

УДК 539.3

К.Г. ДЕГТЯРЬОВ, В.І. ГНІТЬКО, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА
Институт проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України
А.М. ТОНКОНОЖЕНКО
ДП КБ "Південне" ім. М.К. Янгеля

РОЗРАХУНКОВІ МОДЕЛІ ДЛЯ АНАЛІЗУ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТРИВИМІРНИХ НАНОКОМПОЗИТІВ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ СКІНЧЕНИХ ТА ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для дослідження локальних деформаційних та міцнісних властивостей нанокompозитів з поодинокими нановключеннями або неоднорідностями здійснено гранично-елементне та скінченно-елементне формулювання тривимірних статичних задач теорії пружності. Метод скінченних елементів застосовано для визначення напружено-деформованого стану різних репрезентативних об'ємних елементів тривимірних нанокompозитів. Вивчено вплив форми і відносних розмірів неоднорідностей та матриць репрезентативного об'єму на ефективні модулі пружності нанокompозитів. Розглядаються матриці у вигляді гексагональної призми та циліндра скінченних розмірів та неоднорідності як сфери або циліндри із закругленими краями. При використанні методу граничних елементів здійснено зведення двовимірних сингулярних рівнянь теорії пружності до одновимірних для випадку, коли область інтегрування є поверхнею обертання. При цьому статичні задачі визначення пружних характеристик нанокompозитів зводяться до розв'язання систем одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Це дозволяє розробити лише одну процедуру для визначення пружних характеристик, яку можна використовувати для опису пружних переміщень та зусиль як у матриці, так і у нановключенні. Розрахунки довели, що для оцінки ефективного модуля пружності композитного наноматеріалу достатньо розглядати матрицю з поодиноким включенням, оскільки мультиматричні моделі не демонструють результатів, відмінних від випадку поодинокого включення.

Ключові слова: нановключення, матриця, репрезентативний об'ємний елемент, методи скінченних та граничних елементів.

К.Г. ДЕГТЯРЕВ, В.И. ГНИТЬКО, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
А.М. ТОНКОНОЖЕНКО
ГП КБ "Южное" им. М.К. Янгеля

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТРЕХМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ И ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для исследования локальных деформационных и прочностных свойств нанокompозитов с одиночными нановключеннями или неоднородностями приведены гранично-элементные и конечно-элементные формулировки трехмерных статических задач теории упругости. Метод конечных элементов применен для исследования напряженно-деформированного состояния различных репрезентативных объемных элементов трехмерных нанокompозитов. Изучено влияние формы и относительных размеров неоднородностей и матриц репрезентативного объема на эффективные модули упругости нанокompозитов. Рассматриваются матрицы в виде гексагональной

призмы и цилиндра конечных размеров. Неоднородности представляются сферами или цилиндрами с закругленными краями. При использовании метода граничных элементов двумерные сингулярные уравнения теории упругости сведены к одномерным для случая, когда область интегрирования является поверхностью вращения. При этом статические задачи определения упругих характеристик нанокompозитов сводятся к решению систем одномерных сингулярных интегральных уравнений. Это позволяет разработать только одну процедуру для определения упругих характеристик, которую можно использовать для описания упругих перемещений и усилий как в матрице, так и в нановключении. Расчеты доказали, что для оценки эффективного модуля композитного наноматериала достаточно рассмотреть матрицу с одиночным включением, поскольку применение мультиматричных моделей не приводит к существенному изменению результатов.

Ключевые слова: нановключения, матрица, репрезентативный объемный элемент, методы конечных и граничных элементов

K.G. DEGTYAREV, V.I. GNITKO, E.A. STRELNIKOVA

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences

A.M. TONKONOZHENKO

M.K. Yangel Yuzhnoye State Design Office

COMPUTATIONAL MODELS FOR THE ANALYSIS OF MECHANICAL PROPERTIES OF THREE-DIMENSIONAL NANOCOMPOSITES BASED ON THE METHODS OF FINITE AND BOUNDARY ELEMENTS

To study the local deformation and strength properties of nanocomposites with single inclusions or inhomogeneities, the boundary-element and finite-element formulations of three-dimensional static problems of elasticity theory are performed. The finite element method is used to determine the stress-strain state of various representative volume elements of 3D nanocomposites. The main objective is to study the influence of forms and relative sizes of inhomogeneities and matrices for representative volumes on the elasticity effective modulus of nanocomposites. The matrixes in the form of a hexagonal prism and a finite-size cylinder are considered. Inhomogeneities are considered as spheres or cylinders with rounded edges. Using the method of boundary elements, the reduction of two-dimensional singular equations of the elasticity theory to one-dimensional ones has been made when the integration domain is a surface of rotation. The completeness of the system of boundary integral equations is achieved by considering the given differential connection between the displacement components and traction jump on the nanosized surface separated the materials. For the nano-inclusion zero-elastic characteristics, the system of key integral and differential equations is obtained on the nanohole surface in the three-dimensional elastic matrix for a static load. Finite-elemental formulation is made taking into account the conditions of full contact on nanoscale material separation surfaces. Then the static problems of determining the elastic characteristics of nanocomposites are reduced to solving systems of one-dimensional singular integral equations. This allows us to develop only one procedure for determining the elastic characteristics that can be used to describe the elastic displacements and tractions in the matrix as well as in the inclusion. The calculations have proved that for estimation the effective module of elasticity of the nanocomposite it is sufficient to consider the matrix with single inclusion, since bulky, multi-matrix models do not show results that are different from the case of single inclusion.

Keywords: nano-inclusions, matrix, representative volume element, bound and finite element methods

Постановка проблеми

Пружні нанокompозити відносяться до сучасних технологічних матеріалів, які широко використовуються на практиці для відповідальних покриттів інженерних споруд та систем. Завдяки їх внеску відбувається значне зміцнення відповідальних об'єктів зі збереженням їх легкості. Тому розробка нових методів для ефективного вивчення властивостей нанокompозитів надзвичайно актуальна. Ця задача досить складна, тому виникає потреба в нехай наближених, але зручних для аналізу аналітичних та числових розв'язках. В цьому дослідженні розглядається матриця репрезентативного об'єму з включеннями різної конфігурації для вивчення впливу форми і відносних розмірів неоднорідностей та матриць репрезентативного об'єму на ефективні модулі пружності нанокompозитів. Використовуються методи скінченних та граничних елементів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

В останні роки з'явилися публікації щодо нанокompозитів, в яких наведені ускладнені моделі як репрезентативних об'ємів, так і граничних умов на інтерфейсах. В [1–2] вводять величину поверхневого напруження як важливої характеристики наноструктурованих матеріалів і нанокompозитів. Запропоновано підходи, які використано для оцінки ефективних модулів пружності нанокompозиту з інтерфейсом Гертіна-Мердока, у рамках моделі рідко-заповненого середовища [3] та різні самоузгоджувальні схеми [3–4]. Спільною особливістю цих публікацій є використання моделі "поодинокі неоднорідності", тому ці результати потребують обґрунтування та з'ясування меж застосовності. Також був розроблений підхід мультипольних розвинень [5–6] для отримання повного розв'язку задачі теорії пружності для взаємодіючих сферичних неоднорідностей з інтерфейсом Гертіна-Мердока як мікромеханічної моделі нанокompозиту. Цей підхід дає аналітичний розв'язок і є ефективним інструментом для вивчення подібних проблем. Ефективні модулі за різними підходами до осереднення обчислені в роботах [7–8]. Проте потенціал цих методів залишався нерозкритим щодо оцінки тривимірних пружних структур з нанорозмірними неоднорідностями загальної топології та властивостями інтерфейсів. Це можна пояснити необхідністю істотної модифікації згаданих методів, особливо у випадках тривимірних наноструктур з одиничними та множинними наночастками неканонічної геометрії та неklasичними контактними умовами. Модифікації методів скінченних та граничних елементів для вивчення механічних властивостей нанокompозитів і присвячена ця робота.

Мета дослідження

Метою дослідження є створення методики для ефективного оцінки пружних властивостей матричних нанокompозитів з поодинокими включеннями і періодично структурованих композитних метаматеріалів тривимірної конфігурації з використанням сучасних методів граничних і скінченних елементів.

Викладення основного матеріалу дослідження

Аксіально-симетричні задачі теорії пружності для ізотропного тіла з неоднорідністю

Розглянемо пружний скінченний циліндр з неоднорідністю. Припустимо, що неоднорідність має форму циліндра з закругленими торцями (рис. 1). Зовнішня межа тіла та його об'єм позначаються відповідно S і Ω_1 . Зовнішня поверхня включення та його область позначаються як S_{int} та Ω_2 . Поверхня $S = \partial\Omega_1$ є граничною поверхнею, що включає границю неоднорідності S_{int} ; тому $S = S_{\text{int}} \cup S_1$, де S_1 є граничною поверхнею циліндру (рис. 1). Припустимо, що тіло статично навантажується уздовж межі S граничними зусиллями t і усередині області об'ємними силами f . Цей пружний циліндр з неоднорідністю можна розглядати як репрезентативний об'ємний елемент для

вивчення механічних властивостей композитів та нанокompозитів. У подальшому нехай Ω_1 – область матриці, а Ω_2 – область, яка зайнята неоднорідністю.

Тривимірні рівняння ізотропної теорії пружності показують, що дивергенція тензора напружень дорівнює нулю, тобто

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}; \quad \boldsymbol{\sigma} = 2G[v/(1-2v)\text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + \mathbf{e}]; \quad 2\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}); \quad \text{tr}(\mathbf{e}) = e_{ii}, \quad (1)$$

де \mathbf{u} – вектор переміщень, \mathbf{e} – тензор нескінченно малих деформацій, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напружень, \mathbf{f} – об’ємна сила, ν – коефіцієнт Пуассона, $G = 0.5E / (1+\nu)$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, e_{ii} – перший інваріант тензору деформацій.

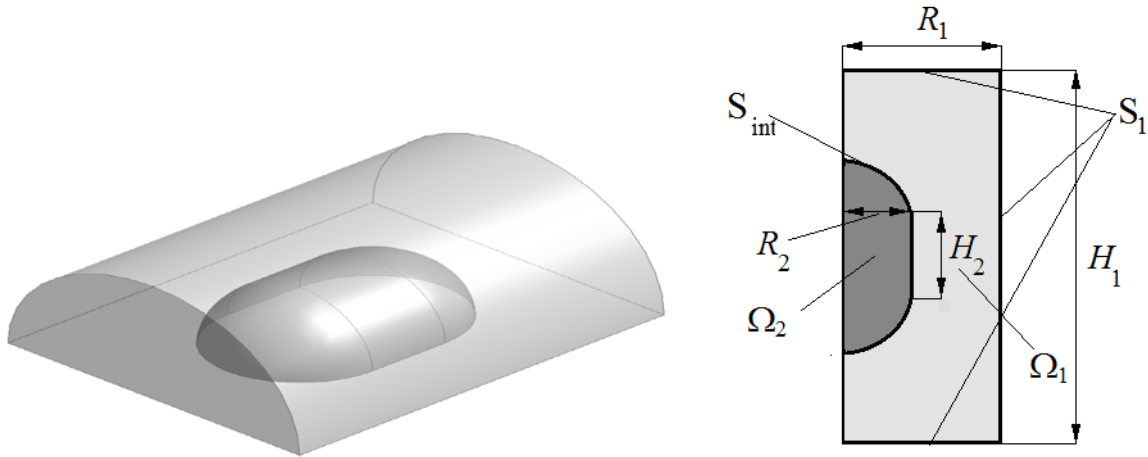


Рис. 1. Пружний циліндр зі включенням, його ескіз та під-області

Нехай P_0 , P та Q є точками колокацій: точкою на зовнішній поверхні S і всередині області, відповідно. Зв'язок між внутрішніми зусиллями тіла та його зміщеннями може бути виражений граничним інтегральним рівнянням (тотожність Сомільяни) у такому вигляді:

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \iint_{\sigma} \mathbf{U}(P, P_0)\mathbf{t}(P)d\sigma - \iint_{\sigma} \mathbf{T}(P, P_0)\mathbf{u}(P)d\sigma + \iiint_{\Omega} \mathbf{U}(P, Q)\mathbf{f}d\Omega,$$

де \mathbf{C} – постійна матриця, яка залежить від положення точки P на поверхні σ , $\mathbf{U}(P, P_0) = \{U_{ij}\}$, $\mathbf{T}(P, P_0) = \{T_{ij}\}$ – фундаментальний розв’язок Кельвіна:

$$U_{ij}(P, P_0) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j],$$

$$T_{ij}(P, P_0) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j] \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \right\}.$$

Тут $r = (r_i r_i)^{1/2}$, $r_i = x_i(P) - x_i(P_0)$, $r_i = \partial r / \partial x_i(P) = r_i / r$.

Вводимо матричні оператори:

$$\mathbf{A}(\sigma_1, \sigma_2)\mathbf{u} = \iint_{\sigma_1} \mathbf{T}(P, P_0)\mathbf{u}(P)d\sigma_1, \quad \mathbf{B}(\sigma_1, \sigma_2)\mathbf{t} = \iint_{\sigma_1} \mathbf{U}(P, P_0)\mathbf{t}(P)d\sigma_1, \quad P_0 \in \sigma_2.$$

Приймаючи до уваги, що

$$\mathbf{A}(\sigma_1, \sigma_1)\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{u} + \iint_{\sigma_1} \mathbf{T}(P, P_0)\mathbf{u}(P)d\sigma_1,$$

отримаємо основне інтегральне співвідношення у вигляді

$$\mathbf{A}(\sigma, \sigma)\mathbf{u} = \mathbf{B}(\sigma, \sigma)\mathbf{t}.$$

З метою адаптації розрахункових гранично-елементних моделей для поодинокого нановключення до подальшого числового аналізу у просторовій області запропоновано схеми регуляризації отриманих граничних інтегральних рівнянь з сингулярностями різного порядку у ядрах від входження фундаментальних розв'язків відповідних статичних задач континуальної механіки. Здійснено явне адитивне виділення сингулярностей у рівняннях гранично-елементної моделі [9].

Двовимірні сингулярні рівняння теорії пружності зведено до одновимірних для випадку, коли область інтегрування є поверхнею обертання [10–11]. Тоді статичні задачі визначення пружних характеристик наноконструктив зводяться до розв'язання систем одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь. Це дозволяє розробити лише одну процедуру для визначення пружних характеристик, яку можна використовувати для опису пружних переміщень та зусиль як у матриці, так і у нановключенні.

На першому етапі розглядаємо випадок розтягування вздовж однієї з координатних осей. В точках матриці та включення отримуємо дві системи сингулярних інтегральних рівнянь відповідно. З кожної з цих систем знаходимо зусилля на поверхні розділу як функції відповідних переміщень. Це дає змогу на нанорівневій поверхні розділу використовувати як умови ідеального контакту, так і неklasичні контактні умови Гертіна-Мердока.

З метою побудови стійких числових алгоритмів розв'язання одновимірних систем сингулярних інтегральних рівнянь виконано аналіз сингулярностей в ядрах отриманих інтегральних операторів осесиметричної задачі теорії пружності [12]. Доведено, що сингулярні ядра містять два типи особливостей: логарифмічну особливість та особливість типу Коші. Доведено також, що всі компоненти ядер отриманих інтегральних операторів можна звести до двох типів: ядра гармонічних потенціалів простого шару та ядра гармонічних потенціалів подвійного шару. Ці інтегральні оператори для поверхні обертання зведено до обчислення інтегралів, що містять еліптичні інтеграли першого та другого роду [10–11]. Зауважимо, що у запропоновану схему потрібно залучати лише граничні значення зусиль зі сторони матриці і нановключення на міжфазній поверхні розділу, які є безпосередніми розрахунковими функціями в гранично-інтегральних формулюваннях.

Прикладом для валідації методу слугує довгий циліндр, який закріплений на одному торці ($z=0$) та підданий розтягуючому навантаженню F на іншому ($z = L$). Відношення радіуса циліндра R до його довжини L складало $1/10$, модуль пружності обирався рівним $E=2,11 \cdot 10^6$ МПа. Задача має аналітичний розв'язок. Сітка, що використовується при числовому моделюванні, має 120 граничних елементів уздовж циліндричної частини та 60 елементів вздовж верхнього та нижнього радіусів циліндра. Подальше згущення сітки не приводило до суттєвої зміни результатів. Задача розв'язана з використанням граничних елементів із сталою апроксимацією густини та з застосуванням 6-точкових квадратур Гаусса для обчислення інтегралів за несингулярними елементами.

В табл. 1 нижче надані нормалізовані переміщення $w^* = w\pi ER^2 / FL$, які обчислені в точках $r/R = 0.05, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ при $z = L$.

Далі розглянуто задачу про напружено-деформований стан пружного циліндра (матриці) з неоднорідністю (включенням). Розглянуто циліндр, закріплений на одному торці ($z=0.0$), навантажений рівномірно на торці ($z=5.0$), та має включення у формі циліндра з закругленими торцями (рис.1).

Відношення довжин циліндру та включення прийнято рівним $H_1/H_2=5$, а відношення їх радіусів є $R_1/R_2=2$, модулі пружності обрано $E_1=2,11 \cdot 10^6$ МПа, $E_2=2,11 \cdot 10^7$ МПа, коефіцієнти Пуассона є $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, тобто вважалось, що модуль пружності включення на порядок більший в порівнянні з модулем пружності матриці. Досліджено вплив неоднорідності на напружено-деформований стан циліндра. Застосовано метод граничних суперелементів [12–13], при чому результуюча система лінійних алгебраїчних рівнянь містить лише невідомі переміщення на поверхні інтерфейсу S_{int} (рис. 1).

Таблиця 1

Метод	Точки, r/R				
	0.05	0.25	0.5	0.75	0.99
МГЕ	1.006	1.0003	1.00001	1.0004	1.02
Аналітичне значення	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

При числовій симуляції використані N_i одновимірних граничних елементів на поверхнях Σ_i ($i=1,2,3$): $N_1 = 150$, $N_2 = 30$, $N_3 = 240$. Подальше збільшення кількості елементів не привело до суттєвої зміни результатів.

Рис. 2 демонструє розподіл переміщень в пружному циліндрі з включенням вздовж поверхні інтерфейсу.

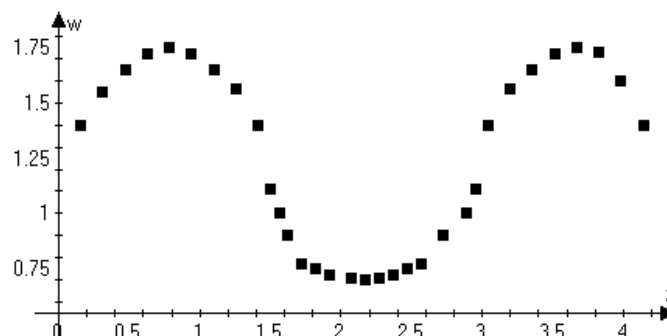


Рис. 2. Переміщення на поверхні інтерфейсу

У порівнянні з циліндром, що не містить включення, переміщення мають суттєво неоднорідний характер.

Дослідження репрезентативних об'ємів методом скінченних елементів

Метод скінченних елементів застосовано для визначення напружено-деформованого стану різних репрезентативних об'ємних елементів тривимірних нанокомпозитів. Вивчено вплив форми і відносних розмірів неоднорідностей та матриць репрезентативного об'єму на ефективний модуль пружності нанокомпозитів. Розглядаються матриці у вигляді гексагональної призми та циліндра скінченних розмірів. Неоднорідності розглядаються у вигляді сфер або циліндрів із закругленими краями.

Використовуючи метод скінченних елементів, розглядаємо такі форми матриць для репрезентативних об'ємних елементів: циліндр (рис 1), гексагональна призма (рис.

3а)) та мультиматриця (рис. 3.б)). Було залучено класичні умови контакту. Умови кріплення реалізовані у вигляді жорсткого защемлення одного з шестикутників. Навантаження F подається на другий шестикутник як сила розтягування. Як матриця, так і область включення поділяються на тетраедричні скінченні елементи.

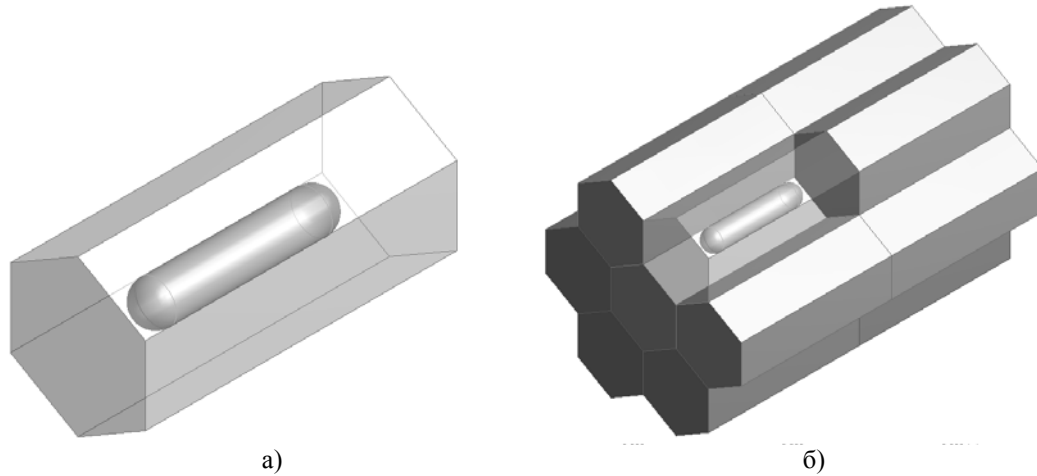


Рис. 3. Схеми різних репрезентативних об'ємних елементів

Розроблено методику дослідження напружено деформованого стану різних репрезентативних об'ємних елементів тривимірних нанокомпозитів. Матеріал неоднорідності мав модуль пружності, що значно перевищував модуль пружності матриці. Досліджено випадок, коли репрезентативний об'єм має декілька неоднорідностей однакової форми. Отримані результати порівняно з даними для поодинокого включення. Результати розрахунку демонструють зміну напружено деформованого стану та осереднених властивостей нанокомпозиту для різних репрезентативних об'ємних елементів.

Основними співвідношеннями є диференціальні рівняння (1) з умовами контакту на поверхні інтерфейсу та умовами кріплення. Як матриця, так і область включення поділяються на тетраедричні скінченні елементи. В якості наближеного розв'язку задачі розглянемо кусково-лінійну вектор-функцію $\mathbf{u}_h(x, y, z)$, яка неперервна в тривимірній області, що розглядається, і лінійна на кожному тетраедрі. На множині тетрадрів ця функція визначена таким чином:

$$u_j^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_i} u_{ji} \varphi_i(x, y, z), \quad j = 1, 2, 3,$$

де u_{ji} – невідомі вузлові значення, $\varphi_i(x, y, z)$ – функції форми.

Розроблено дві скінченно-елементні моделі репрезентативних об'ємних елементів. Ці моделі та відповідні схеми дискретизації зображені на рис. 4а) та 4б).

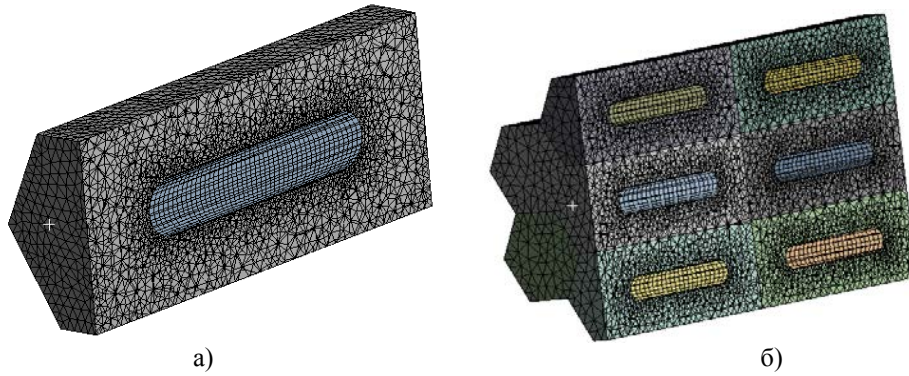


Рис. 4. Скінченно-елементні моделі різних репрезентативних об'ємних елементів

Кількість елементів у версії поодинокого включення в репрезентативний об'ємний елемент становить 115 тисяч, а кількість вузлів – 200 тисяч. Кількість елементів у варіанті взаємодіючих включень в репрезентативний об'ємний елемент становить 700 тисяч, а число вузлів – 950 тисяч.

Умови закріплення були реалізовані у вигляді жорсткого закріплення по площі одного з шестигранників. Навантаження додавалася до другого шестиграннику у вигляді одиничної сили, що розтягує. Розрахунок був проведений в статичному формулюванні, де час навантаження не впливав на результат. Критерієм оцінки міцності конструкції виступає модуль пружності

$$E = \frac{F \cdot l}{\Delta l \cdot s},$$

де l – довжина конструктивного елемента, Δl – осьова деформація, s – площа, де прикладалось навантаження.

Були обрані такі геометричні характеристики репрезентативного об'єму та механічні властивості матриць. Розміри матриці: висота – 400 нм, ширина грані – 100 нм. Базовий розмір включення: висота – 253 нм, діаметр півсфер – 53 нм, об'ємна частка включення в матриці складала 5%.

Властивості матеріалів матриці є такими:

Сталь: Модуль Юнга – 210 ГПа, коефіцієнт Пуассона – 0,28.

Мідь: Модуль Юнга – 110 ГПа, коефіцієнт Пуассона – 0,34.

Алюміній: Модуль Юнга – 71 ГПа, коефіцієнт Пуассона – 0,33.

Властивості матеріалу включення обирались таким чином: модуль Юнга дорівнював 1180 ГПа, коефіцієнт Пуассона – 0,25.

Отримано осьові деформації конструкції для кожного з матеріалів матриці, і на цій основі обчислені ефективні модулі пружності. У зв'язку з нерівномірним розподілом осьової деформації, обиралось її максимальне значення у відповідному перерізі, з чого випливає, що ефективний модуль пружності буде не усередненим, а мінімально можливим. Усереднений модуль пружності як, правило, має значення на 2–4% вище.

На рис. 5–7 наведені розподіли осьової деформації для всіх розглянутих репрезентативних об'ємів. На рис. 8 наведено розподіл осьової деформації для мультиматричного репрезентативного об'єму.



Рис. 5. Сталева матриця

Максимальна деформація склала $6,37e-11$. Ефективний модуль пружності дорівнює 241,5 ГПа, що на 15% вище модуля пружності сталі 210 ГПа.



Рис. 6. Мідна матриця

Максимальна деформація склала $1,136e-10$. Ефективний модуль пружності дорівнює 135,6 ГПа, що на 23% вище модуля пружності міді 110 ГПа.



Рис. 7. Алюмінієва матриця

Максимальна деформація склала $1,697e-10$. Ефективний модуль пружності дорівнює 90,6 ГПа, що на 27,6% вище модуля пружності алюмінію 71 ГПа.



Рис. 8. Стальна мультиматриця

Максимальна деформація склала $1,823 \times 10^{-11}$. Ефективний модуль пружності дорівнює 241,5 ГПа, що на 15% вище модуля пружності сталі 210 ГПа.

На рис. 9 наведено залежність ефективного модулю від частки нанорозмірного включення для сталеві матриці.

З розрахунків випливає, що однорідні матеріали значно програють в міцності нанокомпозитним. За результатами розрахунків різниця склала, як мінімум, від 15% для моделі із сталеві матрицею до 27,6% для алюмінієвої

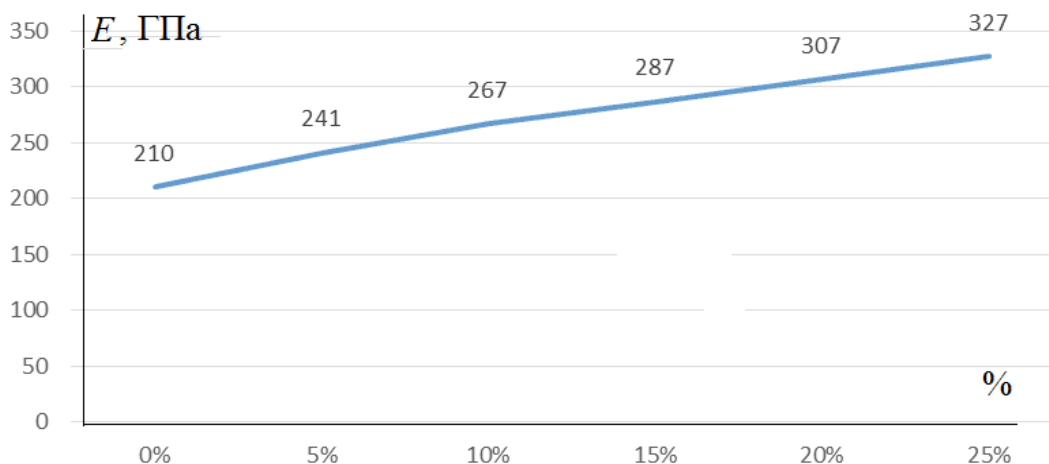


Рис. 9. Залежність модуля пружності для сталеві матриці від частки нанорозмірного включення

Висновки

Для дослідження властивостей композитного наноматеріалу достатньо розглядати матрицю з поодиноким включенням, адже, громіздкі, мультиматричні моделі не демонструють результатів, які відмінні від випадку поодинокого включення. Отримані дані також демонструють, що найбільш ефективна об'ємна частка нанорозмірного включення в репрезентативному об'ємі матеріалу складає близько 5%, подальше її зростання демонструє менше зміцнення. Слід зазначити, що максимальні осьові деформації виникали на кутах шестикутної призми, і, саме вони кілька занижували реальний ефективний модуль пружності конструкцій. Отже, побудова матриць, з рівновіддаленими від нановключення елементами, наприклад, трубчастих, здатна відчутно поліпшити міцність нанокомпозитів. Надалі буде розроблено підхід, заснований на сумісному використанні МГЕ та МКЕ, який дозволить ефективно аналізувати репрезентативні об'ємні елементи з трубчастими і оболонковими включеннями та відкриє нові можливості для оцінки міцнісних характеристик тривимірних пружних структур з нанорозмірними неоднорідностями загальної форми.

Список використаної літератури

1. Wang J., Huang Z., Duan H. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2011. Vol. 24. P. 52-82.
2. Dong C. Y., Zhang G. L. Boundary element analysis of three-dimensional nanoscale inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50. P. 201-208.
3. Duan H. L., Wang J., Huang Z. P., Karihaloo B. L. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nanoinhomogeneities with interface stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2005. Vol. 53. P. 1574-1596.
4. Quang Le., He H. Q. Size-dependent effective thermoelastic properties of nanocomposites with spherically anisotropic phases. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2007. Vol. 55. P. 1889-1921.
5. Kushch V. I. Elastic fields and effective stiffness tensor of spheroidal particle composite with imperfect interface. *Mechanics of Materials*. 2018. Vol. 124. P. 45-54.
6. Kushch V. I. Stress field and effective elastic moduli of periodic spheroidal particle composite with Gurtin-Murdoch interface. *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 132. P. 79-96.
7. McCartney L. N. Maxwell's far-field methodology predicting elastic properties of multiphase composites reinforced with aligned transversely isotropic spheroids. *Philosophical Magazine*. 2010. Vol. 90. P. 4175-4207.
8. Mori S., Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*. 1973. Vol. 21. P. 571-574.
9. Караєв А. О., Стрельнікова О. О. Сингулярні інтеграли в аксіально-симетричних задачах теорії потенціалу. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. Т. 1. С. 10-18.
10. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1, I. 1. P.14-27.
11. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. Vol. 6(6). P. 976-988.
12. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016. Vol. 67. P. 13-25.
13. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017. Vol. 5, I. 3. P. 317-328.

References

1. Wang, J., Huang, Z., & Duan, H. (2011) Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*, **24**, 52–82.
2. Dong, C. Y., & Zhang G. L. (2013) Boundary element analysis of three-dimensional nanoscale inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures*, **50**, 201-208.
3. Duan, H.L., Wang, J., Huang, Z.P., & Karihaloo, B.L. (2005) Size-dependent effective elastic constants of solids containing nanoinhomogeneities with interface stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **53**, 1574–1596.

4. Quang, Le., & He, H. Q. (2007) Size-dependent effective thermoelastic properties of nanocomposites with spherically anisotropic phases. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **55**, 1889–1921.
5. Kushch, V. I. (2018) Elastic fields and effective stiffness tensor of spheroidal particle composite with imperfect interface. *Mechanics of Materials*, **124**, 45–54.
6. Kushch, V. I. (2018) Stress field and effective elastic moduli of periodic spheroidal particle composite with Gurtin-Murdoch interface. *International Journal of Engineering Science*, **132**, 79–96.
7. McCartney, L. N. (2010) Maxwell's far-field methodology predicting elastic properties of multiphase composites reinforced with aligned transversely isotropic spheroids. *Philosophical Magazine*, **90**, 4175–4207.
8. Mori, S., & Tanaka K. (1973) Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, **21**, 571–574.
9. Karaiev, A. O., & Strelnikova, O. O. (2018) Synhuliarni intehraly v aksialno-symetrychnykh zadachakh teorii potentsialu. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*, **1**, 10-18.
10. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., & Strelnikova, E. (2016) Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, **1**(1),14-27.
11. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., & Strelnikova, E. (2018) Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, **6**(6), 976-988.
12. Ravnik, J., Strelnikova, E., Gnitko, V., Degtyarev, K., & Ogorodnyk, U. (2016) BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **67**, 13-25.
13. Gnitko, V., Degtyarev, K., Naumenko, V., & Strelnikova, E. (2017) BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, **5** (3), 317-328.