УДК 519.6

Д.О. ПРОТЕКТОР
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

БЕЗСІТКОВИЙ ПІДХІД ПРИ КОМП'ЮТЕРНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ДВОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ АТОМАРНИХ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

Дана стаття присвячена розробці та програмній реалізації системи комп'ютерного моделювання "MHT2D", яка призначена для чисельного розв'язання двовимірних нестаціонарних задач теплопровідності за безсітковою схемою з використанням атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних. Розв'язок крайової задачі теплопровідності в системі комп'ютерного моделювання реалізується на основі комбінації методу подвійного заміщення та методу фундаментальних розв'язків з використанням атомарних радіальних базисних функцій. Метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку, а метод подвійного заміщення з використанням атомарних радіальних базисних функцій – для отримання частинного розв'язку. Розв'язок крайової задачі в "MHT2D" візуалізується у вигляді поверхні, що представляє собою розподіл температурного поля в поточний момент часу.

Ключові слова: безсітковий підхід, атомарні радіальні базисні функції, метод подвійного заміщення, метод фундаментальних розв'язків, крайові задачі, нестаціонарні задачі теплопровідності, система комп'ютерного моделювання.

Д.О. ПРОТЕКТОР
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

БЕССЕТОЧНЫЙ ПОДХОД ПРИ КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АТОМАРНЫХ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Данная статья посвящена разработке и программной реализации системы компьютерного моделирования "MHT2D", которая предназначена для численного решения двумерных нестационарных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием атомарных радиальных базисных функций двух независимых переменных. Решение краевой задачи теплопроводности в системе компьютерного моделирования реализуется на основе комбинации метода двойного замещения и метода фундаментальных решений с использованием атомарных радиальных базисных функций. Метод фундаментальных решений используется для получения однородного решения, а метод двойного замещения с использованием атомарных радиальных базисных функций – для получения частного решения. Решение краевой задачи в "MHT2D" визуализируется в виде поверхности, представляющей собой распределение температурного поля в текущий момент времени.

Ключевые слова: бессеточный подход, атомарные радиальные базисные функции, метод двойного замещения, метод фундаментальных решений, краевые задачи, нестационарные задачи теплопроводности, система компьютерного моделирования.

D.O. PROTEKTOR
V. N. Karazin Kharkiv National University

COMPUTER SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEMS BY MESHLESS APPROACH USING ATOMIC RADIAL BASIS FUNCTIONS

This article is devoted to the development and implementation of the computer simulation system "MHT2D" is designed to solve numerically two-dimensional nonstationary heat conduction problems by meshless approach using atomic radial basis functions of two independent variables. Solution of the boundary-value problem of heat conduction in the computer simulation system "MHT2D" is based on the combination of the dual reciprocity method and the method of fundamental solutions using atomic radial basis functions. To avoid integration over a domain, the method of partial solutions is used, which divides the solution of an inhomogeneous equation into a partial and a homogeneous ones. The method of fundamental solutions is used to obtain homogeneous solution and the dual reciprocity method with atomic radial basis functions is used to obtain particular solution. As a result, such approach implements the completely meshless method. The input data for the computer simulation system is the PLT file, which contains information about the geometric domain of the boundary-value problem. In the computer simulation system "MHT2D", the following radial basis functions are available: Gaussian, multiquadratic, inverse quadratic and inverse multiquadratic. The computer simulation system "MHT2D" it is possible to set values of initial and boundary conditions. Also, the computer simulation system "MHT2D" it is possible to set value of the internal heat source, thermal conductivity, density and specific heat at constant pressure. In the computer simulation system "MHT2D" it is possible to set the number of interpolation nodes, the number of nodes on the boundary, the time interval, the time step, and the number of nodes on the fictitious boundary. The computer simulation system "MHT2D" performs visualization of the solution of boundary-value problem in form of surface, which is the distribution of the temperature field at the current time. In the computer simulation system "MHT2D" realized an animated visualization of the temperature field distribution on the given time interval for nonstationary boundary-value problems.

Keywords: meshless approach, atomic radial basis functions, dual reciprocity method, method of fundamental solutions, boundary-value problems, nonstationary heat conduction problems, computer simulation system.

Постановка проблеми

В останні роки все частіше привертає увагу вчених використання безсіткових підходів при комп'ютерному моделюванні різних фізичних процесів. Безсіткові методи використовують набір рівномірно або довільно розподілених вузлів, в межах розглянутої області крайової задачі, до яких "прив'язуються" базисні функції. Безсіткові методи продемонстрували перспективність при розв'язанні задач, які є традиційно складними у випадку застосування сіткових методів. Практичні дослідження показують, що сіткові методи важко застосовувати в ситуаціях, коли об'єкти, які розглядаються в задачах, являють собою набір дискретних фізичних об'єктів (часток) або коли задачі, які розв'язуються, зводяться до дослідження складних процесів. Безсіткові методи є простими в реалізації та обчислювально ефективними. Алгоритми, що реалізують безсіткові схеми, не мають потреби в прив'язці до інтерполяційної сітки на відміну від сіткових методів, і з цієї причини легко інтегруються в системи автоматизованого проектування.

У цій статті викладена концепція безсіткового підходу для чисельного розв'язання двовимірних нестаціонарних задач теплопровідності з використанням атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних, яка лягла в основу розробленої системи комп'ютерного моделювання "MHT2D".

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Огляди по безсіткових підходах, які засновані на використанні радіальних базисних функцій (РБФ) і атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ) багатьох змінних представлені в статтях [1-8].

Мета дослідження

Метою роботи була розробка і програмна реалізація системи комп'ютерного моделювання "MHT2D" для чисельного розв'язку двовимірних нестаціонарних задач теплопровідності за безсітковою схемою на основі комбінації методу подвійного заміщення і методу фундаментальних розв'язків з використанням атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних.

Викладення основного матеріалу дослідження

Ітераційна схема

Керуюче диференціальне рівняння нестаціонарної теплопровідності в замкнутій області $\Omega \subset R^2$ обмеженій Γ має наступний вигляд:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} + g = k\nabla^2 u\,, \tag{1}$$

де ρ – щільність; c_p – питома теплоємність при постійному тиску; u – температура; g – щільність джерел і стоків тепла; k – коефіцієнт теплопровідності. Нехай $\Gamma = \sum_{i=1}^{3}\Gamma_i$ та $\Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Граничні умови для цієї задачі можуть бути описані за допомогою будь-якої комбінації наступного типу:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \bar{u}, && \vec{x} \in \Gamma_1 \\ q(\vec{x}) &= -\bar{q}, && \vec{x} \in \Gamma_2 \\ q(\vec{x}) &= -h(u - u_\infty), && \vec{x} \in \Gamma_3 \end{aligned}$$

де q – потік тепла, який визначається як $q = k\partial u/\partial n$, n – зовнішній вектор нормалі, h – коефіцієнт тепловіддачі, а u_∞ – температура навколишнього середовища.

Початкові умови задані у вигляді:

$$u(\vec{x},0) = f(\vec{x}).$$

Диференціальне рівняння теплопровідності (1) може бути зведене до послідовності неоднорідних модифікованих рівнянь Гельмгольца за допомогою процедури дискретизації за часом [9]:

$$\nabla^2 v^n - \lambda^2 v^n = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t}u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k}g^{n-1} + \frac{g^n}{k}, \tag{2}$$

де $v^n = u^n - \frac{1-\theta}{\theta}u^{n-1}$, $0 < \theta \le 1$ – ваговий коефіцієнт; $u^n = u(\vec{x}, n\Delta t)$; $g^n = g(\vec{x}, n\Delta t)$; Δt – крок за часом; $\lambda^2 = \frac{1}{\theta\alpha\Delta t}$, $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ – коефіцієнт температуропровідності.

На кожному часовому кроці буде розв'язуватись крайова задача з керуючим диференціальним рівнянням Гельмгольца, для розв'язання якої застосовується комбінація методу подвійного заміщення [9] з використанням атомарних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків [10].

Розв'язок (2) представляється у вигляді суми однорідного розв'язку v_h^n та частинного розв'язку v_p^n: $v^n = v_h^n + v_p^n$. Керуюче рівняння для частинного розв'язку має вигляд:

$$\nabla^2 v_p^n - \lambda^2 v_p^n = -\frac{1}{\theta^2\alpha\Delta t}u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k}g^{n-1} + \frac{g^n}{k}. \tag{3}$$

Частинний розв'язок v_p^n не повинен задовольняти ніякому набору граничних умов і буде знайдений з використанням методу подвійного заміщення. Керуюча система для однорідного розв'язку v_h^n запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} \nabla^2 v_h^n(\vec{x}) - \lambda^2 v_h^n(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in \Omega \\ v_h^n(\vec{x}) = \bar{u}(\vec{x}) - v_p^n(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma_1 \\ q_h^n(\vec{x}) = \bar{q}(\vec{x}) - q_p^n(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma_2 \\ (kq_h^n + hv_h^n)(\vec{x}) = -kq_p^n(\vec{x}) - hv_p^n(\vec{x}) + hu_\infty(\vec{x}), & \vec{x} \in \Gamma_3 \end{cases}$$

В якості базисних функцій для інтерполяції частинного розв'язку в рівнянні (3) використовуємо атомарні радіальні базисні функції двох незалежних змінних $\mathrm{Hlop}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Атомарна функція $\mathrm{Hlop}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in C^\infty$ є фінітним розв'язком функціонально-диференціального рівняння виду:

$$\Delta u(x,y) - \lambda^2 u(x,y) = \delta \oint_{\partial\Omega} u[3(x-\xi), 3(y-\eta)]\, ds + \mu u(3x, 3y),$$

де $\partial\Omega$ – коло радіуса 1: $\xi^2 + \eta^2 = 1$, має єдиний фінітний нескінченно диференційований розв'язок, який нормується умовою:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\, dx\, dy = 1$$

тільки при виборі коефіцієнтів $\mu = \delta 2\pi J_0(i\lambda)$, та $\delta = -\frac{9\lambda^2}{2\pi[J_o(i\lambda) - J_o(\lambda)]}$, де $J_0(\vec{x})$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку, при цьому:

1) носій розв'язку має форму кола, який вписується в квадрат $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ (рис. 1).

2) перетворення Фур'є розв'язку має вигляд:

$$U(t,s)=\prod_{h=0}^{\infty}\frac{3^{2h}\lambda^2\left[J_o(i\lambda)-J_o(3^{-h}\sqrt{t^2+s^2})\right]}{[J_o(i\lambda)-J_o(0)](t^2+s^2+3^{2h}\lambda^2)} \tag{4}$$

та є швидко спадаючою при $t^2+s^2\to\infty,(t,s)\in R^2$ функцією експоненціального типу;

3) розв'язок зображується в квадраті $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]\times\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$ рядом Фур'є:

4)

$$u(x,y)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}a_{qr}\cos\left(\frac{2q\pi x}{3}\right)\cos\left(\frac{2r\pi y}{3}\right),$$

коефіцієнти Фур'є якого представляються в наступному вигляді:

$$a_{00}=\frac{4}{9};\quad a_{q0}=\frac{2}{3}U\left(\frac{2q\pi}{3},0\right);\quad a_{0r}=\frac{2}{3}U\left(0,\frac{2r\pi}{3}\right);$$
$$a_{qr}=U\left(\frac{2q\pi}{3},\frac{2r\pi}{3}\right),\quad q,r=1,2,...$$

де функція $U(q,r)$ має вигляд (4).

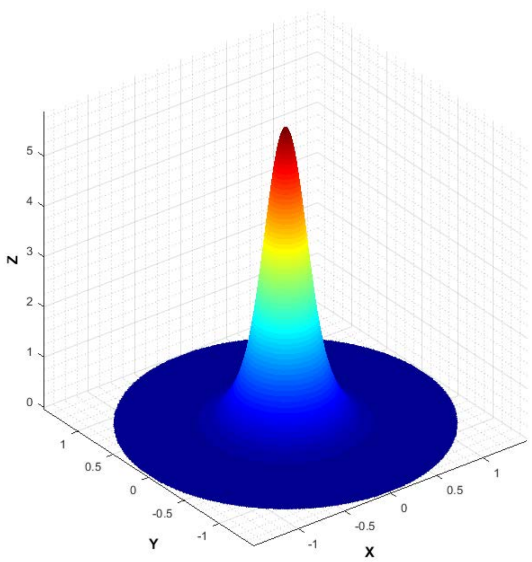

Рис. 1. Візуалізація атомарної радіальної базисної функції двох незалежних змінних.

Нехай $F^n(\vec{x})=-\frac{1}{\theta^2\alpha\Delta t}u^{n-1}+\frac{1-\theta}{\theta k}g^{n-1}+\frac{g^n}{k}$. Наближений частинний розв'язок може бути сконструйований за допомогою атомарної радіальної базисної функції $\mathrm{Hlop}(|\vec{x}|)$. Відповідна ітерація $F^n(\vec{x})$ представляється у вигляді лінійної комбінації базисних функцій:

$$F^n(\vec{x})\cong\hat{F}^n(\vec{x})=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^n\Psi_i(|\vec{x}|), \tag{5}$$

де N – кількість вузлів колокації, α_i^n – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню, а функції $\Psi_i(\|\vec{x}\|)$ – результат дії оператора Гельмгольца на відповідні функції $\mathrm{Hlop}_i(\|\vec{x}\|)$:

$$\Psi_i(\|\vec{x}\|) = \Delta \mathrm{Hlop}_i(\|\vec{x}\|) - \lambda^2 \mathrm{Hlop}_i(\|\vec{x}\|).$$

Таким чином, (5) являє собою систему з N лінійних рівнянь відносно невідомих α_i^n. Тоді частинний розв'язок v_p^n являє собою лінійну комбінацію базисних функцій:

$$v_p^n(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n \mathrm{Hlop}_j(\|\vec{x}\|).$$

Для отримання однорідного розв'язку використовується метод фундаментальних розв'язків. На n-ому часовому кроці однорідний розв'язок v_h^n апроксимується у вигляді:

$$v_h^n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{M} \beta_i \varphi_F(\vec{x}, \vec{x}_i), \tag{6}$$

де $\varphi_F(\vec{x}, \vec{x}_i) = \dfrac{1}{2\pi} K_0(\lambda r)$ – фундаментальний розв'язок модифікованого оператора Гельмгольца, K_0 – функція Бесселя другого роду нульового порядку, $r = |\vec{x} - \vec{x}_i|$ – евклідова відстань, $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^{M}$ – вузли на фіктивній границі що містить Ω.

Оскільки фундаментальний розв'язок диференціального рівняння є сингулярним на початку координат, то вузли, до яких прив'язуються фундаментальні розв'язки, розташовуються на фіктивній границі за межами області розв'язку крайової задачі.

Важливо визначити оптимальне розміщення фіктивної границі. Вона може являти собою коло, центр якої збігається з геометричним центром області розв'язку. Зі збільшенням радіуса кола підвищується точність одержуваного розв'язку, але погіршується обумовленість системи лінійних рівнянь, і навпаки. На практиці, як компроміс, значення радіуса фіктивної границі зазвичай вибирається рівним п'яти розмірам області розв'язку.

У вузлах, рівномірно розташованих на фіктивній границі, розставляються базисні функції, що представляють собою фундаментальні розв'язки однорідного модифікованого рівняння Гельмгольца.

Лінійна комбінація фундаментальних розв'язків $\varphi_F(\vec{x}, \vec{x}_i)$ за визначенням задовольняє модифікованому рівнянню Гельмгольца у всіх точках області розв'язку. Коефіцієнти β_i обираються таким чином, щоб задовольнити крайовим умовам в обраних вузлах на границі області розв'язку. Здійснивши колокацію (6) в обраних вузлах на границі, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M} \beta_i \varphi_F\left(\vec{x}_j, \vec{x}_i\right) = \overline{u}\left(\vec{x}_j\right) - v_p^n\left(\vec{x}_j\right), && 1 \le j \le M_1 \\
&\sum_{i=1}^{M} \beta_i \frac{\partial \varphi_F\left(\vec{x}_j, \vec{x}_i\right)}{\partial n} = \overline{q}\left(\vec{x}_j\right) - q_p^n\left(\vec{x}_j\right), && M_1 + 1 \le j \le M_2 \\
&\sum_{i=1}^{M} \beta_i \left(k \frac{\partial}{\partial n} + h \right) \varphi_F\left(\vec{x}_j, \vec{x}_i\right) = -k q_p^n\left(\vec{x}_j\right) - h v_p^n\left(\vec{x}_j\right) + h u_\infty\left(\vec{x}_j\right), && M_2 + 1 \le j \le M
\end{aligned}
\tag{7}
$$

де $\{x_j\}_1^{M_1} \in \Gamma_1$, $\{x_j\}_{M_1+1}^{M_2} \in \Gamma_2$, $\{x_j\}_{M_2+1}^{M} \in \Gamma_3$.

Незважаючи на погану обумовленість системи (7), розв'язок стійкий до досягнення машинної точності [9]. Вважається, що це явище можна пояснити, досліджуючи сингулярне розкладання (SVD) матриці коефіцієнтів системи (7).

Описана вище ітераційна схема лягла в основу створеної системи комп'ютерного моделювання "MHT2D".

Опис системи комп'ютерного моделювання "MHT2D"

Інформація про форму області розв'язку крайової задачі задається в будь-якій системі автоматизованого проектування для роботи з кресленнями (напр. AutoCAD, TurboCAD та інші). Створене креслення зберігається в форматі PLT, після чого може бути завантажено в "MHT2D". На рис. 2 представлений приклад області розв'язку, завантажений в СКМ "MHT2D".

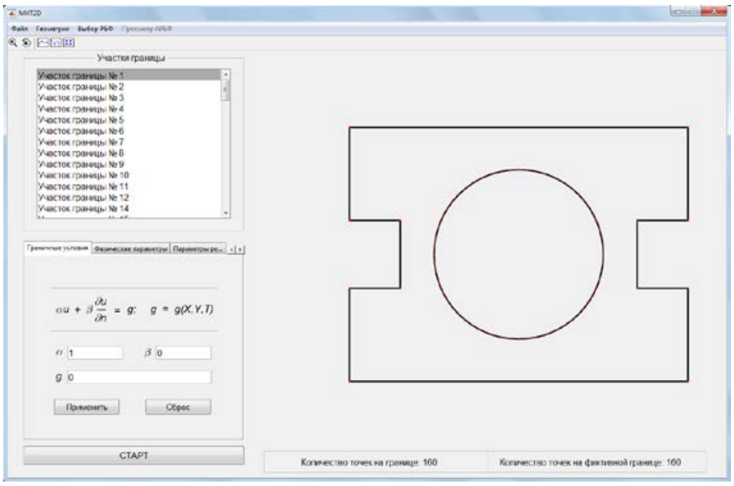

Рис. 2. Приклад візуалізації геометричної області в СКМ "MHT2D".

Для розв'язку крайових задач, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, необхідно задати значення початкових і крайових умов. На рис. 3 представлена частина робочої області системи, в якій задаються крайові умови для нестаціонарної задачі теплопровідності, а на рис. 4 – частина робочої області, в якій задаються початкові умови.

У СКМ "MHT2D" реалізована можливість зазначення внутрішнього джерела тепла як функції від координат і часу, а також значення коефіцієнта теплопровідності k, щільності ρ та питомої теплоємності c_p (Рис. 5). У вкладці "*Параметры решения*" задається щільність інтерполяційних вузлів всередині області розв'язку та за її межами, щільність вузлів на границі області, часовий інтервал, на якому буде розв'язуватися нестаціонарна крайова задача, крок за часом, а також кількість вузлів на фіктивній границі (рис. 6).

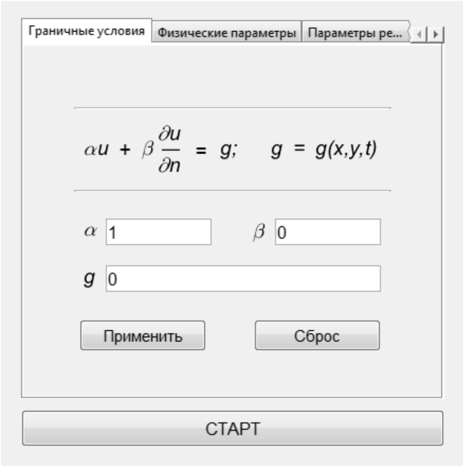

Рис. 3. Зазначення крайових умов в СКМ "MHT2D".

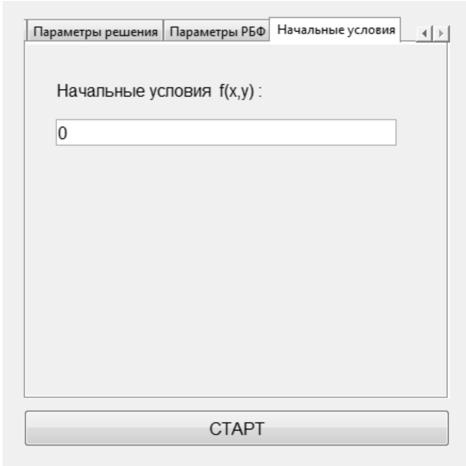

Рис. 4. Зазначення початкових умов в СКМ "MHT2D".

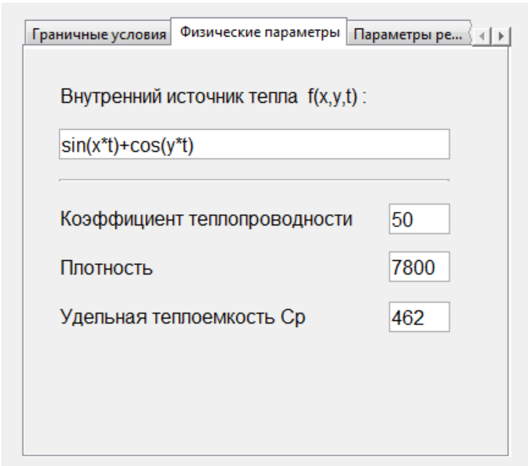

Рис. 5. Зазначення фізичних параметрів крайової задачі в СКМ "MHT2D".

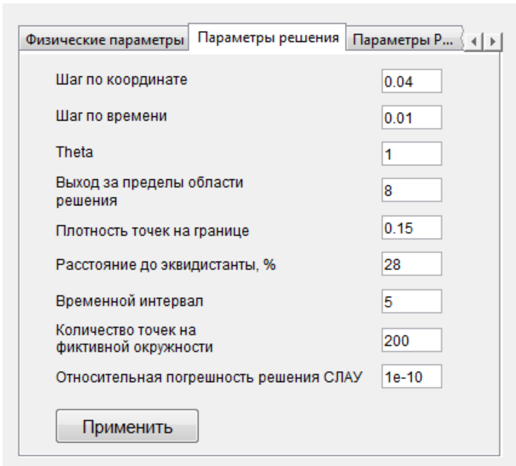

Рис. 6. Зазначення параметрів розв'язку крайової задачі в СКМ "MHT2D".

Розв'язок крайової задачі візуалізується у вигляді поверхні, що представляє собою розподіл температурного поля в поточний момент часу. Для нестаціонарних крайових задач реалізована функція анімованої візуалізації розподілу температурного поля на заданому часовому інтервалі.

В якості ілюстрації роботи системи приведена тестова задача на двовимірній області в формі квадрата. Постановка задачі: нестаціонарна задача теплопровідності з $k=1$, $\rho=1$, $c_p=1$, $\Delta t=0.01$, кількість інтерполяційних вузлів – 400, кількість вузлів на фіктивній границі – 120.

Внутрішнє джерело тепла:

$$g(x,y,t)=-\frac{k}{5}\Big(4\exp\big(-5(\cos(\pi t)-4y+2)^2-5(\sin(\pi t)-4x+2)^2\big)\big(\lambda^2+25600x+25600y-6400\cos(\pi t)-$$
$$-6400\sin(\pi t)+12800y\cos(\pi t)+12800x\sin(\pi t)-25600x^2-25600y^2-14080\big)\Big)$$

Крайові умови: $u|_{\Gamma} = 0$.

Точний розв'язок в момент часу $t = 0.01$ має вигляд:

$$u(x,y,t) = 0.8\exp\left(-80\left((x-r(t))^2 + (y-s(t))^2\right)\right),$$

де $r(t) = \frac{1}{4}(2+\sin(\pi t))$, $s(t) = \frac{1}{4}(2+\cos(\pi t))$.

Приведена похибка розв'язку тестової задачі в момент часу $t = 0.01$ не перевищує $7 \cdot 10^{-3}$ (рис. 7). На рис. 8 представлена візуалізація розв'язку тестової задачі в різні моменти часу.

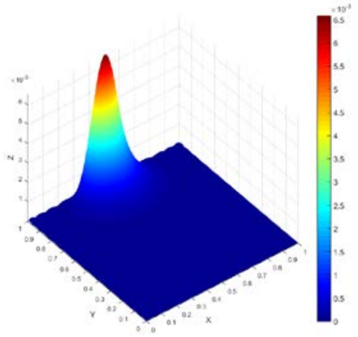

Рис. 7. Приведена похибка розв'язку нестаціонарної крайової задачі.

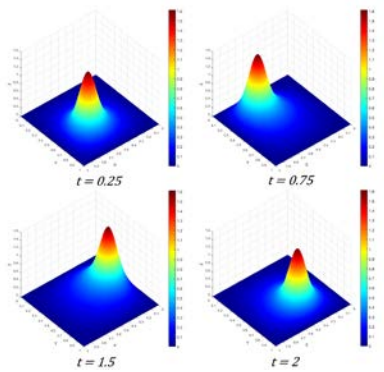

Рис. 8. Розв'язок нестаціонарної крайової задачі.

Висновки

У цій статті була викладена концепція безсіткового підходу для чисельного розв'язку двовимірних нестаціонарних задач теплопровідності з використанням атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних, яка лягла в основу розробленої системи комп'ютерного моделювання "MHT2D". В СКМ розв'язок крайової задачі реалізується на основі комбінації методу подвійного заміщення та методу фундаментальних розв'язків з використанням атомарних радіальних базисних функцій. Метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку, а метод подвійного заміщення з використанням атомарних радіальних базисних функцій – для отримання частинного розв'язку. Розв'язок крайової задачі в системі візуалізується у вигляді поверхні, що представляє собою розподіл температурного поля в поточний момент часу. Завдяки використанню безсіткового підходу, "MHT2D" не потребує прив'язки до інтерполяційної сітки, а тому значно спрощує та прискорює розв'язання нестаціонарних задач теплопровідності на складних багатозв'язних областях. Відсутність в СКМ прив'язки до інтерполяційної сітки, дозволяє уникнути спотворення границь на складних геометричних об'єктах. Використання в "MHT2D" атомарних радіальних базисних функцій двох незалежних змінних в якості інтерполяційних функцій, значно знижує обчислювальні витрати при розв'язанні задач математичної фізики.

Список використаної літератури

1. Belytschko T. Element-free Galerkin methods / T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu // Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. — 1994. — Vol. 37. — P. 229–256.
2. Belytschko T. Meshless methods: an overview and recently developments / T. Belytschko, Y. Rongauz, D. Organ // Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. — 1996. — Vol. 139. — P. 3–47.

3. Belytschko T. On the completeness of the meshfree particle methods / T. Belytschko, Y. Rongauz, J. Doblaw // Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. — 1998. — Vol. 43(5). — P. 785–819.
4. Fasshauer G.E. Meshfree Approximation Methods with MATLAB / G.E. Fasshauer. – Illinois Institute of Technology, 2007. — 550 p.
5. Колодяжный В. М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В.М Колодяжный, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. — 2010. — Т. 13. — № 3. — С. 67–74.
6. Колодяжный В.М. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ / В.М. Колодяжный, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. — 2010. — Т. 13. — № 4. — С. 49–57.
7. Колодяжный В.М. Бессеточные методы решения нестационарных задач теплопроводности с использованием атомарных радиальных базисных функций / В.М. Колодяжный, Д.А. Лисин // Кибернетика и систем. анализ. — 2013. — Т. 49. — №3. — С. 124–131.
8. Лисин Д.А. Формирование процедуры решения краевой задачи теплопроводности по бессеточной схеме на основе атомарных радиальных базисных функций в комбинации методов фундаментальных решений и двойного замещения / Д.А. Лисин, О.Ю. Лисина // Краевые задачи и мат. моделирование. — Новокузнецк, 2010. — Т. 2. — С. 17–22.
9. Ingber M.S. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations / M.S. Ingber, C.S. Chen, J.A. Tanski // Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. — 2004. —Vol. 60. — № 13. — P. 2183–2201.
10. Bogomolny A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems / A. Bogomolny // SIAM J. on Numerical Analysis. — 1985. — Vol**.** 22. — P. 644–669.

References

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. Element-free Galerkin methods. Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. **37**, 229–256. (1994)
2. Belytschko, T., Rongauz, Y., Organ, D. Meshless methods: an overview and recently developments. Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. **139**, 3–47. (1996)
3. Belytschko, T., Rongauz, Y., Doblaw, J. On the completeness of the meshfree particle methods. Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. **43**(5), 785–819. (1998)
4. Fasshauer, G. E. Meshfree Approximation Methods with MATLAB. Illinois Institute of Technology. Illinois. (2007)
5. Kolodyazhnyy, V. M., Lisina, O. Yu. Bessetochnyye metody v zadachakh modelirovaniya fizicheskikh protsessov. Problemy mashinostroyeniya. **13**, 3, 67–74. (2010)
6. Kolodyazhnyy, V. M., Lisina, O. Yu. Chislennyye skhemy resheniya krayevykh zadach na osnove bessetochnykh metodov s ispolzovaniyem RBF i ARBF. Problemy mashinostroyeniya. **13**, 4, 49–57. (2010)
7. Kolodyazhnyy, V. M., Lisin, D. A. Bessetochnyye metody resheniya nestatsionarnykh zadach teploprovodnosti s ispolzovaniyem atomarnykh radialnykh bazisnykh funktsiy. Kibernetika i sistemnyy analiz. **49**, 3, 124–131. (2013)
8. Lisin, D. A., Lisina, O. Yu. Formirovaniye protsedury resheniya krayevoy zadachi teploprovodnosti po bessetochnoy skheme na osnove atomarnykh radialnykh bazisnykh funktsiy v kombinatsii metodov fundamentalnykh resheniy i dvoynogo zameshcheniya. Krayevyye zadachi i mat. modelirovaniye. Novokuznetsk. **2**, 17–22. (2010)
9. Ingber, M. S., Chen, C. S., Tanski, J. A. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations. Intern. J. for Numerical Meth. in Eng. **60**, 13, 2183–2201. (2004)
10. Bogomolny, A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. SIAM J. on Numerical Analysis. **22**, 644–669. (1985)