
ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 518.13

А.О. КАРАЄВ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

**СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛИ В АКсіАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ
ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ**

У наведеному дослідженні проаналізовані існуючі підходи до розв'язання аксіально-симетричної задачі теорії потенціалу та наведені й доведені власні алгоритми і схеми. У кусково-лінійному наближенні проаналізовані сингулярні інтеграли та отримані квадратурні формули для їх програмного розв'язання, що виникають під час обчислення коефіцієнтів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Зокрема, інтеграли з логарифмічною особливістю були порівняні з існуючими аналітичними виразами для деяких функцій, а загальна схема для сингулярного інтеграла була протестована на прикладі поверхневого інтеграла Гаусса з фіксованою точкою на поверхні.

Ключові слова: інтегральні рівняння, сингулярні інтеграли, теорія пружності, еліптичні інтеграли.

А.А. КАРАЕВ

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

**СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА**

В приведенном исследовании проанализированы существующие подходы к решению осесимметричной задачи теории потенциала, также приведены и доказаны собственные алгоритмы и схемы. В кусочно-линейном приближении проанализированы сингулярные интегралы и получены квадратурные формулы для их программной реализации, которые возникают при вычислении коэффициентов матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Интегралы с логарифмической особенностью были сравнены с аналитическими выражениями для некоторых функций, а общая схема для сингулярного интеграла была протестирована на примере поверхностного интеграла Гаусса с фиксированной точкой на поверхности.

Ключевые слова: интегральные уравнения, сингулярные интегралы, теория упругости, эллиптические интегралы.

А.О. KARAIEV

V.N. Karazin Kharkiv National University

Е.А. STRELNIKOVA

V.N. Karazin Kharkiv National University

The A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the NAS of Ukraine

SINGULAR INTEGRALS IN AXISYMMETRIC TASKS OF POTENTIAL THEORY

Axisymmetric structures are widely used in the chemical and aerospace industries, logistics, power engineering and other engineering sectors. Usually these structures and their components work at high loads, interact with moving fluids and are exposed to high temperatures. Therefore, the main tasks are assessment of critical loads, identification and separation of hazardous resonance frequencies, and prediction of a reliable safety forecast for equipment operation. Experimental research in this area is financially costly, complex and sometimes impossible for a number of reasons. That is why the methods of mathematical and computer modeling are the most effective engineering tools for assessing the strength characteristics of existing and projected objects. The calculation of elements of a matrix of a system of linear algebraic equations does not cause difficulties, since the integral functions are continuous and for them it is possible to use standard Gaussian quadratures. However, in the case where the collocation point coincides with the boundary element on which the integration occurs, the argument of the complete elliptic integral becomes at the point of collocation equal to one, so the calculated integral becomes an improper integral of the second kind. It is necessary to investigate its convergence and develop quadrature formulas for its calculation. In the above study, the existing approaches to solving the axisymmetric problem of the theory of potential are analyzed and their own algorithms and schemes are presented and proved. In the piecewise linear approximation, singular integrals are analyzed and quadrature formulas are obtained for their program realization that arise when calculating the matrix coefficients of a system of linear algebraic equations. Integrals with a logarithmic singularity were compared with analytic expressions for some functions, and the general scheme for the singular integral was tested using the surface Gaussian integral with a fixed point on the surface.

Keywords: integral equations, singular integrals, theory of elasticity, elliptic integrals.

Постановка проблеми

Аксіально-симетричні структури широко застосовуються у хімічній та аерокосмічній промисловості, логістиці, енергетиці та інших інженерних галузях. Зазвичай ці структури та їх компоненти працюють при великих навантаженнях, взаємодіють з рідинами, що рухаються та перебувають під дією високих температур. Тому основними задачами є оцінка критичних навантажень, ідентифікація та відділення небезпечних резонансних частот і передбачення надійного прогнозу безпеки експлуатації обладнання.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій

Експериментальні дослідження у цій сфері є фінансово затратними, складними та іноді навіть неможливими через низку причин. Саме тому методи математичного та комп'ютерного моделювання є найбільш ефективними інженерними засобами для оцінки міцнісних характеристик існуючих об'єктів та тих, що тільки проектуються [1, 3–6].

Граничне інтегральне рівняння в теорії потенціалу має наступний вигляд [1]:

$$C(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) + \int_S u(\vec{r})q^*(\vec{\xi}, \vec{r})dS(\vec{r}) = \int_S q(\vec{r})u^*(\vec{\xi}, \vec{r})dS(\vec{r}), \quad (1)$$

де $u(\vec{\xi})$ – шукана величина, $q(\vec{r})$ – її нормальна похідна, $u^*(\vec{\xi}, \vec{r})$ – функція Гріна, $q^*(\vec{\xi}, \vec{r})$ – нормальна похідна від функції Гріна.

Функція Гріна в теорії потенціалу – це наступна величина:

$$u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{r}|}. \quad (2)$$

Вираз для її нормальної похідної:

$$q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{r}|} = \left(\vec{n}, \nabla \frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{r}|} \right) = -\frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{r}|^3} (\vec{n}, \vec{\xi} - \vec{r}). \quad (3)$$

Скористаємося аксіальною симетрією задачі, тобто шукана величина та її нормальна похідна не залежить від кутової змінної. Від кутової змінної залежать лише компоненти функції Гріна та її нормальної похідної, тому інтегрування за кутом можна провести одразу:

$$\tilde{u}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \int_0^{2\pi} u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) d\varphi = \frac{4K(m)}{\sqrt{(\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2}}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}^*(\vec{\xi}, \vec{r}) &= \int_0^{2\pi} q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) d\varphi = \frac{2}{\rho(\vec{r}) \sqrt{(\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2}} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\rho^2(\vec{\xi}) - \rho^2(\vec{r}) + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2}{(\rho(\vec{\xi}) - \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2} E(m) - K(m) \right) \rho(\vec{n}) + \right. \\ &\left. + \frac{2\rho(\vec{r})(z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))}{(\rho(\vec{\xi}) - \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2} E(m) z(\vec{n}) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де $m^2 = \frac{4\rho(\vec{\xi})\rho(\vec{r})}{(\rho(\vec{\xi}) + \rho(\vec{r}))^2 + (z(\vec{\xi}) - z(\vec{r}))^2}$ – аргумент еліптичного інтеграла першого роду.

Наступним кроком є процедура дискретизації. Границя тіла розбивається на певну кількість граничних елементів, на кожному з яких обирається точка колокації. Для кожної точки колокації застосовується граничне інтегральне рівняння, в результаті чого ми отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язуючи цю систему, ми знаходимо всі невідомі величини на границі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Діагональні елементи матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Обчислення елементів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь не викликає труднощів, тому що підінтегральні функції є неперервними і для них можна використовувати стандартні гауссові квадратури. Однак у випадку, коли точка колокації співпадає з граничним елементом, на якому відбувається інтегрування, аргумент повного еліптичного інтеграла стає в точці колокації рівним одиниці, тому інтеграл, що обчислюється, стає невластним інтегралом другого роду. Необхідно дослідити його збіжність та розробити квадратурні формули для його обчислення.

Ми користуємося кусково-лінійним наближенням, тобто граничні елементи є відрізками прямих. Лінійна залежність граничного елемента задається формулою $z = k(\rho - \rho_p) + z_p$, де (ρ_p, z_p) – координати точки колокації. Тоді нескінченно малий

елемент контуру має наступний вигляд: $d\Gamma = \sqrt{1+k^2} d\rho$. Вектор нормалі представляється через кутовий коефіцієнт наступним чином: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(k, -1)$. У такому випадку діагональні елементи визначаються наступними інтегралами:

$$\begin{cases} \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{4K(m)}{\sqrt{(\rho_P + \rho)^2 + k^2(\rho_P - \rho)^2}} \rho d\rho, \\ \sqrt{1+k^2} \int_{\rho_A}^{\rho_B} \frac{2n_\rho(E(m) - K(m))}{\sqrt{(\rho_P + \rho)^2 + k^2(\rho_P - \rho)^2}} d\rho, \end{cases} \quad (6)$$

де точки A та B – границі відрізка інтегрування.

Розкладання повного еліптичного інтеграла першого роду

У випадку наближення аргументу до одиниці повний еліптичний інтеграл першого роду може бути представлений у вигляді нескінченної суми [2]:

$$\begin{aligned} K(m) = & \ln \frac{4}{m'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) m'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) m'^4 + \\ & + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{m'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2}{5 \cdot 6}\right) m'^6 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

де $m'^2 = 1 - m^2$ – додатковий модуль еліптичного інтеграла.

Згрупувавши суми, отримаємо компактний вид розкладання:

$$K(m) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{m'} K(m') + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n} \left(\psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) \right). \quad (8)$$

Остання сума може бути обчислена використовуючи інтеграли з логарифмічною вагою:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 m'^{2n} \left(\psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-m'^2 x^2)(1-x^2)}} \ln \frac{1}{x} dx. \quad (9)$$

Отримуємо еквівалентний вид розкладання:

$$K(m) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{m'} K(m') + \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-m'^2 x^2)(1-x^2)}} \ln \frac{1}{x} dx. \quad (10)$$

З розкладання видно, що при наближенні аргументу до одиниці єдиною сингулярною функцією є логарифм.

Обчислення сингулярних інтегралів

У розділі вище ми отримали розкладання повного еліптичного інтеграла першого роду за степенями m' . В такому випадку зручно перейти в інтегруванні від змінної ρ до m' .

Розіб'ємо інтеграли точкою колокації:

$$\int_{\rho_A}^{\rho_B} f(\rho_p, \rho) K(m) \rho d\rho = \int_{\rho_A}^{\rho_p} f(\rho_p, \rho) K(m) \rho d\rho + \int_{\rho_p}^{\rho_B} f(\rho_p, \rho) K(m) \rho d\rho. \quad (11)$$

Перехід від змінної ρ до m' визначається формулою:

$$\rho = \rho_p \frac{\left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^2}{(1+k^2)(1-m'^2)}, \quad (12)$$

$$d\rho = \frac{d\rho}{dm'} dm' = \pm 2\rho_p \frac{\left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} \pm m'\right)^2}{(1+k^2)(1-m'^2)^2 \sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} dm'. \quad (13)$$

Ми отримали два корені, оскільки точки з однаковим значенням m' відповідають різним розташуванням відносно точки колокації.

Тоді сингулярний інтеграл (11) спрощується:

$$\begin{aligned} & \int_{\rho_A}^{\rho_B} f(\rho_p, \rho) K(m) \rho d\rho = \\ & = \int_0^{m'_B} (f(\rho_-(m')) A_-(m') + f(\rho_+(m')) A_+(m')) K(m) dm' + \int_{m'_B}^{m'_A} f(\rho_-(m')) A_-(m') K(m) dm'. \end{aligned} \quad (14)$$

Функції $A_-(m')$ та $A_+(m')$ визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} A_-(m') = \frac{2\rho_p^2 \left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} - m'\right)^4}{(1+k^2)^2 (1-m'^2)^3 \sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \\ A_+(m') = \frac{2\rho_p^2 \left(\sqrt{1+k^2(1-m'^2)} + m'\right)^4}{(1+k^2)^2 (1-m'^2)^3 \sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \end{cases} \quad (15)$$

З рівняння (14) лише перший інтеграл має особливість. Зробимо заміну $f(\rho_-(m')) A_-(m') + f(\rho_+(m')) A_+(m') = B(m')$ для спрощення. Використаємо отримане нами вище розкладання повного еліптичного інтеграла першого роду:

$$\int_0^{m'_B} B(m') K(m) dm' = \frac{2}{\pi} \int_0^{m'_B} B(m') K(m') \ln \frac{1}{m'} dm' + \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1}{x} \int_0^{m'_B} \frac{B(m')}{\sqrt{1-m'^2 x^2}} dm'. \quad (16)$$

У першому інтегралі проведемо лінійну заміну, щоб проводити інтегрування на проміжку $[0,1]$:

$$\int_0^{m'_B} B(m')K(m') \ln \frac{1}{m'} dm' = \ln \frac{1}{m'_B} \int_0^{m'_B} B(m')K(m') dm' + m'_B \int_0^1 B(m'_B x)K(m'_B x) \ln \frac{1}{x} dx. \quad (17)$$

Тоді інтеграл (16) перетворюється:

$$\int_0^{m'_B} B(m')K(m') dm' = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{1}{m'_B} \int_0^{m'_B} B(m')K(m') dm' + \int_0^1 \left(m'_B B(m'_B x)K(m'_B x) + 2 \frac{\tilde{B}(m'_B, x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) \ln \frac{1}{x} dx \right),$$

$$\text{де } \tilde{B}(m'_B, x) = \int_0^{m'_B} \frac{B(m')}{\sqrt{1-m'^2 x^2}} dm'.$$

Наступним кроком є дослідження інтегралів з логарифмічною особливістю.

Інтеграл з логарифмічною особливістю

Інтегралом з логарифмічною особливістю називається наступний інтеграл:

$$\int_0^1 f(x) \ln \frac{1}{x} dx, \quad (18)$$

де $f(x)$ – неперервна функція на проміжку $[0,1]$.

Неперервну функцію в точці x можна розкласти в степеневий ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$,

тому фундаментальною задачею є доказ збіжності наступного інтеграла:

$$\int_0^1 x^n \ln \frac{1}{x} dx = \frac{1}{(n+1)^2}. \quad (19)$$

Оскільки цей інтеграл збігається, можна розробити квадратурні формули, що програмно обчислюють такі інтеграл з вузлами у коренях ортогональних многочленів з логарифмічною вагою:

$$\int_0^1 f(x) \ln \frac{1}{x} dx \approx \sum_{n=1}^N w_n f(x_n). \quad (20)$$

Ортогональні многочлени з логарифмічною вагою визначаються наступним визначником:

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & \left(\frac{1}{5}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+3}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{1}{n}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 & \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 & \dots & \left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 & \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Обчислення сингулярних інтегралів в задачах теорії потенціалу

Використаємо отримані співвідношення для задач теорії потенціалу. Для цього підставимо конкретні значення функції:

$$u^* \Rightarrow f(\rho_{\pm}(m')) = \frac{4}{\sqrt{(\rho_p + \rho)^2 + k^2(\rho_p - \rho)^2}} = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{\rho_p} \frac{1-m'^2}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2) \pm m'}};$$

$$B(m') = 8\rho_p \frac{(1+k^2(1-m'^2) + 3m'^2)}{(1+k^2)^2(1-m'^2)^2} \tilde{B}(m'_B, x) = \frac{8\rho_p}{(1+k^2)^2} \int_0^{m'_B} \frac{(1+k^2(1-m'^2) + 3m'^2)}{(1-m'^2)^2 \sqrt{1-m'^2} x^2} dm';$$

$$q^* \Rightarrow f(\rho_{\pm}(m')) = -\frac{1}{\rho_p^2} \frac{2n_p}{\sqrt{(\rho_p + \rho)^2 + k^2(\rho_p - \rho)^2}} = -\frac{n_p}{\rho_p^2} \frac{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}}{(\sqrt{1+k^2(1-m'^2) \pm m'})^3};$$

$$B(m') = -\frac{4n_p}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \tilde{B}(m'_B, x) = -\frac{4n_p}{\sqrt{1+k^2(1-m'^2)}} \int_0^{m'_B} \frac{dm'}{(1-m'^2)\sqrt{1-x^2m'^2}}.$$

Підставивши отримані функції в загальний вираз (17), отримаємо явний вид обчислення сингулярного інтеграла.

Обчислення поверхневого інтеграла Гаусса

Для перевірки результатів у ході дослідження було обчислено поверхневий інтеграл Гаусса. Цей інтеграл має наступний вигляд:

$$H = \int_s \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS(\vec{r}). \quad (22)$$

Цей інтеграл можна обчислити, використовуючи властивості дельта-функції Дірака:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS(\vec{r}) &= -\int_s \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} dS(\vec{r}) = -\int_s \left(\vec{n}, \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} \right) dS(\vec{r}) = \\ &= -\int_s \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} d\vec{S}(\vec{r}) = -\int_v \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} dV(\vec{r}) = 4\pi \int_v \delta(\vec{r} - \vec{\xi}) dV(\vec{r}) = \begin{cases} 4\pi, & \vec{\xi} \in V; \\ 2\pi, & \vec{\xi} \in \partial V; \\ 0, & \vec{\xi} \notin V. \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

У той же час підінтегральна функція є відомою нам функцією q^* з теорії потенціалу, для якої ми отримали всі необхідні формули у розділі вище.

В якості поверхні в ході моделювання була обрана поверхня тору з фіксованими точками на його границі.

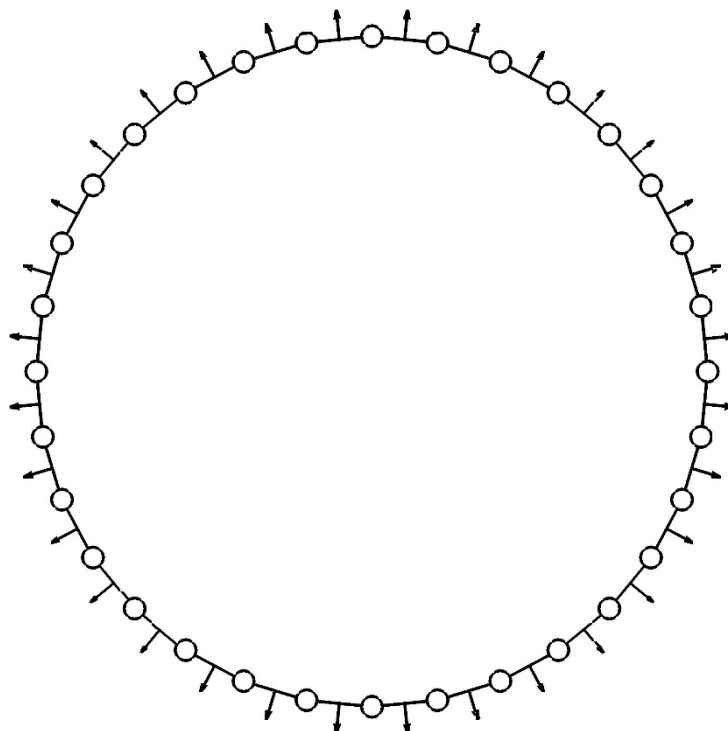


Рис. 1. Контур інтегрування у циліндричній системі координат

У таблиці нижче наведено результати обчислень.

Кількість граничних елементів	Відхилення результату від 2π
64	0.00001786398571
128	0.00001324899562
256	0.00001205818183
512	0.00001175149209
1024	0.00001167145814
2048	0.00001165002835

Висновки

У ході дослідження отримані квадратурні формули для обчислення сингулярних інтегралів у задачах теорії потенціалу. Для перевірки було обчислено поверхневий інтеграл Гаусса, точність обчислення якого зростала зі збільшенням кількості граничних елементів.

Список використаної літератури

1. Brebbia C.A. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering / C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1984. — 464 p.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. — 1108 с.
3. Gnitko V. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles / V. Gnitko, K. Degtyarev, V. Naumenko, E. Strelnikova // Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. — 2017. — Vol. 5. — I. 3. — P. 317-328.

4. Rizzo F.J. A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions / F.J. Rizzo, D.J. Shippy // *Mech. Res. Comm.* — 1979. — Vol. 6. — P. 99-103.
5. Ravnik, J. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank / J. Ravnik, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, U. Ogorodnyk // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* — 2016. — Vol.67.— P. 13-25.
6. Gnitko V. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks / V. Gnitko, K. Degtyarev, V. Naumenko, E. Strelnikova // *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements.* — 2018. — Vol. 6(6). — P. 976-988.

References

1. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering.* Springer-Verlag. Berlin and New York. (1984)
2. Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. *Tablicy integralov, summ, ryadov i prizvedeniy.* Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury. Moscow. (1963)
3. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements.* **5** (3), 317-328. (2017)
4. Rizzo, F. J., Shippy, D. J. A boundary integral approach to potential and elasticity problems for axisymmetric bodies with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Comm.* **6**, 99-103. (1979)
5. Ravnik, J. Gnitko, V., Degtyarev, K., Ogorodnyk, U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* **67**, 13-25. (2016)
6. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements.* **6**(6), 976-988. (2018)