2014). The use of a mathematical model of the fuel supply process of diesel equipment for multivariate calculations with fuel equipment. *Proceedings of Trans-Siberian Railway*. **3** (19), 2–7.
6. Troitsky, A. V. (2009). Computer simulation of fuel supply in a marine medium-speed four-stroke diesel engine. *Bulletin of the ASTU. Series: Marine engineering and technology*. **2**, 188–191.
7. Nebesnov, V. I. (1968). To the dynamics of an energy system with two degrees of freedom. Engineering. **1**, 45–54.
8. Bellman, R., & Kalaba, R. (1969). Dynamic programming and modern control theory. Moscow: Nauka.
9. Bellman, R., & Dreyfus, S. (1965). Applied problems of dynamic programming. Moscow: Science.
10. Moiseev, N.N. (1965) Numerical methods of dynamic programming. Moscow: Science.
11. Pontryagin, L. S. (2004). The maximum principle in optimal control. Moscow: URSS Editorial.
12. Obozov, A. A. (2014). Optimization of processes in the fuel equipment of a diesel engine in order to improve its economic and environmental characteristics. *Bulletin of the Bryansk State Technical University*. **2** (42), 34–43.
13. Dyakonov, M. Yu. (2019). Optimization of the operating modes of diesel-generators, *Modern problems of the Russian transport complex*. **3**, 2, 193–196.

Усов Анатолій Васильович – д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Одеського національного політехнічного університету, e-mail: usov_a_v@ opu.ua, ORCID: 0000-0002-3965-7611.

Слободянюк Микола Васильович – старший викладач кафедри корабельної енергетики та електроенергетичних систем Інституту Військово-Морських Сил Національного університету «Одеська морська академія», e-mail: Nikgavr1234@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2248-0255.