

УДК 514.18

О.М. ГУМЕН  
Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"  
С.Є. ЛЯСКОВСЬКА  
Національний університет "Львівська політехніка"  
Є.В. МАРТИН  
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

### **ДОСТАТНІСТЬ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ 1-БАГАТОВИДІВ $n$ -ПРОСТОРІВ СТАНУ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ**

*Приведені результати дослідження достатнього числа зображень інтегральних кривих і фазових траєкторій просторів стану як моделей процесів багатопараметричних технічних систем засобами прикладної багатовимірної геометрії. Обґрунтовані умови зображення багатопросторових кривих у площинах різної вимірності комплексних креслеників багатовимірних евклідових просторів. Показана можливість комп'ютерної візуалізації мінімальним числом проекцій кривих ліній у лінійні координатні дво- і тривимірні підпростори. Обґрунтовані достатні умови формування проекцій кривих у дво- і тривимірні площини проекцій багатовимірних просторів стану і фазових просторів технічних систем.*

*Ключові слова: технічна система, інтегральні криві, фазові траєкторії, прикладна геометрія, комп'ютерна графіка.*

Е.Н. ГУМЕН  
Национальный технический университет Украины  
"Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"  
С.Е. ЛЯСКОВСКАЯ  
Национальный университет "Львовская политехника"  
Е.В. МАРТЫН  
Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности

### **ДОСТАТОЧНОСТЬ ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ 1-МНОГООБРАЗИЙ $n$ -ПРОСТРАНСТВ СОСТОЯНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Приведены результаты исследования достаточного числа полноты изображения интегральных кривых и фазовых траекторий пространств состояния как моделей процессов многопараметрических технических систем средствами прикладной многомерной геометрии. Обоснованы условия изображения многопространственных кривых в плоскостях разной размерности комплексных чертежей многомерных евклидовых пространств. Показана возможность компьютерной визуализации минимальным числом проекций кривых линий в линейные координатные двух- и трехмерные подпространства. Обоснованы достаточные условия формирования проекций кривых в двух- и трехмерные плоскости проекций многомерных пространств состояния и фазовых пространств технических систем.*

*Ключевые слова: техническая система, интегральные кривые, фазовые траектории, прикладная геометрия, компьютерная графика.*

O.M. GUMEN  
National Technical University of Ukraine  
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"  
S.Ye. LJASKOVSKA  
National University "Lviv Polytechnic"  
Ye.V. MARTYN  
Lviv State University of Life Safety

## SUFFICIENCY OF 1-MANIFOLDS PROJECTION IMAGES OF $n$ -SPACES OF TECHNICAL SYSTEMS STATE

*The boundless possibilities of modern information technologies, in particular, scientific computer graphics, provide the necessary computer tools for the implementation of models. The influence of the information environment indicates ways to improve the representation models of processes with a minimal, but sufficiently complete representation of the interrelations of parameters. Processes in technical systems are given by the integral curves of state spaces as multi-spatial curve lines of multidimensional Euclidean spaces, projecting of which by means of IT technologies is possible in two- and three-dimensional coordinate planes. One of the ways of their image and research is the use of geometric modeling tools with the opportunities of multidimensional applied geometry.*

*The results of a study of a sufficient number of image completeness of integral curves and phase trajectories of state spaces as models of processes of multiparameter technical systems by means of multidimensional applied geometry are presented. The conditions for the image of multidimensional curves on planes of different dimension of complex drawings of multidimensional Euclidean spaces are justified. The possibility of computer visualization with a minimal number of projections of curved lines into linear coordinate two- and three-dimensional subspaces is shown. Sufficient conditions for the formation of projections of curves in two- and three-dimensional planes of projections of multidimensional state spaces and phase spaces of technical systems are substantiated.*

*It is established on the example of the space  $E^4$  that during the formation of multi-space curve lines it is possible to use only the interconnections of two parameters in two-dimensional coordinate planes. A sufficient minimum number of such interrelations is shown. The projection of a four-spatial curve into a subspace of lower measurements has determined a sufficient minimum number of such projections in a subspace of identical measurements and combinations of subspaces of various measurements.*

*Keywords: technical system, integral curves, phase trajectories, applied geometry, computer graphics.*

### Постановка проблеми

Сучасному стані процесу автоматизованого проектування технічних систем засобами графічних ІТ-технологій властиве, зокрема, зменшення числа допущень, врахування дедалі більшого числа взаємозв'язків істотних параметрів. Етап дослідження перебігу процесів, змушуючи враховувати як потреби у ґрунтовному дослідженні і виявленні впливу на динаміку числових значень окремих параметрів, так і, відповідно, їх впливу на якість функціонування, висуває додаткові вимоги до опису і, звичайно, розбудови їх моделей.

Безмежні можливості сучасних інформаційних технологій, зокрема, наукової комп'ютерної графіки, надають необхідний комп'ютерний інструментарій для реалізації моделей. Вплив інформаційного середовища вказує шляхи удосконалення моделей

представлення процесів з мінімальним, але достатньо повним зображенням взаємозв'язків параметрів. Процеси в технічних системах подаються інтегральними кривими просторів стану як багатопросторовими кривими лініями багатовимірних евклідових просторів  $E^n$ , проєкціювання яких засобами ІТ-технологій можливе у дво- і тривимірні координатні площини. Одним із способів їх зображення і дослідження є використання засобів геометричного моделювання із залученням можливостей багатовимірної прикладної геометрії.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Аналіз останніх досліджень вказує на обмежене число наукових розвідок щодо розбудови моделей процесів із врахуванням взаємозв'язку значного числа змінних параметрів багатопараметричних технічних систем. Одним із здобутків наукової школи прикладної геометрії КПІ ім. Ігоря Сікорського є розвинення графічного інструментарію багатовимірної прикладної геометрії щодо дослідження поведінки багатопараметричних процесів, об'єктів і явищ.

Наукова розвідка [1] подає теоретичні засади прикладної багатовимірної геометрії, розвиває геометричні засоби візуалізації гіперповерхонь і багатовидів охоплюючих багатовимірних евклідових просторів. Важливим етапом у моделюванні багатопараметричних процесів є залучення засобів проєктивної геометрії як узагальнення багатовимірного евклідового простору [2, 3] і використання геометричних моделей із практичною реалізацією засобами наукової комп'ютерної графіки для моделювання багатопараметричних процесів [4, 5]. Зростання числа істотних параметрів досліджуваних багатопараметричних технічних систем і зв'язків між ними є причиною збільшення кількості проєкцій моделей процесів [6, 7]. Тому ще вільною науковою нішею залишається проблема достатності проєкційних зображень багатопросторових кривих ліній за умови залучення мінімальної, але достатньої їх кількості до досліджень процесів багатопараметричних технічних систем.

### **Мета дослідження**

Мета статті полягає у виявленні сутності геометричних моделей багатопросторових кривих ліній евклідових  $n$ -просторів із залученням мінімальної, але достатньої кількості проєкційних зображень щодо моделювання і дослідження процесів багатопараметричних технічних систем засобами графічних ІТ-технологій.

### **Викладення основного матеріалу дослідження**

Перебіг процесів у багатопараметричних технічних системах візуалізується кривими лініями, які слугують за інтегральні криві або їх фазові траєкторії. Поняття багатовимірних просторів стану і фазових просторів одержуємо при числі двох і більше змінних істотних параметрів. Для одного істотного параметра, який змінюється в часі, маємо інтегральну криву системи координат як площини стану технічної системи. Для двох змінних параметрів  $x_1, x_2$  одержуємо тривимірний простір. Такий простір містить інтегральні криві у двовимірних координатних площинах як площинах стану і фазові траєкторії також у двовимірній координатній площині як фазовій площині.

Сукупність фазових траєкторій утворює фазовий портрет системи. Криві лінії у двовимірних координатних площинах формують трипросторову криву лінію тривимірного простору стану технічної системи (рис. 1).

Трипросторова крива лінія  $a$  тривимірного простору взагалі розглядається як взаємний перетин двох поверхонь  $z = \alpha(x, y)$  і  $z = \beta(x, y)$  одного тривимірного простору  $Oxyz$ . У випадку дослідження кривих ліній як моделей багатопараметричних процесів маємо, що такими поверхнями слугують ортогонально розташовані до двох площин проєкцій  $Oxt$  і  $Oyt$  циліндри  $\alpha$  і  $\beta$  (рис. 2).

Зазначимо, що положення кожного циліндра  $\alpha$  і  $\beta$  однозначно визначене інтегральною кривою, яка слугує напрямною, і прямими лініями як твірними, паралельними осям тривимірного простору стану (рис. 3).

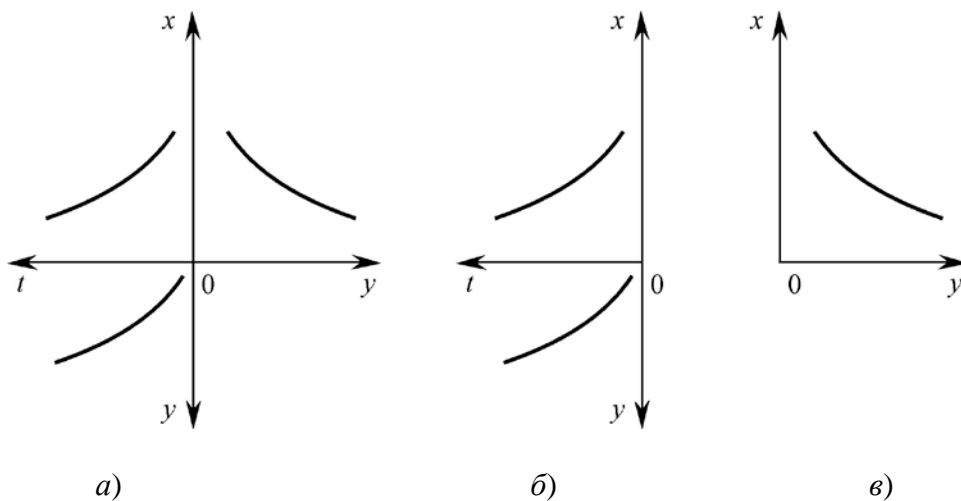


Рис. 1. Зображення проєкцій: а) трипросторової лінії; б) інтегральних кривих; в) фазової траєкторії.

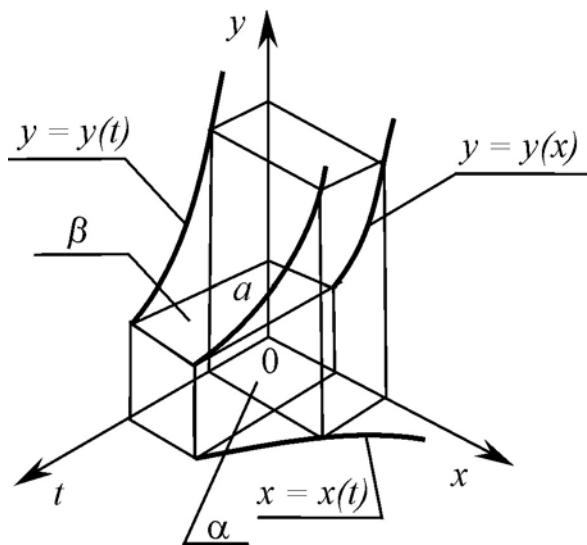


Рис. 2. Формування трипросторової кривої лінії як моделі процесу технічної системи.

Вимірність гіперповерхні чи багатovidу у багатовимірній прикладній геометрії визначається як [1]:

$$v = l + m - n \quad (1)$$

Одержаний геометричний образ розглядається у багатовимірній геометрії як переріз двох геометричних образів вимірностей  $l$  і  $m$  кожний.

Вираз (1) визначає розмаїття геометричних образів багатовимірного евклідового простору.

Зазначимо, що із зростанням вимірності  $n$  простору збільшується одночасно кількість проєкційних зображень. Число проєкцій геометричного образу, зокрема,

багатопросторової кривої лінії обирають найменшим, але достатнім для проведення операцій над моделлю процесу.

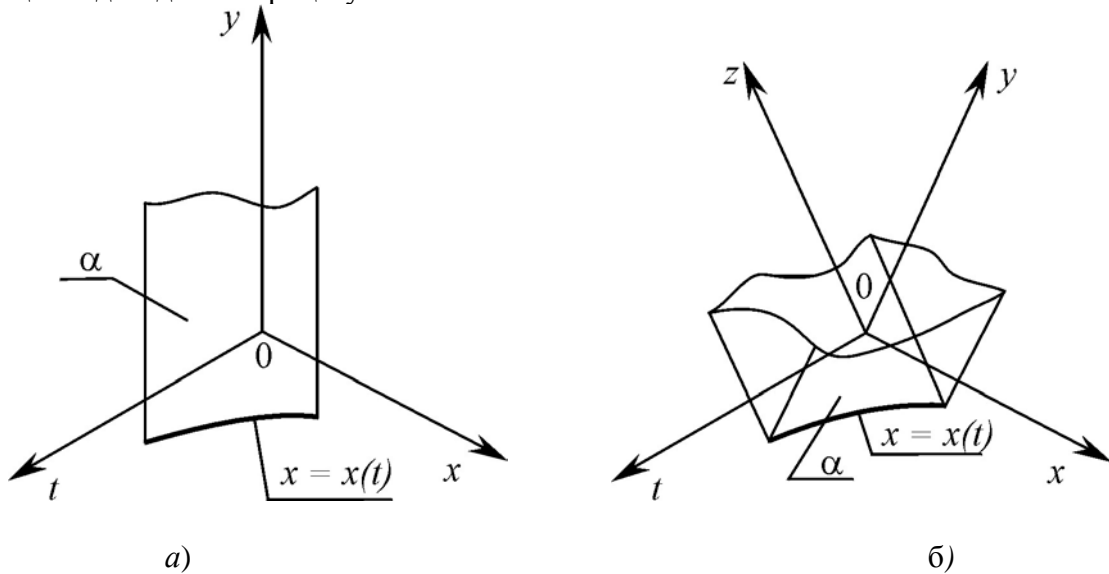


Рис. 3. Циліндричні поверхні: а) тривимірного простору; б) чотиривимірного простору.

У тривимірному просторі лінію як модель процесу формують, використовуючи ортогональні циліндри із напрямними, які описуються складними функціями. Арсенал геометричних засобів багатовимірної геометрії значно багатший, а варіантів формування багатопросторових кривих існує значна кількість. Одночасно збільшується кількість проєкційних зображень ліній як складових моделей процесу.

У чотиривимірному евклідовому просторі  $Oxyzt$  в процесі формування чотирипросторових ліній приймають участь багатовиди, зокрема, двовимірні поверхні та одновимірні лінії.

Розглянемо процес формування кривих ліній попарним накладанням зв'язків між параметрами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  і  $t$ . З-поміж можливих шести зв'язків між змінними для формування кривої лінії оберемо три зв'язки відповідно до [1]:

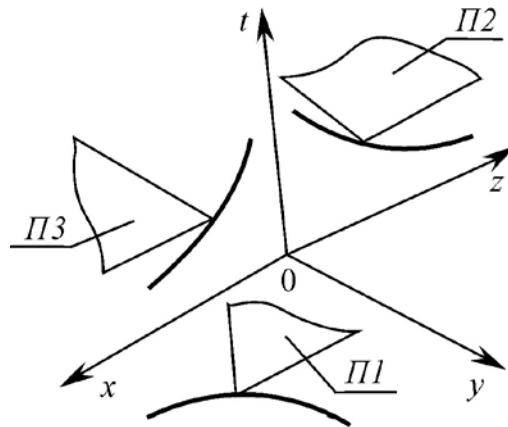
$$v = \sum_{i=1}^d m_i - n(d-1) \quad (2)$$

Для трьох  $d = 3$  багатовидів вимірностей  $m = 3$  кожний вимірність геометричного образу їх взаємного перетину складає  $v = 1$ . Такими багатовидами, геометричними образами чотиривимірного простору, є гіперциліндри, або тривимірні циліндри цього простору.

Направляючими 3-циліндрів слугують лінії, які подають три зв'язки між змінними параметрами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  у довільному порядку(рис. 4), наприклад:

$$\begin{aligned} y &= y(x); \\ z &= z(t); \\ x &= x(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Твірні циліндричних поверхонь являють двовимірні площини відповідно  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ . Такі площини, рухаючись по напрямних, паралельні координатним двовимірним площинам відповідно  $Ozt$ ,  $Oxy$ ,  $Ozy$  тривимірних координатних підпросторів.



**Рис. 4. Засоби формування 1-багатовиду чотиривимірного простору.**

Результатом взаємного перетину трьох циліндричних поверхонь відповідно до (2) є чотирипросторова крива лінія.

Зростання вимірності евклідових просторів надає значно більші можливості формування багатовидів, зокрема, кривих ліній, як геометричного місця точок чотиривимірного простору, яке відповідає (3). Очевидно, що із зростанням вимірності простору відповідно збільшується кількість варіантів побудови геометричних багатовидів.

У тривимірному координатному підпросторі чотиривимірного простору, наприклад,  $Oxyt$ , зв'язкам  $y = y(x)$  і  $x = x(t)$  трьох параметрів відповідають двовимірні циліндричні поверхні  $\Pi_4$ ,  $\Pi_5$ , твірними яких слугують прямі, паралельні осям координат, відповідно  $Ot$  і  $Oy$  (рис. 5 а).

Отже, такі лінії подають проекцію по відношенню до двовимірних площин  $Oxy$  і  $Oxt$  циліндричні поверхні. Їх перетином є однопараметрична трипросторова крива лінія  $a1$  (рис. 5 а). У чотиривимірному просторі  $Oxyzt$  лінія  $a1$  слугує напрямною двовимірного циліндра  $\Pi_6$ , твірні якого паралельні осі  $Oz$  простору (рис. 5 в).

Зв'язкам трьох параметрів  $x = x(t)$  і  $z = z(t)$  у тривимірному підпросторі  $Oxzt$  відповідають проекціючі по відношенню до двовимірних площин цього простору  $Oxt$  і  $Ozt$  циліндричні поверхні  $\Pi_7$  і  $\Pi_8$ . У чотиривимірному просторі  $Oxyzt$  лінія  $a2$  слугує напрямною двовимірного циліндра  $\Pi_9$ , твірні якого паралельні осі  $Oy$  цього простору. Взаємний перетин циліндрів  $\Pi_6$  і  $\Pi_9$  подає шукану чотирипросторову криву лінію.

Аналіз (1) і (2) вказує на інші варіанти формування кривих ліній чотиривимірного простору. Відповідно до (1) перетин гіперповерхні  $z = z(x, y, t)$  вимірності  $l = 3$  та двовимірні поверхні, наприклад,  $y = y(x, t)$  вимірності  $m = 2$  у чотиривимірному просторі  $Oxyzt$  виявляє геометричне місце цього простору як чотирипросторову криву лінію.

Відповідно до (2) для формування чотирипросторової кривої лінії у  $E^4$  необхідні три гіперповерхні  $d = 3$  вимірності  $m = 3$  кожна. Такі гіперповерхні можна формувати, використовуючи різні геометричні образи як направляючі гіперциліндрів.

Зв'язки трьох параметрів з чотирьох  $x, y, z, t$ , наприклад,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_2, x_3); \\ x_1 &= x_1(x_2, x_4); \\ x_3 &= x_3(x_1, x_4). \end{aligned} \quad (4)$$

подають рівняння двовимірних поверхонь у координатних підпросторах відповідно  $Ox_1x_2x_3$ ,  $Ox_1x_2x_4$  та  $Ox_1x_3x_4$  відповідно до (4). Поверхні є напрямними тривимірних циліндрів із твірними, паралельними осям, відповідно  $Ox_4$ ,  $Ox_3$  та  $Ox_2$  чотиривимірного простору.

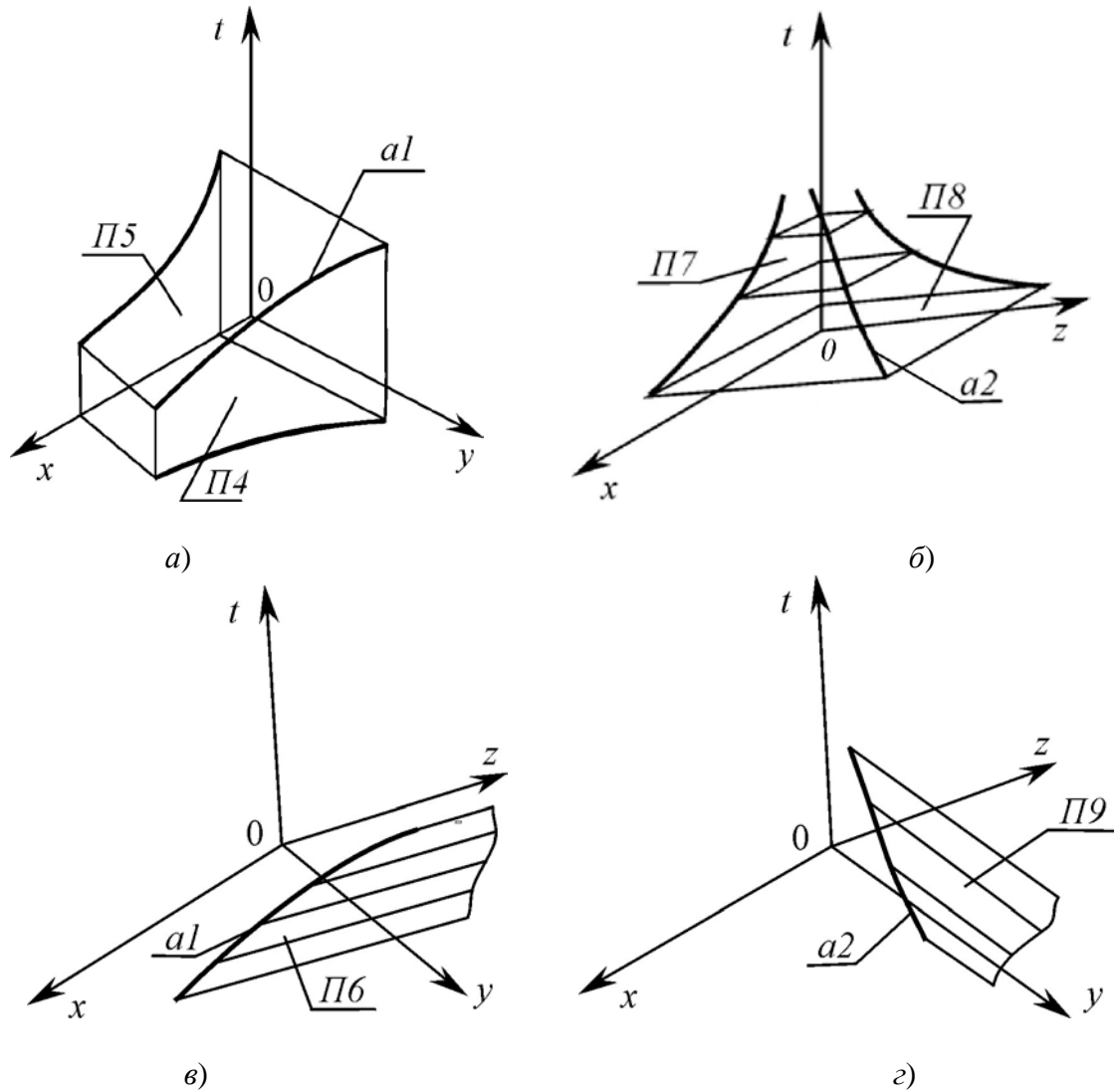


Рис. 5. Формування 1-багатовиду засобами тривимірних підпросторів.

Взаємний перетин трьох гіперциліндрів подає чотирипросторову криву лінію.

Наприклад,

зв'язки двох параметрів:

$$x_1 = x_1(x_2),$$

$$x_3 = x_3(x_1, x_4);$$

і трьох параметрів:

$$x_3 = x_3(x_2, x_4);$$

(5)

є рівняннями гіперциліндрів різної вимірності напрямними. Першому зв'язку (5) параметрів  $x_1$  і  $x_2$  відповідає одновимірною лінією двовимірної координатної площини  $Ox_1x_2$ . У чотирирівимірному просторі вона слугує напрямною тривимірного циліндра з твірними 2-площинами, паралельними двовимірній координатній площині  $Ox_3x_4$ .

Наступні два зв'язки (5) як двовимірні поверхні підпросторів  $Ox_1x_3x_4$  та  $Ox_2x_3x_4$  слугують напрямними тривимірних циліндрів з одновимірними прямими лініями, паралельними осям відповідно  $Ox_2$  та  $Ox_1$  простору.

Взаємний перетин циліндрів подає геометричний образ у вигляді чотирипросторової кривої лінії.

Наприклад,

$$\begin{aligned} \text{зв'язки двох параметрів:} & \quad x_1 = x_1(x_2); \\ & \quad x_3 = x_3(x_4); \\ \text{і трьох параметрів:} & \quad x_3 = x_3(x_2, x_4); \end{aligned} \tag{6}$$

подають тривимірні циліндри із твірними як двовимірними площинами, паралельними координатним площинам, відповідно  $Ox_3x_4$  та  $Ox_1x_2$  для перших двох зв'язків (6), і прямими для зв'язку трьох параметрів (6), паралельними осі  $Ox_1$ , простору. Взаємний перетин циліндрів вимірності  $m = 3$  подає чотирипросторову криву лінію.

Проведений аналіз надає можливість прослідкувати процес проєкціювання чотирипросторової кривої лінії у підпросторі різної вимірності, тобто у дво- і тривимірні площини. Проєкціюванням чотирипросторової кривої лінії у взаємно ортогональних напрямках, паралельних осям відповідно  $Oz$  і  $Oy$ , одержуємо трипросторові криві лінії відповідно  $a_1$  і  $a_2$  (рис. 5) у тривимірних підпросторах  $Oxyz$  і  $Oxzt$ . Проєкціями ліній  $a_1$  і  $a_2$  у двовимірні площини  $Oxy$  і  $Oxt$  підпростору  $Oxyz$ , а також у двовимірні площини  $Oxt$  і  $Ozt$  підпростору  $Oxzt$  є криві лінії, які відповідають зв'язкам параметрів  $x, y, z, t$ :

$$\begin{aligned} y &= y(x); \\ z &= z(t); \\ x &= x(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Отже, проєкціями чотирипросторової кривої лінії, поданої складною функцією (7), є криві у підпросторах нижчої вимірності. Достатня кількість проєкцій чотирипросторової кривої лінії становить:

- дві проєкції у двох тривимірних координатних підпросторах;
- одна проєкція у тривимірному підпросторі і дві проєкції відповідно у двох двовимірних координатних підпросторах;
- три проєкції у трьох двовимірних координатних підпросторах.

У другому випадку маємо (рис. 5), що одна з проєкцій – проєкція кривої лінії у двовимірній координатній площині  $Oxt$  – є одночасно складовою трипросторової кривої у тривимірному просторі  $Oxzt$ . З урахуванням повторення однієї з двовимірних проєкцій кривої лінії достатня кількість проєкцій чотирипросторової лінії складається з однієї просторової лінії у тривимірному підпросторі і однієї проєкції у двовимірній координатній площині. Тоді комп'ютерна реалізація засобами наукової комп'ютерної графіки проєкцій чотирипросторової кривої лінії як інтегральної кривої простору стану системи, процеси у якій подаються системою диференціальних рівнянь першого порядку, наприклад,



$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(y, z); \\ \frac{dy}{dt} &= f(x, z); \\ \frac{dz}{dt} &= f(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

здійснюється використанням відповідних команд для їх візуалізації у дво- і тривимірні координатні підпростори (рис. 6).

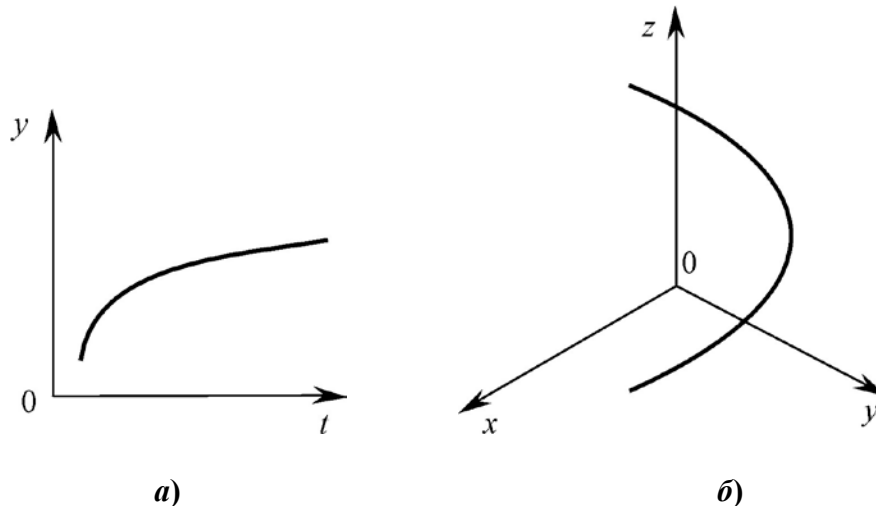


Рис. 6. Проекції інтегральної кривої простору  $E^4$  у а) дво- і б) тривимірні площини.

Збільшення вимірності просторів стану технічних систем вимагає для проведення геометричного і комп'ютерного моделювання та проведення аналізу їх динаміки використання циліндричних поверхонь вищих вимірностей. Зокрема, для п'ятивимірного евклідового простору необхідно використовувати одночасно дво-, три- і чотиривимірні циліндричні поверхні.

#### Висновки

Встановлено на прикладі простору  $E^4$ , що у процесі формоутворення багатопросторових кривих ліній можливе використання тільки взаємозв'язків двох параметрів у двовимірних координатних площинах. Показана достатня найменша кількість таких взаємозв'язків. Проекціюванням чотирипросторової кривої лінії у підпростори нижчих вимірностей визначена достатня мінімальна кількість таких проекцій у підпростори однакових вимірностей та комбінацій підпросторів різних вимірностей.

#### Список використаної літератури

1. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1 / С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустюльга, В.Є. Михайленко, І.Н. Бурчак. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.
2. Гумен О.М. Геометрія проєктивних  $n$ -просторів щодо перебігу технологічних процесів у дослідженнях багатопараметричних систем / О.М. Гумен, С.Є. Ляковська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. – Т. 49. – С. 89-94.

3. Ванін В.В. Деякі аспекти застосування засобів геометричного моделювання у проєктивному просторі / В.В. Ванін, О.М. Гумен // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 90-93.
4. Гумен О.М. Багатовимірна геометрія у прикладних задачах / О.М. Гумен, С.Є. Ляковська, Є.В. Мартин // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2016. – Вип. 3(58). – С. 497-500.
5. Гумен О.М. Візуалізація фазових траєкторій  $n$ -вимірних просторів / О.М. Гумен, С.Є. Мартин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 79. – С.121-125.
6. Gumen O. Research of thermal processes in industrial premises with energy-saving technologies of heating / O. Gumen, N. Spodyniuk, M. Ulewicz, Ye. Martyn // Diagnostyka. – 2017. – Vol. 18. – № 2. – P. 43-49.
7. Гумен О.М. Інформаційні графічні засоби подання простору температурного поля промислових будівель / О.М. Гумен, Є.В. Мартин, Н.А. Сподинюк, С.Є. Ляковська // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3 (62). – Т. 2. – С. 269-273.

#### References

1. Kovalov, S. M., Gumen, M. S., Pustiulha, S. I., Mykhailenko, V. Ye., Burchak, I. N. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. Spetsialni rozdily. Vypusk 1. Redaktsiino-vydavnychy vidil LDTU. Lutsk. (2006)
2. Gumen, O. M., Liaskovska, S. Ye. Heometriia proektyvnykh  $n$ -prostoriv shchodo perebihu tekhnolohichnykh protsesiv u doslidzhenniakh bahatoparmetrychnykh system. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. **49**, 4, 89-94. (2011)
3. Vanin, V. V., Gumen, O. M. Deiaki aspekty zastosuvannia zasobiv heometrychnoho modeliuвання u proektyvnomu prostori. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. **87**, 90-93. (2011)
4. Gumen, O. M., Liaskovska, S. Ye., Martyn, Ye .V. Bahatovymirna heometriia u prykladnykh zadachakh. Visnyk Khersonskoho Natsionalnogo Tekhnichnogo Universytetu. **3**(58), 497-500. (2016)
5. Gumen, O. M., Martyn, S. Ye. Vizualizatsiia fazovykh traiektorii  $p$ -vymirnykh prostoriv. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika. **79**, 121-125. (2008)
6. Gumen, O., Spodyniuk, N., Ulewicz, M., Martyn, Ye. Research of thermal processes in industrial premises with energy-saving technologies of heating. Diagnostyka. **18**, 2, 43-49. (2017)
7. Gumen, O. M., Martyn Ye. V., Spodyniuk N. A., Liaskovska S. Ye. Informatsiini hrafichni zasoby podannia prostoru temperaturnoho polia promyslovykh budivel. Visnyk Khersonskoho natsionalnogo tekhnichnogo universytetu. **3** (62), 2, 269-273. (2017)