

УДК519.65

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТІОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СУБСТИТУТ-БАЗИСИ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА Q_8

У роботі наведено приклади нових моделей тригонометричних базисів, які поставлено на заміну (substitute) поліноміальним базисам (стандартному та альтернативним) популярного елемента Q_8 .

На перших етапах розвитку метода скінченних елементів (МСЕ) вважалось, що головна перевага методу – поліноміальна інтерполяція. Поліноми Лагранжа у ролі базисів та алгебраїчний трикутник Паскаля забезпечили стрімке поширення МСЕ і зростання його популярності. Розвиток комп'ютерних технологій систематично і впевнено змінює ставлення зацікавлених фахівців до задач конструювання базисних функцій. Сьогодні розробники пакетів прикладних програм все частіше звертають увагу на раціональні функції і навіть функції більш загальних класів. Оригінальні базиси скінченних елементів на основі тригонометричних функцій ілюструють «м'яке» математичне моделювання (за терміном В. Арнольда). У конструктивній теорії серендипових апроксимацій тригонометричні функції ще не використовували.

Скінченний елемент Q_8 широко розповсюджений в МСЕ і успішно працює в ансамблі з трикутним елементом T_6 і квадратом Q_9 . Специфіка тригонометричних функцій змушує відмовитись від традиційного методу оберненої матриці. Для «проміжних» локальних функцій Q_8 ми використовуємо коноїди Каталана, а «кутові» функції конструюємо нематричним методом Р. Тейлора. Відсутність прикладів тригонометричного моделювання базисних функцій гальмує розвиток цього напрямку досліджень. Добре відома лише одна функція базису Q_9 – «дуга» мода О. Зенкевича (1971 р.), яку він сконструював із фрагментів функції косинус. У роботі запропоновані «рецепти» усунення фізичної неадекватності спектра вузлових навантажень («парадокс» Зенкевича).

Отримані результати і конкретні приклади підтверджують думку, що фінитні інтерполяційні функції можуть бути неполіноміальними. Застосування тригонометричних функцій відкриває нові можливості для усунення від'ємних вузлових навантажень.

Ключові слова: скінченний елемент Q_8 , поліноміальний базис, тригонометричний базис, локальні та інтегральні характеристики базису, спектр вузлових навантажень, фізична неадекватність спектра.

А. Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могилы

Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУБСТИТУТ-БАЗИСЫ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА Q_8

В работе приведены примеры новых моделей тригонометрических базисов, которые представлены на замену (substitute) полиномиальным базисам (стандартному и альтернативным) популярного элемента Q_8 .

На первых этапах развития метода конечных элементов (МКЭ) считалось, что главное преимущество метода – полиномиальная интерполяция. Полиномы Лагранжа в роли базисов и алгебраический треугольник Паскаля обеспечили стремительное распространение МКЭ и рост его популярности. Развитие компьютерных технологий систематически и уверенно меняет отношение заинтересованных специалистов к задачам конструирования базисных функций. Сегодня разработчики пакетов прикладных программ все чаще обращают внимание на рациональные функции и даже функции более общих классов. Оригинальные базисы конечных элементов на основе тригонометрических функций иллюстрируют «мягкое» математическое моделирование (согласно термину В. Арнольда). В конструктивной теории серендиповых аппроксимаций тригонометрические функции еще не применялись.

Конечный элемент Q8 широко распространен в МКЭ и успешно работает в ансамбле с треугольным элементом T6 и квадратом Q9. Специфика тригонометрических функций заставляет отказаться от традиционного метода обратной матрицы. Для «промежуточных» локальных функций Q8 мы используем коноиды Каталана, а «угловые» функции конструируем нематричным методом Р. Тейлора. Отсутствие примеров тригонометрического моделирования базисных функций тормозит развитие этого направления исследований. Хорошо известна лишь одна функция базиса Q9 – «дугая» мода О. Зенкевича (1971 г.), которую он сконструировал из фрагментов функции косинус. В работе предложены «рецепты» устранения физической неадекватности спектра узловых нагрузок («парадокс» Зенкевича).

Полученные результаты и конкретные примеры подтверждают мысль, что финитные интерполяционные функции могут быть неполиномиальными. Применение тригонометрических функций открывает новые возможности для устранения отрицательных узловых нагрузок.

Ключевые слова: конечный элемент Q8, полиномиальный базис, тригонометрический базис, локальные и интегральные характеристики базиса, спектр узловых нагрузок, физическая неадекватность спектра.

A.N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LYTVYNENKO, I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

TRIGONOMETRIC SUBSTITUTE-BASES OF THE FINITE ELEMENT Q8

The paper gives examples of new models of trigonometric bases, which substitute polynomial bases (standard and alternative) of the popular element Q8.

In the early stages of development of the finite element method (FEM) it was considered that the main advantage of the method is polynomial interpolation. Lagrange polynomials as bases and Pascal's algebraic triangle ensured the rapid spread of FEM and growth of its popularity. The development of computer technologies systematically and confidently changes the attitude of interested professionals to the tasks of designing bases functions. Today the developers of applications packages more often pay attention to rational functions and even functions of more general classes. The original bases of finite elements based on trigonometric functions illustrate "soft" mathematical modeling (according to V. Arnold). Trigonometric functions have not yet been used in the constructive theory of serendipity approximations.

The finite element Q8 is widespread in FEM and works successfully in an ensemble with a triangular element T6 and a square Q9. The specificity of trigonometric functions

forces to abandon the traditional method of inverse matrix. For "intermediate" local functions Q_8 we use Catalan conoids and we construct "angle" functions by the non-matrix method of R. Taylor. The lack of examples of trigonometric modeling of basis functions inhibits the development of this area of research. Only one function of the Q_9 basis is well known - the "blown" mode of O. Zenkevich (1971), which he constructed out of fragments of the Cos function. The paper proposes "recipes" for eliminating the physical inadequacy of the spectrum of nodal loads (Zenkevich "paradox").

The obtained results and specific examples confirm the opinion that finite interpolation functions can be non-polynomial. The use of trigonometric functions opens up new possibilities for elimination of negative nodal loads.

Key words: finite element Q_8 , polynomial basis, trigonometric basis, local and integral characteristics of the basis, spectrum of nodal loads, physical inadequacy of the spectrum.

Постановка проблеми

На перших етапах розвитку МСЕ вважалося, що головна перевага методу – поліноміальна інтерполяція. Поліноми Лагранжа у ролі базисів та алгебраїчний трикутник Паскаля забезпечили стрімке поширення МСЕ і зростання його популярності. Розвиток комп'ютерних технологій систематично і впевнено змінює ставлення зацікавлених фахівців до задач конструювання базисних функцій. Сьогодні розробники пакетів прикладних програм все частіше звертають увагу на раціональні функції і, навіть, функції більш загальних класів. Оригінальні базиси СЕ на основі тригонометричних функцій ілюструють «м'яке» математичне моделювання (за терміном В. Арнольда). У конструктивній теорії серендипових апроксимацій тригонометричні функції ще не використовували.

У роботі наведені перші приклади конструювання тригонометричних субститут-базисів для СЕ Q_8 .

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На початку 70-х років минулого століття вже було відомо [1–2], що локальні інтерполяційні функції не обов'язково мають бути поліномами, а в тих випадках, коли інтерполяційні функції – поліноми, вони не обов'язково мають бути повними. Підтвердження цього факту можна знайти і в інших джерелах, наприклад, в [3–4]. Конкретні приклади субститут-базисів на скінченному елементі з біквадратичною інтерполяцією можна знайти в [5–6]. У роботі [1] О. Зенкевич показав, як виглядає лише «дута» мода елемента Q_9 , якщо квадратичну параболу замінити фрагментом косинусоїди. Що робити з рештою функцій стандартного базису Q_9 , невідомо. Цікавим є питання побудови згладжених апроксимацій на скінченних елементах у просторі.

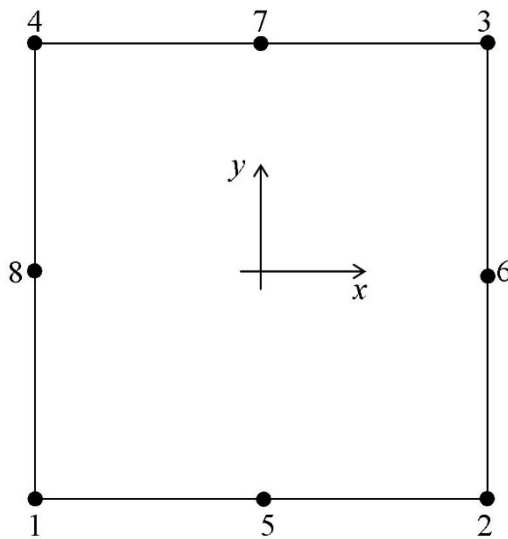
Варто згадати про тригонометричні базиси центрованого (сім вузлів) і нецентрованого (шість вузлів) октаєдрів для тривимірних задач [7].

Мета дослідження

Мета дослідження – поповнити модельний ряд скінченних елементів Q_8 новими моделями із тригонометричними базисами. Зробити порівняння із стандартним СЕ (Ергатудіс, Айронс, Зенкевич, 1968). Визначити основні локальні та інтегральні характеристики нових моделей. Показати нові «рецепти» усунення фізичної неадекватності стандартної моделі Q_8 .

Викладення основного матеріалу дослідження

На рис. 1 зображений найбільш розповсюджений в МСЕ елемент Q8. Поліноміальний базис (standard) цього елемента має вигляд [8]:



Координати вузлів:
 1(-1; -1); 2(1; -1);
 3(1; 1); 4(-1; 1);
 5(0; -1); 6(1; 0);
 7(0; 1); 8(-1; 0);

Рис. 1. Скінченний елемент Q8.

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x)(1 - y)(-1 - x - y), \text{ аналогічно для вузлів 2, 3, 4,} \quad (1)$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2}(1 - x^2)(1 - y), \text{ аналогічно для вузлів 6, 7, 8.}$$

Як відомо, цей базис винахідливо підібрали Ергатудіс, Айронс, Зенкевич у 1968 р. [1]. В деяких джерелах [1, 3, 4] Q8 називають серендиповим елементом. Характерною ознакою стандартних серендипових базисів є поверхні Каталана (коноїди), які асоціюються з «проміжними» вузлами 5, 6, 7, 8. Для формоутворення коноїда потрібно мати напрямну (в стандартних моделях це парабола) і твірну (це пряма лінія, яка рухається паралельно фіксованій площині і перетинає вісь коноїда). Згідно з ідеями В.І. Арнольда щодо «м'якого» математичного моделювання, ми пропонуємо замість напрямної параболу напрямну косинусоїду. Зрозуміло, що будемо діяти в рамках інтерполяційної гіпотези Лагранжа. Після підбору придатних «проміжних» поверхонь, ми сконструюємо «кутові» поверхні методом Р. Тейлора [9]. Наприклад, щоб сконструювати «кутову» поверхню $N_1(x, y)$, потрібно мати рівняння поверхонь $N_5(x, y)$ і $N_8(x, y)$. Тепер ці коноїди виглядають так:

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{2} (1 - y), \quad N_8(x, y) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi y}{2} (1 - x).$$

Лінійна комбінація гіперболічного параболоїда і пари коноїдів дає кутову поверхню:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - x - y + xy - \cos \frac{\pi x}{2} (1 - y) - \cos \frac{\pi y}{2} (1 - x) \right). \quad (2)$$

Аналогічно отримуємо решту «кутових» поверхонь. Нагадаємо умови інтерполяційної гіпотези Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) = 1. \quad (3)$$

Рівняння поверхні, що спирається на вісім аплікати f_i (інтерполянт) має вигляд:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^8 N_i(x, y) \cdot f_i.$$

Цікаво порівняти деякі локальні та інтегральні характеристики поліноміального та тригонометричного базисів Q8. Аналіз показує, що рельєф відповідних базисних поверхонь майже не відрізняється. Аплікати в барицентрі квадрата співпадають:

$$N_1(0; 0) = -\frac{1}{4}; \quad N_5(0; 0) = \frac{1}{2}.$$

Вузлові навантаження від одиничної масової сили визначаються шляхом інтегрального усереднення:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \int_D N_i(x, y) dS, \quad (4)$$

де S – площа квадрата.

Для поліноміальної моделі (1) маємо:

$$\gamma_i = -\frac{1}{12}, i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{3}, i = 5, 6, 7, 8,$$

для тригонометричної моделі (2):

$$\gamma_i = \frac{\pi - 4}{4\pi}; i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{\pi}; i = 5, 6, 7, 8.$$

Як бачимо, фізична неадекватність нового спектру залишається на стандартному рівні, а при $\pi \approx 3$ спектри просто співпадають.

Щоб звільнитися від «гравітаційного відштовхування» в кутових вузлах існує декілька рецептів. Але усі вони орієнтовані на поліноміальні базиси. Для тригонометричної моделі Q8 ми знайшли новий рецепт, який дозволяє зменшити об'єм тіла між «проміжною» поверхнею і носієм Q8. Нагадаємо, що з геометричної точки зору формула (4) визначає середню аплікату поверхні $N_i(x, y)$. Спочатку ми спробуємо стиснути коноїд шляхом деформування прямої косинусоїди. Тепер «проміжні» функції мають вигляд:

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} (1 - y), \quad N_8(x, y) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi y}{2} (1 - x),$$

а «кутова»:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - x - y + xy - \cos^2 \frac{\pi x}{2} (1 - y) - \cos^2 \frac{\pi y}{2} (1 - x) \right).$$

Локальні характеристики цієї моделі не відрізняються від стандартних:

$$N_1(0; 0) = -\frac{1}{4}, i = 1, 2, 3, 4; \quad N_5(0; 0) = \frac{1}{2}, i = 5, 6, 7, 8,$$

але від'ємні «навантаження» у кутах носія зникають. Тепер ми отримали математично обґрунтований і фізично адекватний спектр:

$$\gamma_i = 0; i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{4}; i = 5, 6, 7, 8.$$

Якщо читача не влаштовує той факт, що не всі вузли завантажені, пропонуємо «притиснути» не тільки напрямку, але й твірну. Замість прямолінійної твірної можна взяти фрагмент квадратичної параболи. Зрозуміло, що головний атрибут серендипових моделей – коноїд – перетворюється на трансляційну поверхню від'ємної гауссової кривини. Тепер важливо знати міру, щоб від'ємні навантаження не з'явилися у «проміжних» вузлах.

Покажемо модель Q8, яка нам здається бездоганною. «Проміжні» функції мають вигляд:

$$N_5(x, y) = \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\pi x}{2} (1 - y)^2, \quad N_8(x, y) = \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\pi y}{2} (1 - x)^2,$$

«кутова»:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{8} \left(2 - 2x - 2y + 2xy - \cos^2 \frac{\pi x}{2} (1 - y)^2 - \cos^2 \frac{\pi y}{2} (1 - x)^2 \right).$$

Для цієї моделі локальні характеристики:

$$N_i(0; 0) = 0, i = 1, 2, 3, 4; \quad N_i(0; 0) = \frac{1}{4}, i = 5, 6, 7, 8,$$

інтегральні характеристики:

$$\gamma_i = \frac{1}{12}; i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{6}; i = 5, 6, 7, 8.$$

Висновки

Отримані результати і конкретні приклади підтверджують думку, що фінітні інтерполяційні функції можуть бути не поліноміальними. Застосування тригонометричних функцій відкриває нові можливості для усунення від'ємних вузлових навантажень. До цих пір вважалося, що для отримання фізично адекватного спектру вузлових навантажень треба відмовитись від коноїдів у якості «проміжних» поверхонь. Саме так з'явилися альтернативні поліноміальні базиси Q8. Тепер доведено, що коноїд можна залишити, деформуючи лише напрямку косинусоїду. Нові моделі скінченного елемента Q8 – яскравий приклад «м'якого» математичного моделювання (за В. І. Арнольдом).

Список використаної літератури

1. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
2. Oden J. T. Finite Elements of Nonlinear Continua. N.Y.: McGraw-Hill, 1972. 431 p.
3. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.

4. Norri D. H., de Vries G. The Finite Element Method. Fundamentals and Applications. New York, London: Academic Press, 1973. 324 p.
5. Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Хомченко Б. А. Сглаженные аппроксимации на сирендиповых элементах. *Прикладная математика и математическое моделирование*. Материалы VII Международного симпозиума по методу дискретных особенностей в задачах математической физики (Феодосия, 9-14 июня 1997). Феодосия: ХГТУ. 1997. С. 62-64.
6. Хомченко А.Н., Литвиненко О.И., Астіоненко І.О. Згладжені апроксимації біквдратичного скінченного елемента. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Мелітополь: ТДАТУ, 2011. Вип. 4, Т.5. С. 65 – 71.
7. Мотайло А. П., Хомченко А. Н. Об октаэдре с тригонометрическим базисом. *Образование и наука без границ: Материалы VIII междунар. конференции*. (Пшемьсль, 7–15 декабря 2011). Пшемьсль: Sp. z o.o. «Nauka I studia», 2011. Т. 27. Математика. Современные информационные технологии. С. 25–29.
8. Segerlind L. J. Applied Finite Element Analysis. London: John Wiley, 1975. 428 p.
9. Gallagher R. J. Finite element analysis: Fundamentals. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1975. 416 p.

References

1. Zienkiewicz, O. C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill.
2. Oden, J. T. (1972). Finite Elements of Nonlinear Continua. N.Y.: McGraw-Hill.
3. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
4. Norri, D. H., & de Vries, G. (1973). The Finite Element Method. Fundamentals and Applications. New York, London: Academic Press.
5. Guchek P.I., Litvinenko E.I., Homchenko B. A. Sglazhennyie approksimatsii na sirendipovyih elementah. *Prikladnaya matematika i matematicheskoe modelirovanie*. Materialyi VII Mezhdunarodnogo simpoziuma po metodu diskretnyih osobennostey v zadachah matematicheskoy fiziki (Feodosiya, 9-14 iyunya 1997). Feodosiya: HG TU. 1997. S. 62-64.
6. Khomchenko A.N., Lytvynenko O.I., Astionenko I.O. Zghladzheni aproksymatsii bikvadratychnoho skinchennoho elementa. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. Melitopol: T DATU, 2011. Vyp. 4, T.5. S. 65 – 71.
7. Motaylo, A. P., Homchenko A. N. Ob oktaedre s trigonometrichestkim bazisom. *Proceedings of the Obrazovanie i nauka bez granits: Materialyi VIII mezhdunar. konferentsii*. (Pshemisl, , December 7–15, 2011). Pshemisl: Sp. z o.o. «Nauka I studia», 2011. Vol. 27. Matematika. Sovremennyye informatsionnyie tehnologii, pp. 25–29.
8. Segerlind, L. J. (1975). Applied Finite Element Analysis. London: John Wiley.
9. Gallagher, R. J. (1975). Finite element analysis: Fundamentals. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили, e-mail: khan@chmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.